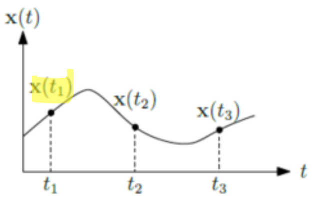
Lecture6 - Signals

Thursday, 12 December 2024 16:01

הקדמה לאותות אקראיים

- מהי התפלגות של $x(t_1)$?
- האם התפלגות של $x(t_1)$ שונה מהתפלגות $x(t_2)$ ושל $x(t_3)$?
- מהי משמעות של תוחלת ושונות של $x(t)$?
- האם ניתן לחזות ערך של $x(t_3)$ מתוך $x(t_2)$?
- איך מחשבים הספק של $x(t)$?



איור 5.2: דוגמה לתהליך אקראי.

באופן כללי, כל הערכם להיות תלויים בזמן

CDF

$$F_{\mathrm{x}}(x;t) = \Pr\big(\mathrm{x}(t) \leqslant x\big)$$
$$F_{\mathrm{x}}(x;n) = \Pr\big(\mathrm{x}[n] \leqslant x\big).$$

PDF

$$f_{\mathrm{x}}(x;t) = \frac{\partial}{\partial x}F_{\mathrm{x}}(x;t)$$
$$p_{\mathrm{x}}[x_k;n] = \Pr\big[\mathrm{x}[n] = x_k\big]$$

תוחלת

$$E[\mathrm{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{x}}(x;t)dx = \mu_{\mathrm{x}}(t)$$
$$E\Big[\mathrm{x}[n]\Big] = \sum_k x_k p_{\mathrm{x}}[x_k;n] = \mu_{\mathrm{x}}[n]$$

שונות

$$\mathrm{Var}[\mathrm{x}(t)] = E\left[\mathrm{x}^2(t)\right] - E^2\left[\mathrm{x}(t)\right] = \sigma_{\mathrm{x}}(t)$$
$$\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]] = E\left[\mathrm{x}^2[n]\right] - E^2\left[\mathrm{x}[n]\right] = \sigma_{\mathrm{x}}[n]$$

סיווג בסיסי

זמן (תכונה 6.1): בדיד או רציף.

ערך (תכונה 6.2): בדיד או רציף.

ערך בודד

ערך בודד (תכונה 6.3): ערך בודד של תהליך אקראי היא משתנה אקראי.

זוג ערכים

זוג ערכים של תהליך אקראי זה זוג משתנים אקראיים.

מאפייני אמת

$E[XY]$, $\mathrm{Cov}[X,Y]$ מקבלה עבור $X = \mathrm{x}(t_1)$ ו- $Y = \mathrm{x}(t_2)$

Auto-correlation

האות עם עצמו

הגדרה: $R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = E\left[\mathrm{x}(t_1)\mathrm{x}(t_2)\right]$

תכונות: $R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathrm{x}}(t_2,t_1)$ — סימטריה בזמן

$t_1 = t_2 = t$ — $R_{\mathrm{x}}(t,t) = E\left[\mathrm{x}^2(t)\right]$

עבור $\mathrm{x}(t_1), \mathrm{x}(t_2)$ בלתי תלויים מתקיים

$$R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = E[\mathrm{x}(t_1)]E[\mathrm{x}(t_2)]$$

אבחנים: אורתוגונליות

$$R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2$$

Auto-covariance

הגדרה:

$$C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = E\Big[\{\mathrm{x}(t_1) - E[\mathrm{x}(t_1)]\}\{\mathrm{x}(t_2) - E[\mathrm{x}(t_2)]\}\Big]$$
$$= E[\mathrm{x}(t_1)\mathrm{x}(t_2)] - E[\mathrm{x}(t_1)]\,E[\mathrm{x}(t_2)]$$

תכונות:

$$C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) - E[\mathrm{x}(t_1)]E[\mathrm{x}(t_2)]$$

$C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = C_{\mathrm{x}}(t_2,t_1)$ — סימטריה בזמן

$C_{\mathrm{x}}(t,t) = \mathrm{Var}[\mathrm{x}(t)]$ — $t_1 = t_2 = t$

$C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2$ — חסרי קורלציה

$E[\mathrm{x}(t_2)] = 0$ או $E[\mathrm{x}(t_1)] = 0$ $\Rightarrow$ $C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2)$

מקדם קורלציה

$$\rho_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathrm{x}}(t_1,t_1)C_{\mathrm{x}}(t_2,t_2)}} = \frac{C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}[\mathrm{x}(t_1)]\,\mathrm{Var}[\mathrm{x}(t_2)]}}$$

דוגמה: $\mathrm{x}(t) = A\cos(2\pi t)$,

$$? = E\left[\mathrm{x}(t)\right], \mathrm{Var}\left[\mathrm{x}(t)\right], R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2), C_{\mathrm{x}}(t_1,t_2), \rho_{\mathrm{x}}(t_1,t_2).$$

* $x(t)$ - אמפליטודה אקראית, נקבעת פעם אחת

* שים, $E[A]$, $E[A^2]$ ידועים

פתרון

$E[AX] = aE[X]$ — קבוע

* $E\left[\mathrm{x}(t)\right] = E[A]\cos(2\pi t)$

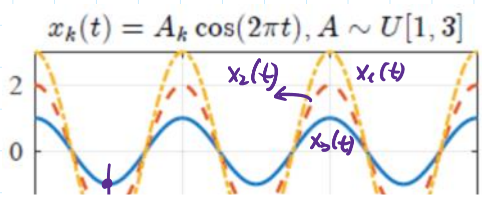
ערך בזמן (t_0) t ← קבוע => ניתן להוציא מחוץ לתוחלת

לשים לב: תוצאה תלויה בזמן

* $$\mathrm{Var}[\mathrm{x}(t)] = E\left[\mathrm{x}^2(t)\right] - E^2\left[\mathrm{x}(t)\right]$$
$$= E[A^2]\cos^2(2\pi t) - E^2[A]\cos^2(2\pi t)$$
$$= \Big(E[A^2] - E^2[A]\Big)\cos^2(2\pi t) = \mathrm{Var}[A]\cos^2(2\pi t)$$

* $$R_{\mathrm{x}}(t_1,t_2) = E\left[\mathrm{x}(t_1)\mathrm{x}(t_2)\right]$$
$$= E\left[A\cos(2\pi t_1)A\cos(2\pi t_2)\right]$$
$$= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$

אותו דבר



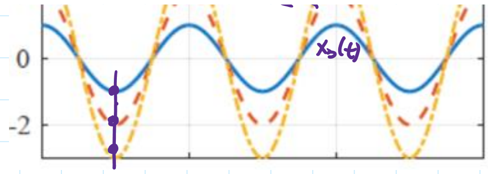
אותו ביטוי כמו

$$= E\left[A\cos(2\pi t_1)A\cos(2\pi t_2)\right]$$
$$= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$

$$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$
$$= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) - E[A]\cos(2\pi t_1)E[A]\cos(2\pi t_2)$$
$$= \left(E[A^2] - E^2[A]\right)\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$
$$= \mathrm{Var}[A]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$

$$\rightarrow C_{\mathbf{x}}(t,t) = \mathrm{Var}[\mathbf{x}(t)]$$

*



תוחלת = ממוצע של ensemble "הגרלת" של x(t)

$$\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}} = \frac{\mathrm{Var}[A]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}[A]\cos^2(2\pi t_1)\mathrm{Var}[A]\cos^2(2\pi t_2)}}$$
$$= \mathrm{sgn}\left[\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)\right] = \pm 1$$

$$E\{g(x)\} = \int g(x) f_x(x)dx$$

דוגמא:

$$\mathbf{x}(t) = \cos(2\pi t + \theta)$$
$$\theta \sim U[-\pi,\pi]$$

$$? = E[\mathbf{x}(t)], \mathrm{Var}[\mathbf{x}(t)], R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), \rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$$

$$E[\mathbf{x}(t)] = E\left[\cos(2\pi t+\theta)\right]$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(2\pi t+\theta)}_{g(\theta)} f_\theta(\theta)d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t+\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

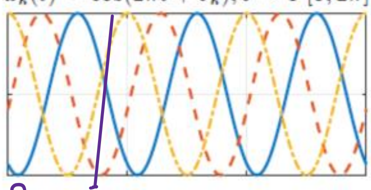
קבוע בזמן

זמן לא אקראי ולא משתנה באינטגרציה

התפלגות אחידה

$$a=-\pi \quad b=\pi \qquad f_\theta(x) = \frac{1}{b-a} \quad a\le x\le b$$

$$x_k(t) = \cos(2\pi t + \theta_k), \theta \sim U[0,2\pi]$$



יש כל קומבינציה אפשרית של הפאזה t
לרבע ערכים משתנים בזמן

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)]$$
$$= E\left[\cos(2\pi t_1+\theta)\cos(2\pi t_2+\theta)\right] \leftarrow \cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$
$$= \frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi[t_1-t_2])\right] + \underbrace{\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi[t_1+t_2]+2\theta)\right]}_{=0}$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi[t_1-t_2]) = C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$$

חישוב דומה לחישוב תוחלת לעיל

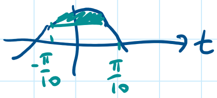
תלוי בהפרש זמנים בלבד

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}(t)] = C_{\mathbf{x}}(t,t) = \frac{1}{2}$$

קבוע בזמן

$$\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}}$$
$$= \cos(2\pi[t_1-t_2])$$

* הערה: תוחלת לא תמיד מאפסת - אמד המבחנים $a,b=\pm\frac{\pi}{10}$ ותוצאה שונה מאפס



תהליכים סטציונריים

מטרה: תת-סיווג של תהליכים אקראיים המשמש כמודל למגוון אותות בתחום הנדסת חשמל.
מדובר באותות שתכונות הסטטיסטיות שלהן לא משתנות בזמן.

$$F_{\mathbf{x}}(x;t) = F_{\mathbf{x}}(x;t+c) = F_{\mathbf{x}}(x)$$
$$f_{\mathbf{x}}(x;t) = f_{\mathbf{x}}(x;t+c) = f_{\mathbf{x}}(x)$$

ערך בודד
קבועים בזמן

(WSS) wide sense stationary זוג ערכים בלבד בזמן

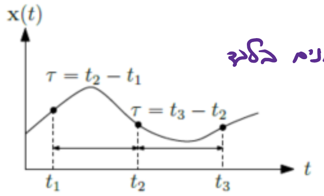
בדיקה, האם WSS?

צריך להתקיים גם 1) וגם 2)

אם ורק אם ⟺

1) תוחלת בלתי תלויה בזמן

$$E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(0)] = \mu_{\mathbf{x}} = \mathrm{const}$$
$$E[\mathbf{x}[n]] = E[\mathbf{x}[0]] = \mu_{\mathbf{x}} = \mathrm{const}$$



זוג ערכים
תלויים בהפרש זמנים בלבד
$\tau = t_2 - t_1$

2) אוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד

$$R_{\mathbf{x}}(t,t+\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$
$$R_{\mathbf{x}}[n,n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

דרכים שקולות

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2-t_1|),$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = R_{\mathbf{x}}(k = |n_2-n_1|),$$

דוגמא: האם מדוגמא האחרונה הוא WSS

דוגמה 6.5: רמת DC אקראית, $\mathbf{x}[n] = A$, כאשר $A \sim N(0,1)$ הוא משתנה אקראי גאוסי.
האם מדובר בתהליך WSS?

פתרון:

$$E[\mathbf{x}[n]] = E[A] = 0$$
$$R_{\mathbf{x}}[n,n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right] = E\left[A^2\right] = 1$$

הדרישה היא שבזמן n לא מופיע

$$E[x[n]] = E[A] = 0$$

$$R_x[n,n+k] = E[x[n]x[n+k]] = E[A^2] = 1 \leftarrow$$ הדרישה היא שבמקום n לא מופיע בביטוי המתקבל

$R_x[k]=1$

שתי הערכים המתקבלים בלתי תלויים בזמן.

תכונות תהליכי WSS

* סימטריה

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau)$$
$$C_x(-\tau) = C_x(\tau)$$

* שונות

$$\mathrm{Var}[x(t)] = C_x(t,t) = C_x(0) = \sigma_x^2$$
$$\mathrm{Var}[x[n]] = C_x[n,n] = C_x[0] = \sigma_x^2$$

* ערך מקסימלי

$$R_x(0) \geqslant |R_x(\tau)|$$
$$R_x[0] \geqslant |R_x[k]|$$

* הספק באות

$$P_x = R_x(0) = E\left[x(t)^2\right] = E\left[x(0)^2\right]$$
$$P_x = R_x[0] = E\left[x[n]^2\right] = E\left[x[0]^2\right]$$

* מקדם קורלציה

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{C_x(0)}$$
$$\rho_x[k] = \frac{C_x[k]}{C_x[0]}$$

$$R_x[k] = \begin{cases} P_x & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} = P_x\delta[k]$$

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

רעש לבן גאוסי

הגדרה: $x[n] \sim N(0,\sigma^2)$,

$$E[x[n]] = 0$$
$$\mathrm{Var}[x[n]] = \sigma^2$$
$$R_x[n_1,n_2] = \sigma^2\delta[n_1-n_2] = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases}$$
$$= C_x[n_1,n_2] = C_x[k]$$

← כל הדגימות חסרי קורלציה ובלתי תלויים

דוגמה: נתון w[n] רעש לבן גאוסי

$\Downarrow$

$w[n] \sim N(0,\sigma^2)$

$R_w[k] = \sigma^2\delta[k]$

באופן אוטומטי.

$$x[n] = \tfrac{1}{2}w[n] + \tfrac{1}{2}w[n-1]$$

□ האם $x[n]$ הוא WSS?

□ יש לחשב $\rho_x[k]$.

1) $$E[x[n]] = \frac{1}{2}E[w[n]] + E\left[\frac{1}{2}w[n-1]\right] = 0$$

2) $$R_x[n,n+k] = R_x[k] \quad ① \rightarrow$$
$$R_x[n_1,n_2] = R_x(k = |n_2 - n_1|)$$

בגלל תוחלת 0 הגדרה

$$C_x[n,n+k] = R_x[n,n+k] = E[x[n]x[n+k]]$$

הצבה → $$= \frac{1}{4}E\left[(w[n]+w[n-1])(w[n+k]+w[n+k-1])\right]$$

פתיחת סוגריים → $$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{E[w[n]w[n+k]]}_{R_w[k]} + \underbrace{E[w[n]w[n+k-1]]}_{R_w[k-1]}$$
$$+ \underbrace{E[w[n-1]w[n+k]]}_{\sigma^2\delta[k+1]} + E[w[n-1]w[n+k-1]]\Big)$$

$R_w[k+1] =$

$n+k-(n-1) = k+1$

K

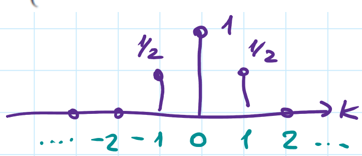
$$= \frac{1}{4}\left(R_w[n,n+k] + R_w[n,n+k-1] + R_w[n-1,n+k] + \underbrace{R_w[n-1,n+k-1]}_{R_w[k]}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1] = \left\{\frac{\sigma^2}{4}, \underset{\uparrow}{\frac{\sigma^2}{2}}, \frac{\sigma^2}{4}\right\}$$

$k=0$

$$\rho_x[k] = \frac{C_x[k]}{C_x[0]} = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1] = \{1/2, \underset{\uparrow}{1}, 1/2\}$$

$$= \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



דוגמה:

$w[n] \sim A$ התפלגות כלשהי

עבור כל n נערכת הגרלה מחדש,

$$x[n] = \sum_{i=1}^{n} w[i]$$

$$? = E[x[n]], \mathrm{Var}[x[n]]$$

הצבה $$E[x[n]] = E\left[\sum_{i=1}^{n} w[i]\right]$$

פעולה לינארית $$= \sum_{i=1}^{n} E[w[i]] = nE[A]$$

$$\mathrm{Var}[x[n]] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} w[i]\right]$$

סכום משתנים בלתי תלויים

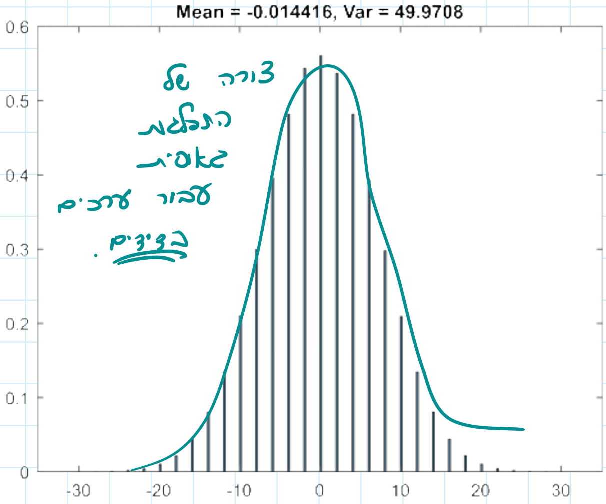
$\sum_{i=1}$

$? = E[\mathrm{x}[n]], \mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]]$

מהי התפלגות של הדגימה $x[n]$ עבור n מספיק גדול?

עבור דוגמה מספרית

$p(A=1) = p(A=-1) = 1/2$



$$\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}[i]\right]$$

סכום
משתנים
בלתי תלויים

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[\mathrm{w}[i]] = n\mathrm{Var}[A]$$

עבור n מספיק גדול בהתאם למשפט גבול המרכזי מתקיים

$$\mathrm{x}[n] \sim N\left(nE[A], n\mathrm{Var}[A]\right)$$