צפיפות הספק ספקטראלית

התמרות פוריה

מג"ה: מיוצג תדר של אות אקראי

התמרה: זמן רציף

$$X(\underset{[Hz]}{F}) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt,$$

זמן בדיד DTFT

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}$$

תדר מנורמל $-\frac{1}{2} < f \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq f < 1$

בע"ב: התמרת פוריה של אות אקראי.
← יש בע"ב של פרשנות
בכלל עם הבעיה
עבור כל קטע של האות
נקבל התמרה אחרת

משפט Wiener–Khinchin–Einstein

$$S_x(F) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$$S_x(f) = \text{DTFT}\{\underbrace{R_x[k]}\}$$

בונה ACF של אות WSS

צפיפות הספק ספקטרלית
Power spectral density
PSD
$\left[\frac{W}{Hz}\right]$, $\left[\frac{V^2}{Hz}\right]$

עבור אות לא אקראי:

$$S_x(F) = |X(F)|^2$$

תכונות

זמן בדיד		זמן רציף
$S_x(f) = S_x(-f)$	סימטרי	$S_x(F) = S_x(-F)$
$S_x(f) \geqslant 0, \ \forall f$	חיובי	$S_x(F) \geqslant 0, \ \forall F$
$S_x(f) \in \mathbb{R}$	ממשי	$S_x(F) \in \mathbb{R}$
$S_x(f) = S_x(f+1)$	מחזוריות של DTFT	

הספק

$$P_x = E\left[x^2(t)\right] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)dF$$

$$P_x = E\left[x^2[n]\right] = R_x[0] = \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f)df}$$

שטח מתחת לגרף של PSD

נתון אות מאופנן DSB מהצורה

דוגמה

$$z(t) = x(t)\sin(2\pi F_0 t + \theta),$$

* כאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$
* $x(t)$ הוא סטציונארי (WSS) עם $R_x(\tau)$ ידועה.

בלתי תלויים

$E[z(t)]$

$R_z(t, t+\tau)$

P_z

$S_z(F)$

פתרון:

ראו הרצאה לפני שבועיים 0

1) $E[z(t)] = E[x(t)]\,E[\sin(2\pi F_0 t + \theta)] = 0$

הגדרה

2) $R_z(t, t+\tau) = E[z(t)z(t+\tau)]$

הצבה + הפרדה בין x ל θ בגלל אי תלות

$$= E[x(t)x(t+\tau)]\,E\left[\sin(2\pi F_0 t + \theta)\cdot\sin(2\pi F_0(t+\tau)+\theta)\right]$$

עבור X,Y בלתי תלויים בלבד

$$\boxed{E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]\,E[g_2(Y)]}$$

$$\boxed{\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)}$$

זהות טריגונומטרית

$$= R_x(\tau)E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0\tau) - \cancel{\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0[2t+\tau]+2\theta)}\right]$$

סיכום

$$= \frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(2\pi F_0\tau)$$

$$= R_z(\tau)$$

בלתי תלוי בזמן

מסקנה (1,2) ⇐ האות z(t) הוא WSS

$$P_z = R_z(0) = \frac{R_x(0)}{2} = \frac{P_x}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(F)dF$$

$$S_z(F) = \frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{R_x(\tau)\left(\frac{e^{j2\pi F_0\tau}}{2} + \frac{e^{-j2\pi F_0\tau}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}[S_x(F+F_0) + S_x(F-F_0)]$$

מסקנות

$(1,2) \Leftarrow$ אמ $z(t)$ הוא WSS

$$P_z = R_z(0) = \frac{R_x(0)}{2} = \frac{P_x}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(F)dF$$

$$S_z(F) = \frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{R_x(\tau)\left(\frac{e^{j2\pi F_0\tau}}{2} + \frac{e^{-j2\pi F_0\tau}}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left[S_x(F+F_0) + S_x(F-F_0)\right]$$

רעש לבן גאוסי

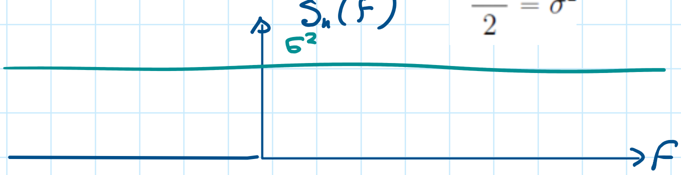
$E[\mathbf{n}(t)] = 0$	תוחלת	$E[\mathbf{n}[n]] = 0$
$R_n(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$	דגימות בלתי תלויות	$R_n[k] = \sigma^2\delta[k]$

דוגמה: רעש תרמי

$$\sigma^2 \cong 1.7 \times 10^{-20} R\left[\frac{V^2}{Hz}\right]$$

נהיה משמעותי עבור רוחב גדול

$$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

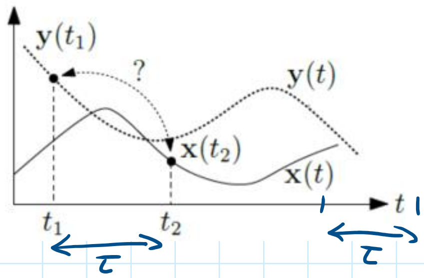


$$S_n(F) = \sigma^2 \quad \forall F$$
$$S_n(f) = \sigma^2 \quad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$$

קשר בין תהליכים

cross-correlation

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)]$$
$$R_{xy}[n_1,n_2] = E[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{y}[n_2]]$$



cross-covariance

$$C_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_1,t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]\,E[\mathbf{y}(t_2)]$$
$$C_{xy}[n_1,n_2] = R_{xy}[n_1,n_2] - E[\mathbf{x}[n_1]]\,E[\mathbf{y}[n_2]]$$

אבחנים:

* אורתוגונליים

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 0 \quad \forall t_1,t_2$$
$$R_{xy}[n_1,n_2] = 0 \quad \forall n_1,n_2.$$

* חסרי קורלציה

$$C_{xy}(t_1,t_2) = 0 \quad \forall t_1,t_2$$
$$C_{xy}[n_1,n_2] = 0 \quad \forall n_1,n_2$$

* בלתי תלויים

$$R_{xy}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]\,E[\mathbf{y}(t_2)]$$
$$R_{xy}[n_1,n_2] = E[\mathbf{x}[n_1]]\,E[\mathbf{y}[n_2]]$$

תהליכים סטציונריים במשותף

(joint-WSS) משמעות: הקשר בין האמות נשאר זהה גם אחרי זמן

אם ורק אם

- ☒ $\mathbf{x}(t)$ סטציאונרי (WSS)
- ☒ $\mathbf{y}(t)$ סטציאונרי (WSS)
- * $R_{xy}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$

$$R_{xy}[k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]]$$

תכונות:

סימטריה

$$\tau = t_2 - t_1$$
$$R_{xy}(t_2 - t_1) \neq R_{xy}(t_1 - t_2)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \qquad R_{xy}[k] = R_{yx}[-k]$$
$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \qquad R_{xy}[-k] = R_{yx}[k]$$

אמת אורתוגונליים

$$R_{xy}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \qquad R_{xy}[k] = 0 \quad \forall k \neq 0$$

דוגמה:

$\phi_1, \phi_2 \sim U[-\pi,\pi]$ ובלתי תלוים.

$$\mathbf{x}[n] = \cos(\omega_0 n + \phi_1)$$
$$\mathbf{y}[n] = \cos(\omega_0 n + \phi_2)$$

גם $\mathbf{x}[n]$ וגם $\mathbf{y}[n]$ הם WSS (הרצאה קודמת)

מקדם קורלציה:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}}$$

הגדרה הצבה

$$E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]] = E\Big[\cos(\omega_0 n + \phi_1)\cos(\omega_0(n+k) + \phi_2)\Big]$$

עבור X,Y בלתי תלויים

הגדרה הצבה

$$E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]] = E\Big[\cos(\omega_0 n + \phi_1)\cos(\omega_0(n+k)+\phi_2)\Big]$$

הפרדה של תוחלות של משתנים בלתי תלויים

$$= E[\cos(\omega_0 n + \cancel{\phi_1})]\, E\Big[\cancel{\cos(\omega_0(n+k)+\phi_2)}\Big]$$

$$= 0 = R_{\mathrm{xy}}[k] \quad \forall k$$

אותות אורתוגונליים

joint-wss

בלתי תלוי בזמן n!

עבור X,Y בלתי תלויים בלבד

$$\boxed{E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]\,E[g_2(Y)]}$$

תכונה $C_x(0) = Var[x(t)]$

תכונות התדר

$$S_{\mathrm{xy}}(F) = \mathscr{F}\{R_{\mathrm{xy}}(\tau)\}$$

$$S_{\mathrm{xy}}(F) = S_{\mathrm{yx}}(-F) = S^*_{\mathrm{xy}}(-F)$$
$$S_{\mathrm{xy}}(-F) = S^*_{\mathrm{xy}}(F)$$
$$S_{\mathrm{yx}}(F) = S^*_{\mathrm{xy}}(F)$$

דוגמה:

$\mathbf{x}(t)$, סטציונארי (WSS), עם תוחלת $E[\mathbf{x}(t)] = \mu_{\mathrm{x}} = 0$ ובעל $R_{\mathrm{x}}(\tau)$ ידוע.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$$

מטרה: ניתוח קשרים בין $x(t)$ ל $y(t)$.

$$C_{\mathrm{x}}(\tau), R_{\mathrm{y}}(\tau), C_{\mathrm{y}}(\tau), S_{\mathrm{y}}(F), R_{\mathrm{xy}}(t,t+\tau), C_{\mathrm{xy}}(\tau), R_{\mathrm{yx}}(\tau), C_{\mathrm{yx}}(\tau),$$
$$R_{\mathrm{yx}}(-\tau) = R_{\mathrm{xy}}(\tau), S_{\mathrm{xy}}(F), S_{\mathrm{yx}}(F), \gamma_{\mathrm{xy}}(F), \rho_{\mathrm{xy}}(\tau)$$

coherence

מקדם קורלציה במישור התדר בין האותות

$$\gamma_{\mathrm{xy}}(F) = \frac{S_{\mathrm{xy}}(F)}{\sqrt{S_{\mathrm{x}}(F)S_{\mathrm{y}}(F)}}$$

$$|\gamma_{\mathrm{xy}}(F)| \leqslant 1$$

פתרון:

$$C_{\mathrm{x}}(\tau) = R_{\mathrm{x}}(\tau) - \cancel{\mu_{\mathrm{x}}^2} = R_{\mathrm{x}}(\tau)$$

$\mu_y = \mu_x = 0$

$$R_{\mathrm{y}}(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$

הצבה

$$= E[\mathbf{x}(t-t_0)\mathbf{x}(t-t_0+\tau)]$$
$$= R_{\mathrm{x}}(\tau) = C_{\mathrm{y}}(\tau)$$

הפרש זמנים τ

$$R_{\mathrm{xy}}(t,t+\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$

הצבה

$$= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau-t_0)] = R_{\mathrm{x}}(t, t+\tau-t_0)$$

$t_1 \quad t_2$

joint WSS $\Leftarrow$

$$= R_{\mathrm{x}}(\tau - t_0) = R_{\mathrm{xy}}(\tau)$$

הפרש זמנים

$$S_{\mathrm{y}}(F) = \mathscr{F}\{R_{\mathrm{y}}(\tau)\} = \mathscr{F}\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$$
$$= S_{\mathrm{x}}(F)$$

$$C_{\mathrm{xy}}(\tau) = R_{\mathrm{xy}}(\tau) - \cancel{\mu_{\mathrm{x}}^2} = R_{\mathrm{xy}}(\tau) = R_{\mathrm{x}}(\tau - t_0)$$

$$R_{\mathrm{yx}}(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t+\tau)]$$
$$= E[\mathbf{x}(t-t_0)\mathbf{x}(t+\tau)]$$
$$= R_{\mathrm{x}}(\tau + t_0) = C_{\mathrm{yx}}(\tau)$$

$$S_{\mathrm{xy}}(F) = \mathscr{F}\{R_{\mathrm{x}}(\tau - t_0)\}$$
$$= S_{\mathrm{x}}(F)e^{-j2\pi F t_0}$$

$$R_{\mathrm{xy}}(-\tau) = R_{\mathrm{x}}(-\tau - t_0) = R_{\mathrm{x}}(\tau + t_0) = R_{\mathrm{yx}}(\tau)$$
$$R_{\mathrm{yx}}(-\tau) = R_{\mathrm{x}}(t_0 - \tau) = R_{\mathrm{x}}(-(t_0 - \tau)) = R_{\mathrm{x}}(\tau - t_0) = R_{\mathrm{xy}}(\tau)$$

$$S_{\mathrm{yx}}(F) = S_{\mathrm{x}}(F)e^{j2\pi F t_0} = S_{\mathrm{xy}}(-F) = S_{xy}^*(F)$$

$$\gamma_{\mathrm{xy}}(F) = \frac{S_{\mathrm{xy}}(F)}{\sqrt{S_{\mathrm{x}}(F)S_{\mathrm{y}}(F)}} = \frac{S_{\mathrm{x}}(F)e^{-j2\pi F t_0}}{\sqrt{S_{\mathrm{x}}(F)^2}}$$
$$= \mathrm{sign}(S_{\mathrm{x}}(F))e^{-j2\pi F t_0} \Rightarrow |\gamma_{\mathrm{xy}}(F)| = 1 \quad \forall S_{\mathrm{x}}(F) \neq 0$$

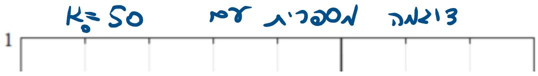
הצבה

$$\rho_{\mathrm{xy}}(\tau) = \frac{C_{\mathrm{xy}}(\tau)}{\sqrt{C_{\mathrm{x}}(0)C_{\mathrm{y}}(0)}} = \frac{R_{\mathrm{xy}}(\tau)}{R_{\mathrm{x}}(0)} = \frac{R_{\mathrm{x}}(\tau - t_0)}{R_{\mathrm{x}}(0)}$$

□ חשב $R_{\mathrm{xy}}[k], \rho_{\mathrm{xy}}[k]$ כאשר $\mathbf{x}[n]$ הוא רעש לבן גאוסי בזמן בדיד, עם שונות σ^2.

חישוב של $R_{xy}[k]$ עבור רעש

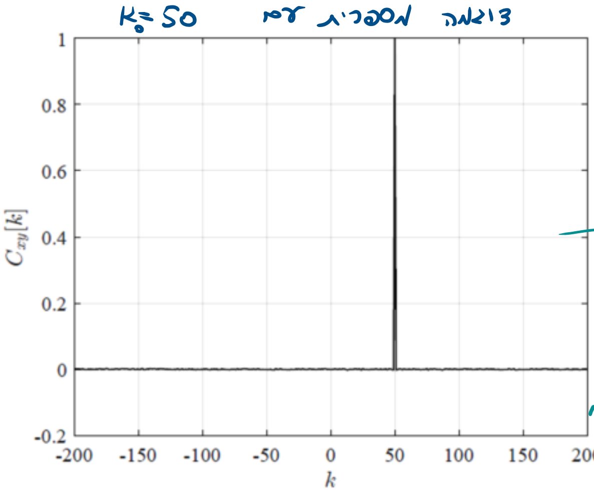
דוגמה מספרית עם $k_0 = 50$



עבור רעש לבן $R_{\mathrm{x}}[k] = \sigma^2\delta[k]$

$$R_{\mathrm{xy}}[k] = R_{\mathrm{x}}[k - k_0] = \sigma^2\delta[k - k_0]$$

דוגמה מספרית עם $k_0=50$



$$R_{\mathbf{xy}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k-k_0] = \sigma^2\delta[k-k_0]$$

$$\rho_{\mathbf{xy}}[k] = \delta[k-k_0]$$

מתוך חישוב של cross. correlation ניתן לזהות הפרש זמן בין אותות מוזזים אחד לפני השני

בסיס לפקודת Matlab

https://www.mathworks.com/help/signal/ref/finddelay.html