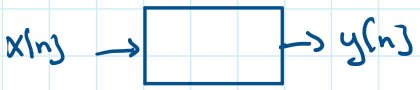
Lec6 - ARX

Wednesday, 7 August 2024 8:57

ARX model name stands for **A**uto-**R**egressive with e**X**tra input or **A**uto-**R**egressive e**X**ogenic.

Systems classification Two class of models:

- **Endogenic** system is a system without inputs. ← AR
- **Exogenic** is a system with inputs.



חיזוי מבוסס היסטוריה של x[n] ולא y[n]

The $ARX(p, q)$ model is given by

$$y[n] = a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_k x[n-k] + \epsilon[n]$$

$b_0 x[n]$

Cross-Correlation Function

רקע: ACF - "קשר" לינארית בין הדגימות של y[n] ו y[n+k]

מרחיב..: CCF: לינארי קשר בין x[n-k] לבין y[n]

$$\hat{y}[n] = b_k x[n-k]$$

מקדם b_k יחיד, ולא מקדמי a_k

The resulting MSE-based loss function is of the form

$$\mathscr{L}(b) = \frac{1}{2} \sum_n \left(y[n] - b_k x[n-k] \right)^2 \qquad (19.3)$$

with the solution by

$$\frac{d\mathscr{L}(b)}{db} = \sum_n (y[n] - b_k x[n-k])(-x[n-k]) = 0 \quad (19.4)$$

The corresponding solution is

$$b_k = \frac{\sum_n y[n] x[n-k]}{\sum_n x^2[n-k]}. \qquad (19.5)$$

במקום חישוב של ACF

$$a_k = \frac{\sum_n x[n] x[n-k]}{\sum_n x^2[n-k]}$$

Cross-Correlation Function The resulting coefficients are related to the cross-correlation function,

$$R_{\mathbf{xy}}[k] = \sum_n x[n] y[n-k], k = -L+1, \ldots, L-1 \quad (19.6)$$

בדומה ל- ACF, יש 4 סוגים של CCF

$$R_{\mathbf{xy},biased}[k] = \frac{1}{L} R_{\mathbf{xy}}[k]$$

$$R_{\mathbf{xy},unbiased}[k] = \frac{1}{L-|k|} R_{\mathbf{xy}}[k]$$

$$R_{\mathbf{xy},norm}[k] = \frac{R_{\mathbf{xy}}[k]}{\sqrt{R_{\mathbf{x}}[0] R_{\mathbf{y}}[0]}}$$

$$R_{\mathbf{xy},norm}[k] \approx \rho_{\mathbf{xy}}[k]$$

x[n-k] , y[n]

תכונות

$$\left.\begin{aligned} R_{\mathbf{xy}}[k] &= R_{\mathbf{yx}}[-k] \\ R_{\mathbf{xy}}[-k] &= R_{\mathbf{yx}}[k] \end{aligned}\right\} \text{סימטריה}$$

$$\left.\begin{aligned} |R_{\mathbf{xy}}[k]| &\leqslant \sqrt{R_{\mathbf{x}}[0] R_{\mathbf{y}}[0]} \\ |R_{\mathbf{xy}}[k]| &\leqslant \frac{1}{2} \left[R_{\mathbf{x}}[0] + R_{\mathbf{y}}[0] \right] \end{aligned}\right\} \text{א׳ שיוונים של הספק}$$

Cross-Covariance Function

- הסרת ממוצע מהאותות לפני חישוב CCF

- בהסרת ממוצע מהאותות לפי חישוב CCF
בדומה ל auto covariance function

$$|R_{\mathbf{xy}}[k]| \leqslant \frac{1}{2}\left[\underbrace{R_{\mathbf{x}}[0]}_{\text{הספק של } x[n]} + R_{\mathbf{y}}[0]\right]$$

של הספק

ARX(0,q) model

מודל ללא היסטוריה של $y[n-k]$

חיזוי הוא קומבינציה של ערכי כניסה היסטוריים

$$y[n] = b_1 x[n-1] + \cdots + b_{m-1} x[n-q] + \epsilon[n]$$
$$= \sum_{k=1}^{q} b_k x[n-k] + \epsilon[n]$$

$$\arg\min_{\underline{b}} \| \underline{y} - \underline{X}\underline{b} \|^2 \Rightarrow$$

מקדמים שממזערים MSE

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}[1] \\ \hat{y}[2] \\ \vdots \\ \hat{y}[L-1] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] & 0 & \vdots & 0 \\ x[1] & x[0] & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[L-2] & x[L-3] & \vdots & x[L-m-2] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Example 19.1: ARX(3,3) model with signals

$$x[n] = x[0], x[1], \ldots, x[7]$$
$$y[n] = y[0], y[1], \ldots, y[7]$$

The required difference equation is

$$\hat{y}[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-2] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3]$$

Find prediction of $\hat{y}[8]$.

$$\left\| \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] & 0 & 0 & y[0] & 0 & 0 \\ x[1] & x[0] & 0 & y[1] & y[0] & 0 \\ x[2] & x[1] & x[0] & y[2] & y[1] & y[0] \\ x[3] & x[2] & x[1] & y[3] & y[2] & y[1] \\ x[4] & x[3] & x[2] & y[4] & y[3] & y[2] \\ x[5] & x[4] & x[3] & y[5] & y[4] & y[3] \\ x[6] & x[5] & x[4] & y[6] & y[5] & y[4] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} \right\|^2$$

חישוב מבוסס

$R_{xx}[k]$
$R_{xy}[k]$