Lec3 - DFT & FreqEst

Thursday, 6 June 2024 14:25

Discrete Fourier transform (DFT) representation assumes that any arbitrary, finite-time signal $y[n]$ may be represented as a sum of sinusoidal signals,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(\omega_k n + \theta_k), \quad n = 0, \dots, L-1$$

N - מספר תדרים

$k = 0 \dots, N-1$ $\qquad \omega_k = k\frac{2\pi}{N}$

הערה: עבור $N \geq L$ ניתן לקבל $y[n]$ במדויק

$$\underline{\hat{y}} = \underline{\hat{y}}$$

תכונות:

$$\omega_k = \omega_{N-k}$$

הוכחה:

$$\cos((N-k)\Delta\omega) = \cos(N\Delta\omega - k\Delta\omega) = \cos(2\pi - k\Delta\omega) = \cos(k\Delta\omega).$$

מטרה: לחשב A_k, θ_k ע"י LS

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{w}.$$

A_k, θ_k: אם יש אות בתדר ω_k זה האמפליטודה והפאזה שלו

$\omega_0 = 0 \Rightarrow \sin(0) \rightarrow$ פחות עמודה

$2N\times1$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_{c_0} \\ w_{c_1} \\ w_{s_1} \\ w_{c_2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow A_0 \quad \theta_0 = 0 \Leftarrow DC \\ \Big\} A_1, \theta_1 \\ \\ \Big\} A_2, \theta_2 \\ \\ \end{matrix}$$

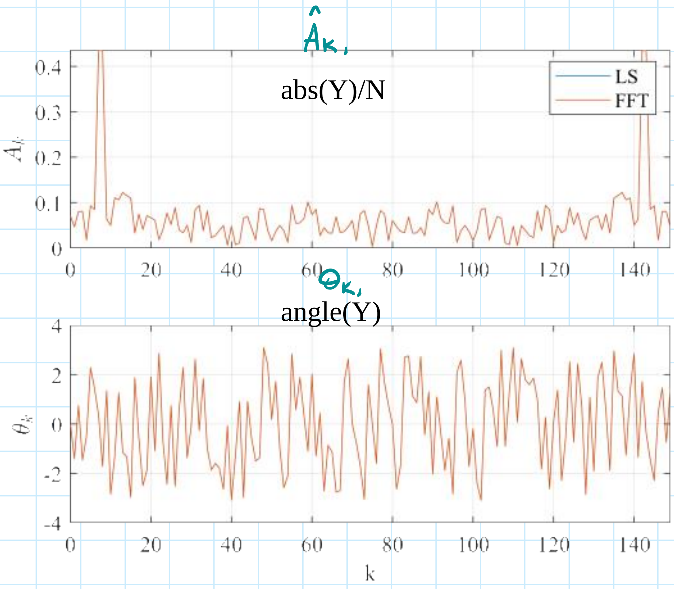
פתרון: $L \times 2N-1$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_1 \cdot 0) & \sin(\omega_1 \cdot 0) & \cos(\omega_2 \cdot 0) & \cdots \\ 1 & \cos(\omega_1) & \vdots & \cos(\omega_2 \cdot 1) & \\ 1 & \cos(2\omega_1) & \vdots & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

FFT $\rightarrow$

$$Y[k] = N A_k e^{j\theta_k}$$

הרבה יתר מהיר
פחות זכרון



```
w0 = 0.1*pi;
A = 1.5;
theta = -pi/4;
L = 100;
n = (0:L-1)';
sigma = 1;
```

תדר
אמפליטודה
פאזה
אורך האות
שונות הרעש

```
y_theory = A*cos(w0*n+theta);
y = y_theory + sigma*randn(L,1);

N = L+50;  % number of frequencies
%% LS
X = zeros(L,2*N-1);
X(:,1) = ones(L,1);
X(:,2:2:end) = cos(2*pi/N*n*(1:N-1));
X(:,3:2:end) = sin(2*pi/N*n*(1:N-1));
w_ls = lsqminnorm(X,y); %w_ls = pinv(X)*y;
y_hat = X*w_ls;

%% Amplitude and phase
A_hat(1) = w_ls(1);
A_hat(2:N) = sqrt(w_ls(2:2:end).^2 + w_ls(3:2:end).^2);
theta_hat(1) = 0;
theta_hat(2:N) = -atan2(w_ls(3:2:end),w_ls(2:2:end));
Y = fft(y,N);
```

$L \times 2N-1$

עמודת אחדות

DC

Frequency estimation

$$y[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + \epsilon[n] \quad n = 0, \ldots, L-1$$

$$\underline{\hat{y}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \omega_0}}{\underline{\bar{X}}}\,\underline{w}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\omega_0) = \mathbf{X}(\omega_0)\mathbf{w} \leftarrow \text{periodogram}$$

$$\mathbf{e}(\omega_0) = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\omega_0)$$

$$\widehat{SNR} = \frac{\|\hat{\mathbf{y}}\|^2}{\|\mathbf{e}\|^2}$$

יחס אות לרעש

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \|\hat{\mathbf{e}}\|^2 \cdot \frac{1}{L}$$

שונות הרעש היא יחסית להספק

$$< x^2(t) > = \sigma_x^2$$

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}$$

$$\underbrace{\langle \mathbf{y} \rangle^2}_{\text{אות מקרי}} = \underbrace{\langle \hat{\mathbf{y}}(\omega_0) \rangle^2}_{\text{אות בהינתן } \omega_0} + \underbrace{\langle \mathbf{e}(\omega_0) \rangle^2}_{\text{שגיאת חיזוי}}$$

$$\hat{\omega_0} = \arg\min_{\omega_0} \|\mathbf{e}\|^2 = \arg\max_{\omega_0} \|\hat{\mathbf{y}}\|^2$$

זהה לחלקים הקודמים

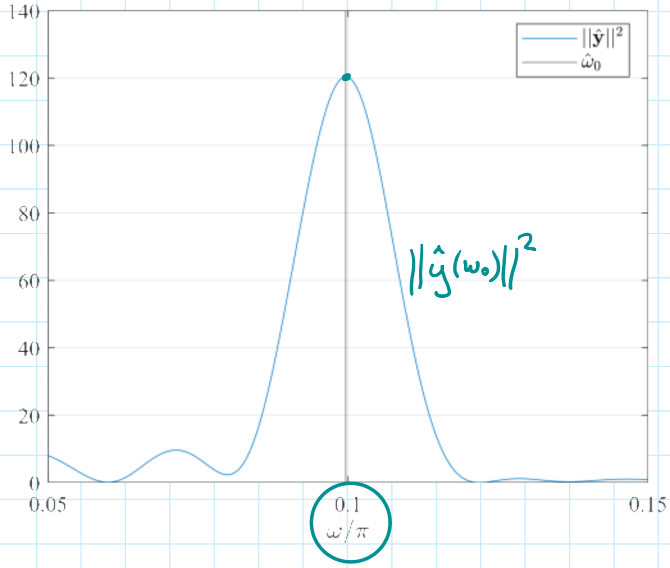
```
%% dataset
w0 = 0.1*pi;
A = 1.5;
theta = -pi/4;
L = 100;
n = (0:L-1)';
sigma = 1;
y_theory = A*cos(w0*n+theta);
noise = sigma*randn(L,1);
y = y_theory + noise;
snr_theory = y_theory'*y_theory/(noise'*noise);
```

```
%% SNR
P_signal_hat = per(y,w_max);
P_noise_hat = y'*y-per(y,w_max);
snr_hat = P_signal_hat/P_noise_hat;
sigma_hat = sqrt(P_noise_hat/L);
```

פונ׳ עם תלות ב- ω_0 ←

```
%% LS
function P = per(y,w0)
    L = length(y);
    n = (0:L-1)';
    X = [cos(w0*n) sin(w0*n)];
    w_ls = lsqminnorm(X,y);
    y_hat = X*w_ls;
    P = y_hat'*y_hat;
end
fun = @(w) -per(y,w);
w_max = fminsearch(fun,0.1*pi);
```

חיפוש מינימום



$$P_{cos} = \frac{A^2}{2}$$

שונות השגיאה

$$\underset{\uparrow}{\hat{A} - A}$$

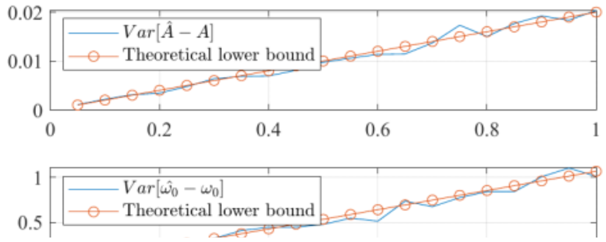
$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma^2} \tag{19.25}$$

and the corresponding (Cramer-Rao) bounds are

$$\mathrm{Var}\left[\hat{A}\right] \geqslant \frac{2\sigma^2}{L} \quad [V^2] \tag{19.26}$$

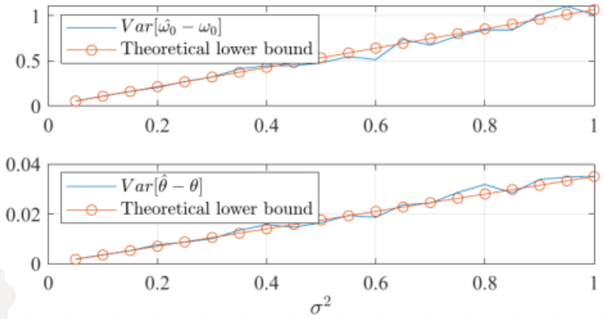
$$\mathrm{Var}[\hat{\omega}_0] \geqslant \frac{12}{SNR \times L(L^2-1)} \approx \frac{12}{SNR \times L^3} \quad \left[\left(\frac{rad}{sample}\right)\right] \tag{19.27}$$

שיעורי בית



$$\operatorname{Var}[\hat{\omega}_0] \geqslant \frac{12}{SNR \times L(L^2-1)} \approx \frac{12}{SNR \times L^3} \quad \left[\left(\frac{rad}{sample}\right)\right] \tag{19.27}$$

$$\operatorname{Var}\left[\hat{\theta}\right] \geqslant \frac{2(2L-1)}{SNR \times L(L+1)} \approx \frac{4}{SNR \times L} \quad [rad^2] \tag{19.28}$$



* צריך לבדוק סימולציה מול תאוריה

- יש לעשות ממוצע ע"פ עשרות/מאות הרצות