



המחלקה להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

תאריך הבחינה: 10.03.2026

שעות הבחינה: 13:30-16:30

מבוא לאותות אקראיים

מועד ב'

ד"ר דימה בחובסקי, מר טל פאר

תשפ"ו סמסטר א'

חומר עזר - דף נוסחאות אישי (עמוד אחד), מחשבון

הוראות מיוחדות:

- השאלון כולל שאלות ללא בחירה, סך הכל של 100 נקודות.
- סעיפים הם בעלי ניקוד זהה, אלא אם צוין אחרת.
- יש לציין באופן מלא וברור את שלבי הפתרון. תשובה ללא הסבר לא תתקבלנה.
- במקום בו נדרש חישוב מספרי, יש קודם לרשום את הנוסחה, ורק אח"כ להציב!
- יש לציין יחידות למספרים, ובמידה וקיימות!
- כל השרטוטים יהיו גדולים, ברורים, עם סימון צירים!
- אין חובה להגיע לערך מספרי של הפונקציה $Q(x)$, במידה ומופיעה בתשובה.

השאלון כולל 7 דפים (כולל דף זה)

בהצלחה !



1 זוג משתנים (45 נק')

נתון, כי $(X, Y)^T$ הוא וקטור גאומטרי משותף בעל תוחלת אפס, כך ש:

$$\text{Var}[X] = 4, \quad \text{Var}[Y] = 1, \quad \rho_{XY} = \frac{1}{2}.$$

1. יש לכתוב את מטריצת שונות משותפת C_Z (Covariance Matrix) של $Z = (X, Y)^T$.

2. יש לחשב את $E[(X + Y)^2]$, ואת $\text{Var}[X + Y]$.

3. יש למצוא את מעריך ה-MMSE הליניארי הטוב ביותר של X בהינתן Y , מהצורה

$$\hat{X} = aY,$$

ולחשב את שגיאת ה-MSE המתקבלת $E[(X - \hat{X})^2]$.

4. מהי הסתברות של $\Pr(X + Y > 1)$?

פתרון

1. מהנתונים: $\text{Var}[X] = 4$, $\text{Var}[Y] = 1$, והמקדם המנורמל הוא

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{2}.$$

לכן $\sigma_Y = \sqrt{1} = 1$, $\sigma_X = \sqrt{4} = 2$, ולכן

$$\text{Cov}[X, Y] = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

מטריצת השונות-שיתוף היא

$$C_Z = \begin{bmatrix} \text{Var}[X] & \text{Cov}[X, Y] \\ \text{Cov}[X, Y] & \text{Var}[Y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. מכיוון שהתוחלת היא אפס, מתקיים $E[X + Y] = 0$, ולכן

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= E[(X + Y)^2] - E^2[(X + Y)] \\ &= E[(X + Y)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \text{Cov}[X, Y] \\ &= 4 + 1 + 2 \cdot 1 = 7. \end{aligned}$$



3. המעריך הליניארי מהצורה $\hat{X} = aY$ שנבחר לפי MMSE מקיים

$$a = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[Y]} = \frac{1}{1} = 1,$$

ולכן

$$\hat{X} = Y.$$

את שגיאת ה-MSE ניתן לחשב, למשל, באמצעות

$$\begin{aligned} E[(X - \hat{X})^2] &= E[(X - Y)^2] \\ &= \text{Var}[X - Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] - 2 \text{Cov}[X, Y] \\ &= 4 + 1 - 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

או, לחליפין

$$\text{Var}[Y] (1 - \rho_{XY}^2) = 4(1 - \frac{1}{2^2}) = 4 \cdot \frac{3}{4}$$

4.

$$Z = X + Y$$

$$E[X + Y] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = 7$$

$$Z \sim N(0, 7)$$

$$\Pr(Z > 1) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}[Z]}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$



2 היסטוגרמה (45 נק')

בוצע ניסוי אקראי שבו נדגמו $N = 500$ ערכים של משתנה אקראי רציף X . לצורך ניתוח התוצאות, טווח הערכים חולק למקטעים (Bins) בעלי רוחב אחיד של $\Delta x = 4$. נתמקד במקטע ספציפי המוגדר על ידי התחום $[10, 14]$. במקטע זה נספרו $n_i = 80$ תוצאות מתוך הניסוי.

1. חשב את גובה העמודה (y -axis) עבור המקטע הנתון $[10, 14]$ בשלושת סוגי ההיסטוגרמות הבאים:

(א) היסטוגרמה מסוג Count.

(ב) היסטוגרמה מסוג Probability (שכיחות יחסית).

(ג) היסטוגרמה מסוג PDF (צפיפות).

2. עבור היסטוגרמה מסוג PDF, מהו השטח של העמודה במקטע הנ"ל? מהי המשמעות ההסתברותית של שטח זה?

3. נתון כי במקטע אחר, $[20, 24]$, גובה העמודה בהיסטוגרמה מסוג PDF הוא 0.03. כמה תוצאות (n_j) נפלו במקטע זה?

פתרון:

חישוב גבהים נתונים: $N = 500$, $\Delta x = 4$, $n_i = 80$.

1. סוג Count: הגובה הוא מספר התוצאות במקטע.

$$H_{count} = n_i = 80$$

2. סוג Probability: הגובה הוא השכיחות היחסית.

$$H_{prob} = \frac{n_i}{N} = \frac{80}{500} = 0.16$$

3. סוג PDF: מנרמלים את השכיחות היחסית ברוחב המקטע.

$$H_{pdf} \approx f_X(x_i) = \frac{n_i}{N \cdot \Delta x} = \frac{80}{500 \cdot 4} = \frac{80}{2000} = 0.04$$

משמעות השטח (סוג PDF) בגרף מסוג PDF, ההסתברות מיוצגת על ידי השטח. נחשב את שטח המלבן:

$$Area = H_{pdf} \cdot \Delta x = 0.04 \cdot 4 = 0.16 = H_{prob}$$

משמעות: השטח (0.16) מייצג את ההסתברות המשוערת שהמשתנה האקראי X יפול בתוך המקטע $[10, 14]$. הערה: ערך זה זהה לגובה שהתקבל בסוג Probability, כצפוי.

חישוב לאחר נתון גובה בגרף PDF: $H_{pdf} = 0.03$. נדרש למצוא את n_j .
נשתמש בנוסחה של היסטוגרמה מסוג PDF:

$$H_{pdf} = \frac{n_j}{N \cdot \Delta x}$$

נציב את הערכים:

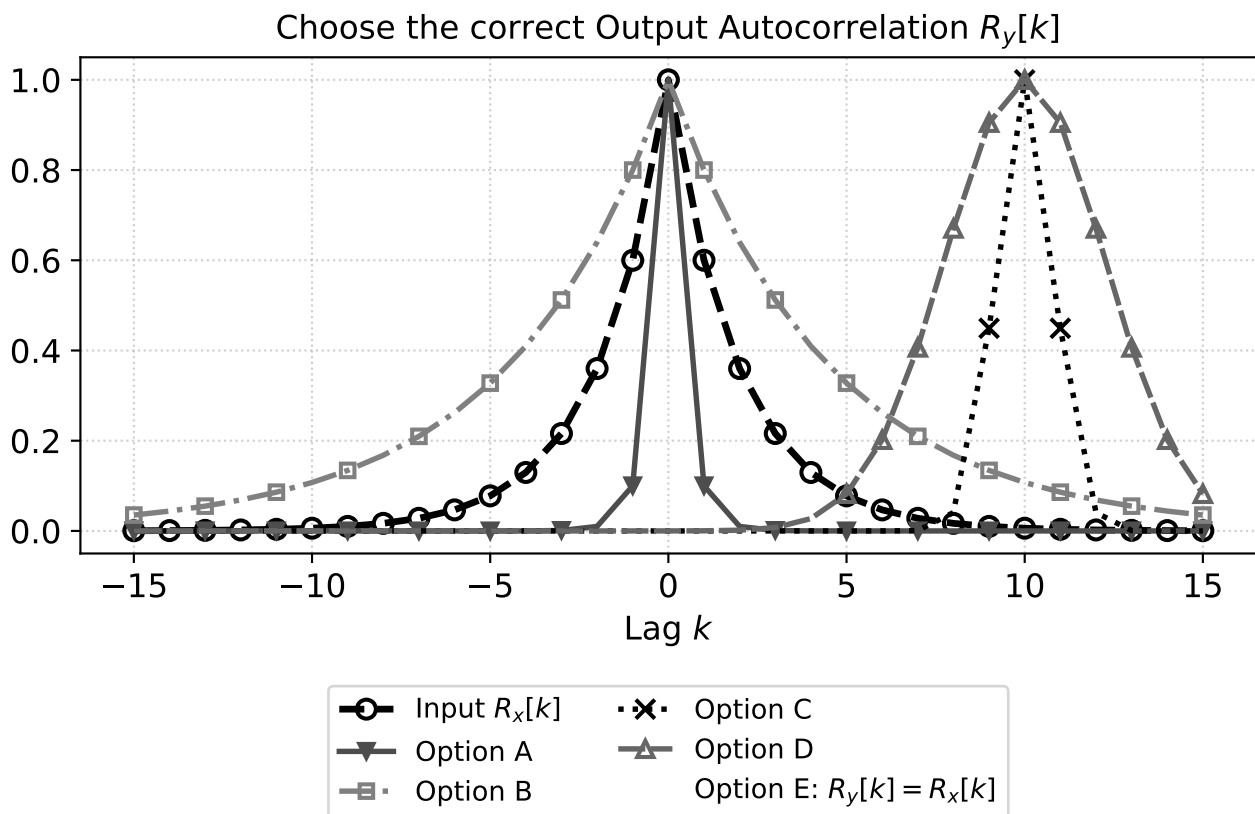
$$0.03 = \frac{n_j}{500 \cdot 4} = \frac{n_j}{2000}$$

$$n_j = 0.03 \cdot 2000 = 60$$

תשובה: במקטע [20, 24] נספרו 60 תוצאות.

3 מעבר של האות דרך מערכת LTI (10 נק')

נתון גרף עם מספר אופציות של $R_y[k]$. בהנתן $R_x[k]$.
עבור כל אחד מהגרפים, יש לציין האם הוא אפשרי עבור $R_y[k]$?





3.1 פתרון

ניתוח הגרפים: קשר בין כניסה למוצא במערכת LTI

נתון אות כניסה עם אוטו-קורלציה $R_x[k]$. האות עובר דרך מערכת לינארית (למשל מסנן Low Pass Filter LPF). הקשר בין האוטו-קורלציה של המוצא לזו של הכניסה והמערכת הוא קונבולוציה:

$$R_y[k] = R_x[k] * R_h[k]$$

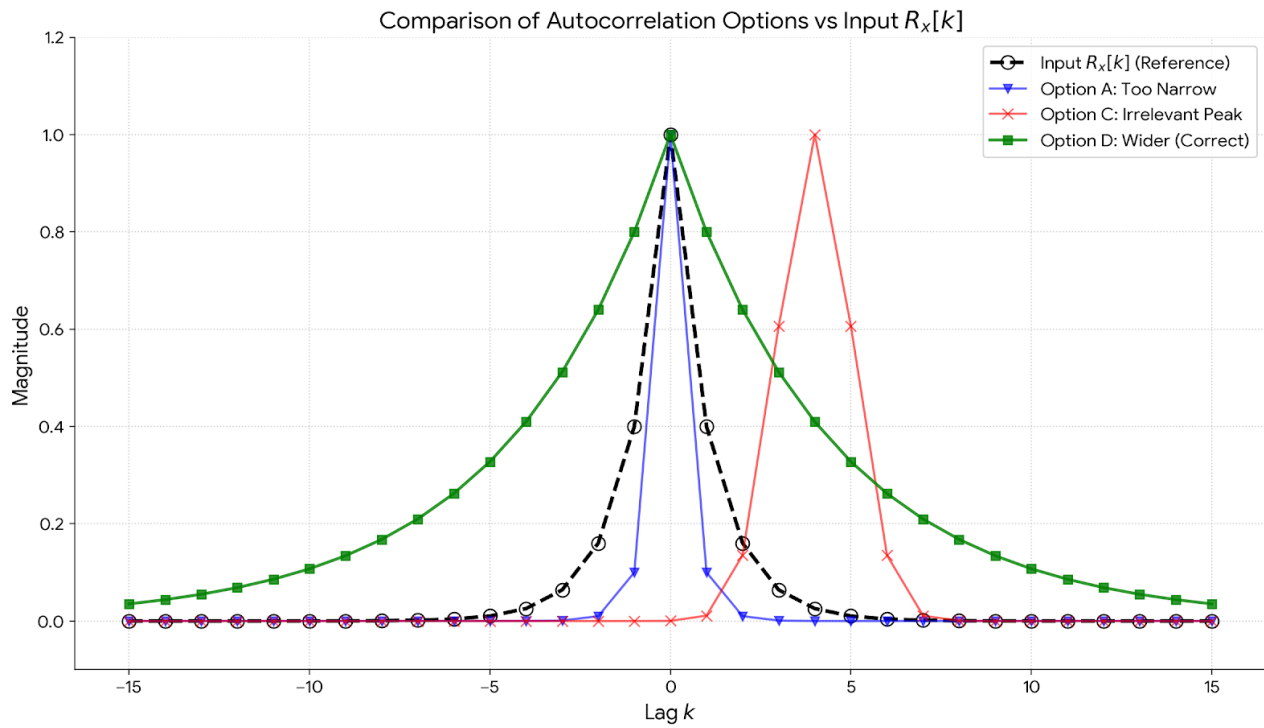
כאשר $R_h[k] = h[k] * h[-k]$ היא האוטו-קורלציה של התגובה להלם. פעולת הקונבולוציה גורמת ל"מריחה" (Smearing) של האות במישור הזמן. המשמעות הפיזיקלית היא שהמערכת מוסיפה "זיכרון" או תלות בין דגימות, ולכן הקורלציה דועכת לאט יותר ככל שה-Lag גדל.

ניתוח האפשרויות בגרף:

□ C,D Option (פסילה מיידיית): פונקציית אוטו-קורלציה של תהליך סטציונרי חייבת להיות סימטרית ולקבל מקסימום ב- $k = 0$ (כלומר $|R[k]| \leq R[0]$). גרף זה מציג מקסימום ב- $k = 4$, ולכן אינו יכול להיות אוטו-קורלציה חוקית.

□ A Option (צר מדי): גרף זה דועך מהר יותר מ- $R_x[k]$. משמעות הדבר היא שהמוצא "לבן" יותר (פחות קורלציה) מהכניסה.

□ B,E Option (התשובה הנכונה): הגרף זהה או רחב יותר מ- $R_x[k]$.



איור 1: פתרון