Lecture8 - Prediction

Thursday, 26 December 2024 15:54

חיזוי ליניארי של אותות

$x[n]$ שהינו בעל מאפיינים הבאים:

- WSS
- בעלת תוחלת $\mu_x = 0$
- $R_x[k]$ ידוע

דוגמה:

* נתון מודל חיזוי $\hat{x}[n+1] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$

* פרמטרים $a_0, a_1 = ?$

* מדד הצלחה: כמה טוב החיזוי (ככל שהשגיאה ← שגיאה ריבועית

$$SE = E\left[\left(x[n+1] - \hat{x}[n+1] \right)^2 \right]$$

* מקדמי a_0, a_1 גורמים לשגיאה ריבועית (SE) לקבל ערך מינימלי.

שלבי פתרון: 1 הצבה של המודל

2 גזירה

3 מציאת ערכי הפרמטרים עבורם נגזרת = 0

1 $SE = E\left[\left(x[n+1] - a_0 x[n] - a_1 x[n-1] \right)^2 \right]$

2 $\frac{\partial}{\partial a_0} SE =$

a $E\left[2\left(x[n+1] - a_0 x[n] - a_1 x[n-1] \right)\underbrace{\left(-x[n] \right)}_{\text{נגזרת הפנימית}} \right]$

$$\boxed{\left[f(g(x)) \right]' = f'(g(x))\, g'(x)}$$

3 $\underbrace{\cancel{2}E\left[x[n] x[n+1] \right]}_{R_x[k=1]} = \cancel{2}a_0 \underbrace{E\left[x^2[n] \right]} + \cancel{2}a_1 \underbrace{E\left[x[n-1] x[n] \right]}$

$$\begin{cases} R_x[1] = a_0 R_x[0] + a_1 R_x[1] \\ R_x[2] = a_0 R_x[1] + a_1 R_x[0] \end{cases}$$

b נגזרת הפנימית $= -x[n-1]$

סיכום

משוואות Wiener-Hopf — קשר באופן כללי

$$R_x[k+1] = a_0 R_x[k] + a_1 R_x[k-1] + \ldots + a_N R_x[k-N] = \sum_{k=0}^{N} a_k R_x[k]$$

הצבה של ערכי k מתאימים

בדוגמה: $k=0,1$, $N=1$

$$k = 0 \rightarrow R_x[1] = a_0 R_x[0] + a_1 R_x[1] + \cdots + a_N R_x[N]$$
$$k = 1 \rightarrow R_x[2] = a_0 R_x[1] + a_1 R_x[0] + \cdots + a_N R_x[N-1]$$
$$\cdots$$
$$k = N \rightarrow R_x[N+1] = a_0 R_x[N] + a_1 R_x[N-1] + \cdots + a_N R_x[0]$$

תכונות: $E\left[x[n+1] - \hat{x}[n+1] \right] = 0$ שגיאה ממוצעת $= 0$

שגיאה ריבועית → $SE_{min} = E\left[\left(x[n+1] - \hat{x}[n+1] \right)^2 \right] = R_x[0] - \sum_{k=0}^{N} a_k R_x[k+1]$ שגיאת SE של החיזוי

כמו cov, מדד לעוצמת הקשר הליניארי

דוגמה: $\hat{x}[n] = a_k x[n-k]$ $a_k = ?$

$$SE = E\left[\left(x[n] - a_k x[n-k] \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} SE = -E\left[x[n] x[n-k] \right] + a_k E\left[x^2[n-k] \right] = 0$$

$$a_k = \frac{R_x[k]}{R_x[0]} = \rho_x[k]$$

↓

מקדם קורלציה

דוגמה: $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$, כאשר $\theta \sim U[0, 2\pi]$ ו-f_0 ידוע.

$\omega_0 = 2\pi f_0$ ידוע

לא ידוע

מודל החיזוי:

$$\hat{x}[n+1] = a x[n] + b x[n-1]$$

פתרון:

משוואת Wiener-Hopf

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x[1] \\ R_x[2] \end{bmatrix}$$

הצבה

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi f_0) \\ \cos(2\pi f_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_0) \\ \cos(4\pi f_0) \end{bmatrix}$$

פתרון של זוג משוואות עם 2 נעלמים

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(2\pi f_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

סיכום: משוואת הפרשים לחיזוי

$$\hat{x}[n+1] = 2\cos(2\pi f_0) x[n] + (-1) x[n-1]$$

מתנד ספרתי

שגיאת חיזוי

$$mse_{min} = R_x[0] - a R_x[1] - b R_x[2]$$

הצבה

$$= 1 - 2\cos(2\pi f_0)\cos(2\pi f_0) + \cos(4\pi f_0)$$

$$= \underbrace{1 - 2\cos^2(2\pi f_0)}_{-\cos(4\pi f_0)} + \cos(4\pi f_0) = 0$$

(8.2) נתון תהליך $x[n]$, בעל תכונות הבאות: סטציאונרי, גאוסי,

$$E\big[x[n]\big] = 0$$

$$R_x[k] = 4\exp\big(-|k|\big)$$

$$y[n] = x[n] + 2x[n-2]$$

מעוניינים לעשות חיזוי לינארי של $x[n]$ מתוך $y[n]$. עבור חיזוי מהצורה

$$\hat{x}[n+1] = a_0 y[n] + a_1 y[n-1]$$

? ?

פתרון:

הגדרה של שגיאה ריבועית

$$mse = E\Big[\big(x[n+1] - a_0 y[n] - a_1 y[n-1]\big)^2\Big]$$

נגזרת

$$\frac{\partial}{\partial a_0} mse = 2E\Big[\big(x[n+1] - a_0 y[n] - a_1 y[n-1]\big)\cdot(-y[n])\Big]$$

סיכום

$$\Rightarrow R_{xy}[-1] = a_0 R_y[0] + a_1 R_y[1]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} mse = 2E\Big[\big(x[n+1] - a_0 y[n] - a_1 y[n-1]\big)\cdot(-y[n-1])\Big]$$

$$\Rightarrow R_{xy}[-2] = a_0 R_y[1] + a_1 R_y[0]$$

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[1] \\ R_y[1] & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}[-1] \\ R_{xy}[-2] \end{bmatrix}$$

$n_1 \quad n_1 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_2 - n_1 =$

$$\boxed{k = n_2 - n_1}$$

1) $R_x[k] = R_x[-k]$

2) $R_{xy}[k] \neq R_{xy}[-k]$

$R_{xy}[k] = ?$

$R_y[k] = ?$

הגדרה

$$R_{xy}[k] = E\big[x[n] y[n+k]\big]$$

הצבה

$$= E\Big[x[n]\big(x[n+k] + 2x[n-2+k]\big)\Big]$$

כינוס איברים

$$= \underbrace{E\big[x[n]x[n+k]\big]}_{R_x[k]} + 2E\big[x[n]x[n-2+k]\big]$$

"משל"

$$= R_x[k] + R_x[k-2]$$

הגדרה

$$R_y[k] = E\big[y[n]y[n+k]\big]$$

$n_2 - n_1 = n + k - (n-2) = k+2$

$n_2 - n_1 = n - 2 + k - n = k-2$

הצבה

$$= E\Big[\big(x[n] + 2x[n-2]\big)\cdot\big(x[n+k] + 2x[n-2+k]\big)\Big] \rightarrow 4 \text{ איברים}$$

שוני היחיד הוא במקדמים בתוך האיברים וקבוע ה מכפלה בגלל 2

כינוס ו"משל"

$$= \underbrace{E\big[x[n]x[n+k]\big]}_{R_x[k]} + 2R_x[k-2] + 2R_x[k+2] + 4R_x[k]$$

$$= 5R_x[k] + 2R_x[k-2] + 2R_x[k+2]$$

דוגמה: אות $x[n] = a x[n-1] + w[n]$

נתונים של האות: $w[n] \sim N(0, \sigma_w^2 = 1)$ הוא רעש לבן גאוסי, $|a| < 1$, $R_x[k] = \sigma_w^2 \dfrac{a^{|k|}}{1-a^2}$.

מודל החיזוי: $\hat{x}[n+1] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$

? ?

פתרון:

משוואת Wiener Hopf

$[R_x[0] \quad R_x[1]] \; [a] \quad [R_x[1]]$

$1-a^2$

מודל החזוי: $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a_0\mathbf{x}[n] + a_1\mathbf{x}[n-1]$

מציבים מקבל $a_0 = a$, $a_1 = 0$

פתרון: משוואות Wiener Hopf

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[2] \end{bmatrix}$$

הצבה

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{a}{1-a^2} \\ \frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{1-a^2} \\ \frac{a^2}{1-a^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

פתרון של מערכת משוואות

נוסחא

$$se = R_{\mathbf{x}}[0] - a_0R_{\mathbf{x}}[1] - a_1R_{\mathbf{x}}[2]$$

הצבה

$$= \frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2}{1-a^2} - a\frac{\sigma_{\mathbf{w}}^2 a}{1-a^2} = \sigma_{\mathbf{w}}^2$$