מערכת LTI - זמן רציף

תכונות

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

$$\mathbf{y}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)h(s)ds$$

$$Y(F) = H(F)X(F),$$

$$Y(F) = \mathscr{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

* אות סטציונרי: תכונות "קבועות" בזמן
LTI: ליניארי וקבוע בזמן

* הערה: כל המערכות בקורס = יציבות וסיבתיות

עבור מערכת LTI
מספק שמקיים אחד, כדי לקיים את כולם

1. התהליך בכניסה הוא WSS.
2. התהליך במוצא הוא WSS.
3. כניסה ומוצא הם WSS במשותף.

מישור הזמן

נתון את כניסה $x(t)$ WSS
תוחלת של המוצא = ?

הצבה ע"פ הגדרה

$$\underbrace{E[\mathbf{y}(t)]}_{?} = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}(t-s)ds\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\, \underbrace{E[\mathbf{x}(t-s)]}_{\mu_x} ds$$

לא אקראי

סימון - μ_x תוחלת של $x(t)$

ניתן להחליף סדר קונבולוציה ותוחלת (שינוי סדר אינטגרציה)

$$= \mu_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = \mu_{\mathbf{x}} H(F=0)$$

$H(0)$ - הגבר DC של המערכת

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

קשרים בין כניסה למוצא

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$
$$C_{\mathbf{xy}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$

$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{yx}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_{\mathbf{xy}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = C_{\mathbf{xy}}(\tau) * h(-\tau)$$

$y(t) = h(t) * x(t)$

הוכחה:

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$

(1) הגדרה (2) הצבה של y מיוצג ע"י קונבולוציה

$$= E\left[\mathbf{x}(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}((t+\tau)-s)\,ds\right]$$

(3) החלפת סדר קונ' ותוחלת

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\underbrace{E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau-s)]}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)R_{\mathbf{x}}(\tau-s)ds = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$

(4) ע"פ הגדרה של R_x (5) אינטגרל קונ'

$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t+\tau)]$$

(1) הגדרה

$$= E\left[\left(\mathbf{x}(t) * h(t)\right)\mathbf{x}(t+\tau)\right]$$

(2) הצבה של y

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] \quad (1)$$

$$= E\Big[\big(x(t)*h(t)\big)\ x(t+\tau)\Big] \qquad (2)\ \text{הצבה של } y$$

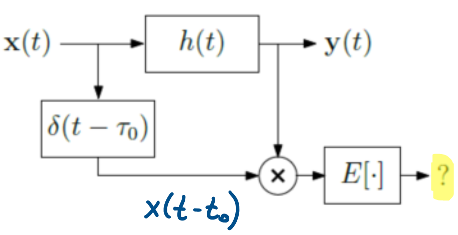
$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)ds\ x(t+\tau)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)E[x(t-s)x(t+\tau)]\,ds \qquad (3)\ \text{שינוי סדר } \int, E$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)R_x(s+\tau)ds \qquad s-(-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s-(-\tau))\,R_x(s)ds = R_x(\tau)*h(-\tau)$$

דוגמה: מטרה: חישוב תגובה להלם $\quad x(t)\sim N(0,1)$



רישום נוח יותר   תוצאה ראשונה   הצבה הגדרה

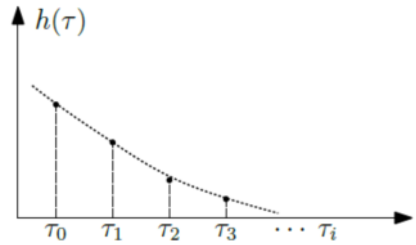
$$E[x(t-\tau_0)y(t)] = E[x(t)y(t+\tau_0)] = R_{xy}(\tau_0) = h(\tau_0)$$

מוצא של המערכת

תכונות של רעש   נתון על

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau)*h(\tau) = \delta(\tau)*h(\tau) = h(\tau)$$

$R_x(\tau) = \delta(\tau)\cdot\sigma^2$, $\sigma^2 = 1$ מתוך הגדרה של רעש לבן גאוסי



מישור התדר

$$H^*(F) = \mathscr{F}\{h(-\tau)\}$$

$$S_{xy}(F) = \mathscr{F}\{R_{xy}(\tau)\} = S_x(F)H(F)$$

$$S_{yx}(F) = S_x(F)H^*(F)$$

$$S_y(F) = S_x(F)H(F)H^*(F) = S_x(F)|H(F)|^2$$

תוחלת   WSS

דוגמה 9.3: נתון אות $x(t)$ עם פרמטרים $R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$, μ_x,

עובר דרך מערכת

$$|H(F)| = \begin{cases} \sqrt{1+4\pi^2F^2} & |F|<2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יש לחשב: $\mu_y, R_y(\tau), P_y$.

$$\mu_y = \mu_x H(0) = \mu_x \quad \rightarrow \quad \text{בהמשך לניתוח בתחילת הרצאה}$$

$$\underbrace{S_x(F) = \mathscr{F}\{R_x(\tau)\}}_{\text{הגדרה}} = \frac{2}{1+(2\pi F)^2} \quad \rightarrow \quad \text{הצבה}$$

$$S_y(F) = S_x(F)|H(F)|^2 = \begin{cases} 2 & |F|<2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{הצבה}$$

$$R_y(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{S_y(F)\} = 8\frac{\sin(4\pi\tau)}{4\pi\tau} = 8\,\mathrm{sinc}(4\pi\tau)$$

$$P_y = R_y(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(F)dF = \int_{-2}^{2} 2dF = 8$$

3 דרכים שונות לאותה תוצאה

הערה: חישוב ישיר של R_y במישור הזמן דורש פתרון של אינטגרל קונבולוציה לא טריוויאלי ⇐ נבחר פתרון במישור התדר

הספק ויחס אות לרעש

אות ורעש עוברים דרך
אותה מערכת $|H(F)|^2$

הספק בכניסה למערכת

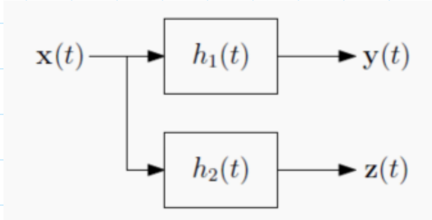
$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)\,dF$$

הספק במוצא המערכת

$$P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)\,|H(F)|^2\,dF$$

$$\mathrm{SNR_y} = \frac{\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S_s(F)\,|H(F)|^2\,dF}^{\text{אות}}}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(F)\,|H(F)|^2\,dF}_{\text{רעש}}}$$

קשר בין מוצא של מערכות שונות



$$R_{yz}(\tau) = R_x(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau)$$
$$S_{yz}(F) = S_x(F)H_1^*(F)H_2(F) = \mathscr{F}\{R_{yz}(\tau)\}$$

הוכחה: (קשר בזמן)

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)\mathbf{x}(t-\alpha)d\alpha$$
$$\mathbf{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta)\mathbf{x}(t-\beta)d\beta$$

תזכורת

$$\boxed{x(t) * h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)h_2(\beta)x(t-\alpha-\beta)d\alpha\,d\beta}$$

(1) הגדרה

(2) הצבה

(3) שינוי סדר E, $\int$

$$\begin{aligned}
R_{yz}(t,t+\tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{z}(t+\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)\mathbf{x}(t-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta)\mathbf{x}(t+\tau-\beta)d\beta\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)h_2(\beta)\underbrace{E[\mathbf{x}(t-\alpha)\mathbf{x}(t+\tau-\beta)]}_{R_x(\tau+\alpha-\beta)}d\alpha\,d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)h_2(\beta)R_x(\tau+\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta
\end{aligned}$$

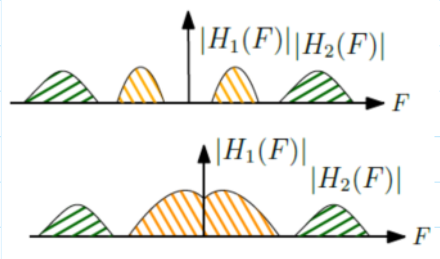
$$E[\underbrace{x(t-\alpha)}_{t_1}\underbrace{x(t-\beta+\tau)}_{t_2}] = \underbrace{R_x(\tau+\alpha-\beta)}_{t_2-t_1}$$

תובנות ←

$$S_{yz}(F) = S_x(F)\underbrace{H_1^*(F)H_2(F)}_{=0}$$

מערכות לא חופפות במישור התדר

* מערכות ממשיות ← ספקטרום סימטרי בתדר



$$\forall F\ H_1^*(F)H_2(F) = 0$$

← אורטוגונליים,

$$S_{yz}(F) = 0 \Rightarrow R_{yz}(\tau) = 0$$

← לפחות עבור אחת משני המערכות מתקיים $H(0) = 0$

האבר $x = 0$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y$$

לפחות אחד מאופס

$$\Rightarrow C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) = 0$$

← אם התהליך $\mathbf{x}(t)$ הוא גאוסי, הם y,z גם בלתי תלויים

(נדבר בהרחבה בהמשך)