



המחלקה להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

תאריך הבחינה: 11.02.2026

שעות הבחינה: 13:30-16:30

מבוא לאותות אקראיים

מועד א'

ד"ר דימה בחובסקי, מר טל פאר

תשפ"ו סמסטר א'

חומר עזר - דף נוסחאות אישי (עמוד אחד), מחשבון

הוראות מיוחדות:

- השאלון כולל שאלות ללא בחירה, סך הכל של 120 נקודות.
- סעיפים הם בעלי ניקוד זהה, אלא אם צוין אחרת.
- יש לציין באופן מלא וברור את שלבי הפתרון. תשובה ללא הסבר לא תתקבלנה.
- במקום בו נדרש חישוב מספרי, יש קודם לרשום את הנוסחא, ורק אח"כ להציב!
- יש לציין יחידות למספרים, ובמידה וקיימות!
- כל השרטוטים יהיו גדולים, ברורים, עם סימון צירים!
- אין חובה להגיע לערך מספרי של הפונקציה $Q(x)$, במידה ומופיעה בתשובה.

השאלון כולל 7 דפים (כולל דף זה)

בהצלחה !



1 זוג משתנים גאומיים (25 נק')

נתונים משתנים אקראיים גאומיים, $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(1, 2)$ (סימון $N(\mu, \sigma^2)$). ידוע, שמקדם קורלציה בין X_1, X_2 הוא $\rho_{X_1 X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. בנוסף,

$$Y_3 = X_1 + 2X_2$$

$$Y_4 = 3X_1 + 2X_2$$

מהי התפלגות המשותפת של $\begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}$?

נתונים וחשובים מקדימים נתון כי $X_1 \sim N(0, 1)$ ו- $X_2 \sim N(1, 2)$. מכאן:

$$\mu_1 = 0, \quad \sigma_1^2 = 1 \implies \sigma_1 = 1 \quad \square$$

$$\mu_2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 2 \implies \sigma_2 = \sqrt{2} \quad \square$$

מקדם המתאם נתון: $\rho_{X_1 X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. נחשב את השונות המשותפת (Covariance) בין משתני הכניסה:

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = \rho \sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 1$$

חישוב וקטור התוחלות (μ_Y) נשתמש בלינאריות התוחלת:

$$E[Y_3] = E[X_1] + 2E[X_2] = 0 + 2(1) = 2$$

$$E[Y_4] = 3E[X_1] + 2E[X_2] = 3(0) + 2(1) = 2$$

$$\Rightarrow \mu_Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

חישוב מטריצת השונות המשותפת (C_Y) המטריצה היא מהצורה:

$$C_Y = \begin{bmatrix} \text{Var}[Y_3] & \text{Cov}[Y_3, Y_4] \\ \text{Cov}[Y_4, Y_3] & \text{Var}[Y_4] \end{bmatrix}$$

חישוב שונות Y_3 :

$$\text{Var}[Y_3] = \text{Var}[X_1 + 2X_2]$$



$$\begin{aligned} &= \text{Var}[X_1] + 2^2 \text{Var}[X_2] + 2(1)(2) \text{Cov}[X_1, X_2] \\ &= 1 + 4(2) + 4(1) = 1 + 8 + 4 = 13 \end{aligned}$$

חישוב שונות Y_4 :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_4] &= \text{Var}[3X_1 + 2X_2] \\ &= 3^2 \text{Var}[X_1] + 2^2 \text{Var}[X_2] + 2(3)(2) \text{Cov}[X_1, X_2] \\ &= 9(1) + 4(2) + 12(1) = 9 + 8 + 12 = 29 \end{aligned}$$

חישוב השונות המשותפת $\text{Cov}[Y_3, Y_4]$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_3, Y_4] &= \text{Cov}[X_1 + 2X_2, 3X_1 + 2X_2] \\ &= 3\text{Var}[X_1] + 2\text{Cov}[X_1, X_2] + 6\text{Cov}[X_2, X_1] + 4\text{Var}[X_2] \\ &= 3(1) + 2(1) + 6(1) + 4(2) \\ &= 3 + 2 + 6 + 8 = 19 \end{aligned}$$

תשובה סופית ההתפלגות המשותפת היא גאוסית דו-ממדית עם הפרמטרים שחישבנו:

$$\begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 19 & 29 \end{bmatrix} \right)$$



התפלגות בדידה (40 נק')

נתונה מערכת תקשורת המשדרת הודעות באורך 2 ביטים. כדי לזהות שגיאות, המערכת משתמשת בפרוטוקול חזרה (Repetition Code): כל הודעה משודרת פעמיים ברצף (סך הכל 4 ביטים לשידור). בצד המקלט, מתבצעת בדיקת תקינות על ידי השוואת זוג הביטים הראשון (ההודעה המקורית) לזוג הביטים השני (החזרה):

□ אם הזוגות זהים, המערכת מניחה שהשדר תקין ומקבלת אותו.

□ אם הזוגות שונים, המערכת מזהה שיש טעות ודוחה את השדר.

לדוגמה: עבור המידע "00", המערכת תשדר "0000".

נתון כי הסתברות השגיאה לביט בודד היא p , והשגיאות בביטים השונים הן בלתי תלויות.

1. מהי הסתברות השגיאה בשדר, במערכת המשדרת 2 ביטים בלבד **ללא** מנגנון החזרה (כלומר, השדר נחשב שגוי אם לפחות ביט אחד הגיע משובש)?

2. מהי ההסתברות שהשדר הכפול (4 ביטים) יתקבל **באופן תקין לחלוטין**? (כלומר, המצב שבו כל 4 הביטים ששודרו נקלטו בצד השני ללא שום שגיאה).

3. (20 נק') מהי ההסתברות לשגיאה בלתי מזוהה במערכת עם מנגנון החזרה (4 ביטים)? (כלומר, המצב בו המקלט מקבל את השדר כ"תקין" כי הזוגות זהים, אך המידע שהתקבל שגוי ביחס למידע המקורי).

פתרון

נגדיר:

□ p : ההסתברות שביט יגיע שגוי (Error).

□ $1 - p$: ההסתברות שביט יגיע תקין (Correct).

סעיף: שידור ללא כפילות (2 ביטים) בשידור של 2 ביטים, שגיאה מוגדרת כמצב שבו לפחות ביט אחד שגוי. נחשב זאת באמצעות המאורע המשלים: המקרה שבו **אין** שגיאה כלל (שני הביטים תקינים). ההסתברות ששני הביטים תקינים:

$$P(\text{message correct}) = (1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2$$

הסתברות השגיאה היא המשלים ל-1:

$$\begin{aligned} P(\text{error}) &= 1 - P(\text{message correct}) = 1 - (1 - p)^2 \\ &= 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2 \end{aligned}$$



סעיף : שידור תקין לחלוטין (4 ביטים) כדי שהשדר יתקבל באופן מושלם, נדרש שכל 4 הביטים (2 המקוריים + 2 החזרות) יגיעו ללא שגיאה. מכיוון שהשגיאות בביטים בלתי תלויות:

$$P(\text{transmission perfect}) = (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^4$$

סעיף : שגיאה בלתי מזוהה עם כפילות (4 ביטים) נסמן את השדר כ- M_1M_2 , כאשר M_1 הוא הזוג הראשון ו- M_2 הוא החזרה. שגיאה בלתי מזוהה מתרחשת כאשר $M_1 = M_2$ (המקלט מקבל את השדר), אך הערך שונה מהערך המקורי. זה קורה כאשר בשני הזוגות מתרחשת **בדיוק אותה טעות**. נבחן את סוגי הטעויות האפשריים בבלוק של 2 ביטים:

□ **טעות בביט הראשון בלבד:** ההסתברות היא $p(1 - p)$.

□ **טעות בביט השני בלבד:** ההסתברות היא $(1 - p)p$.

□ **טעות בשני הביטים:** ההסתברות היא $p \cdot p = p^2$.

כדי שהטעות לא תזוהה, עליה להתרחש גם ב- M_1 וגם ב- M_2 :

$$1. \text{ טעות בביט הראשון בשניהם: } [p(1 - p)] \times [p(1 - p)] = p^2(1 - p)^2$$

$$2. \text{ טעות בביט השני בשניהם: } [(1 - p)p] \times [(1 - p)p] = p^2(1 - p)^2$$

$$3. \text{ טעות בשני הביטים בשניהם: } [p^2] \times [p^2] = p^4$$

נסכום את ההסתברויות:

$$P(\text{error undetected}) = 2 \cdot p^2(1 - p)^2 + p^4 = 2p^2(1 - p)^2 + p^4$$



תהליך AR מסדר שני (60 נקודות)

נתון תהליך אקראי בדיד $X[n]$ המקיים את משוואת ההפרשים הבאה (מודל (AR(2):

$$x[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + w[n]$$

כאשר $w[n]$ הוא רעש לבן גאוסני עם תוחלת אפס ושונות $\sigma_w^2 = 1$.

יש להניח מערכת יציבה.

יש לשים לב להנחיות נוספות לכל סעיף.

1. יש לחשב $R_{xw}[0]$.

2. יש לחשב $R_{xw}[k]$ עבור $k \geq 1$.

3. יש לחשב את מקדמי הקורלציה המנורמלים $\rho_x[0], \rho_x[1], \rho_x[2]$ הדרכה: יש לרשום משוואות Yule-Walker עבור $R_x[k]$ ע"י הכפלה ב $x[n-k]$ וחישוב תוחלת.

4. יש לחשב את ההספק הממוצע, $P_x = R_x[0]$. יש להשתמש בערכי $\rho_x[0], \rho_x[1], \rho_x[2]$ כפרמטרים.

5. מהי התפלגות משותפת של $x[n-1]$ ו- $x[n-2]$? יש להשתמש בתוצאות של סעיפים הקודמים כפרמטרים.

פתרון:

$$\begin{aligned} R_{xw}[k] &= E[x[n]w[n+k]] \\ &= a_1 E[x[n-1]w[n+k]] + a_2 E[x[n-2]w[n+k]] + E[w[n]w[n+k]] \\ &= a_1 R_{xw}[k+1] + a_2 R_{xw}[k+2] + R_w[k] \\ R_{xw}[0] &= E[x[n]w[n]] \\ &= a_1 E[x[n-1]w[n]] + a_2 E[x[n-2]w[n]] + E[w^2[n]] \\ &= a_1 R_{xw}[1] + a_2 R_{xw}[2] + R_w[0] \end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned} E[x[n-1]w[n]] &= E[x[n-1]] E[w[n]] \stackrel{0}{=} 0 \\ E[x[n-k]w[n]] &= E[x[n-k]] E[w[n]] = 0, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

בגלל שהאות בלתי תלוי בכניסה עתידית. לכן מתקיים

$$R_{xw}[0] = R_w[0] = \sigma_w^2 = 1$$



בדומה לחישוב בסעיף הקודם,

$$R_{\mathbf{xw}}[k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{w}[n+k]] = 0 \quad k \geq 1$$

$$E[\mathbf{x}[n-k]\mathbf{x}[n]] = a_1 E[\mathbf{x}[n-k]\mathbf{x}[n-1]] + a_2 E[\mathbf{x}[n-k]\mathbf{x}[n-2]] + E[\mathbf{x}[n-k]\mathbf{w}[n]]$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = a_1 R_{\mathbf{x}}[k-1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[k-2] + R_{\mathbf{xw}}[k]$$

$$R_{\mathbf{x}}[1] = a_1 R_{\mathbf{x}}[0] + a_2 R_{\mathbf{x}}[-1] + R_{\mathbf{xw}}[1]$$

$$= a_1 R_{\mathbf{x}}[0] + a_2 R_{\mathbf{x}}[1]$$

$$R_{\mathbf{x}}[2] = a_1 R_{\mathbf{x}}[1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[0] + R_{\mathbf{xw}}[2]$$

$$= a_1 R_{\mathbf{x}}[1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[0]$$

$$E[\mathbf{x}[k]] = 0$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]} = \frac{R_{\mathbf{x}}[k]}{R_{\mathbf{x}}[0]}$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[0] = 1$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[1] = a_1 \rho_{\mathbf{x}}[0] + a_2 \rho_{\mathbf{x}}[1] \Rightarrow \rho_{\mathbf{x}}[1] = \frac{a_1}{1 - a_2}$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[2] = a_1 \rho_{\mathbf{x}}[1] + a_2 \rho_{\mathbf{x}}[0] = \frac{a_1^2}{1 - a_2} + a_2$$

$$R_{\mathbf{x}}[0] = a_1 R_{\mathbf{x}}[-1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[-2] + R_{\mathbf{xw}}[0]$$

$$= a_1 R_{\mathbf{x}}[1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[2] + \sigma_{\mathbf{w}}^2$$

$$R_{\mathbf{x}}[0]\rho_{\mathbf{x}}[0] = a_1 R_{\mathbf{x}}[0]\rho_{\mathbf{x}}[1] + a_2 R_{\mathbf{x}}[0]\rho_{\mathbf{x}}[2] + \sigma_{\mathbf{w}}^2$$

$$R_{\mathbf{x}}[0] = \frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2}{1 - a_1 \rho_{\mathbf{x}}[1] - a_2 \rho_{\mathbf{x}}[2]}$$

התפלגות גאוסית דו-ממדית עם תוחלות $\mu = 0$ ומטריצה

$$C_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[0]\rho_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[0]\rho_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix}$$

לסיכום,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[n-1] \\ \mathbf{x}[n-2] \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{\mathbf{x}} \right)$$