Lecture5 - GV

Thursday, 5 December 2024 16:11

משתנים גאוסיים במשותף

מטריצת covariance רב-ממדית

מטרה: להגדיר אוסף שונויות משותפות בין משתנים שונים.

Cov

הרצאה קודמת: 2 משתנים

↓

N

$Cov[X_1,X_1]$

$$C_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_1,X_N] \\ \mathrm{Cov}[X_2,X_1] & \mathrm{Var}[X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_2,X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[X_N,X_1] & \mathrm{Cov}[X_N,X_2] & \cdots & \mathrm{Var}[X_N] \end{bmatrix}$$

כל הזוגות האפשריים בין N משתנים אקראיים

תכונות: סימטרית

Transpose = משוחלף

$$C_\mathbf{X} = C_\mathbf{X}^T \quad \mathrm{Cov}[X_i,X_j] = \mathrm{Cov}[X_j,X_i]$$

* משתנים חסרי קורלציה = חסרי קשר לינארי.

$$\mathrm{Cov}[X_i,X_j] = 0, \quad i \neq j$$

$$C_\mathbf{X} = \mathrm{diag}\left[\mathrm{Var}[X_1], \mathrm{Var}[X_2], \ldots, \mathrm{Var}[X_N]\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}[X_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Var}[X_N] \end{bmatrix}$$

* קומבינציה לינארית

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{a}^T\mathbf{X}\right] = \mathbf{a}^T C_\mathbf{X} \mathbf{a}$$

רישום אלגברי

$$\boxed{\mathrm{Var}\left[a_1X_1 + \ldots + a_NX_N\right] = ?}$$

דוגמה מספרית

$$\mathrm{Var}[a_1X_1 + a_2X_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_2,X_1] & \mathrm{Var}[X_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_1^2\mathrm{Var}[X_1] + \underbrace{2a_1a_2\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}_{} + a_2^2\mathrm{Var}[X_2]$$

עבור X_1, X_2 חסרי קורלציה

$Cov[X_1,X_2]=0$

* טרנספורמציה לינארית

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}$$

$$\mu_\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T\mu_\mathbf{X}$$
$$C_\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T C_\mathbf{X}\mathbf{A}$$

התפלגות גאוסית דו-ממדית

מטרה: ניסיון עם צוג תוצאות בעלי התפלגות גאוסית

הערה: קיים ביטוי ל-PDF, למשל הרבה התפלגויות אחרות

לדוגמה

משפט

סכום משתנים גאוסיים בלתי-תלויים הוא משתנה גאוסי.

עבור משתנים $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, בלתי תלויים

$$aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)$$

דוגמה: מטרה - ניסוח התפלגות גאוסית דו-ממדית

זוג משתנים גאוסיים בלתי תלויים, $\boxed{W_1, W_2 \sim N(0,1)}$

משתנים "חדשים"

$$X_1 = \mu_1 + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2$$
$$X_2 = \mu_2 + \sigma_{21}W_1 + \sigma_{22}W_2$$

צעדים הבאים: ניתוח X_1, X_2 והקשר ביניהם

* התפלגות:

בהתאם למשפט + הוספת קבוע משאיר משתנה גאוסי

⇐ X_1, X_2 מתפלגים גאוסית

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

סימון

* תוחלת

$$E[X_1] = \mu_1 + \sigma_{11}E[W_1] + \sigma_{12}E[W_2] = \mu_1$$
$$E[X_2] = \mu_2$$

$$X_1 = \cancel{\mu_1} + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2$$

קבוע לא משפיע על שונות

$$\mathrm{Var}\left[\sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2\right]$$

$$a_1^2\mathrm{Var}[X_1] + 2a_1a_2\mathrm{Cov}[X_1,X_2] + a_2^2\mathrm{Var}[X_2]$$

* מטריצת $C_{\underline{X}}$

$$\mathrm{Cov}[X_1,X_1] = \mathrm{Var}[X_1] = \sigma_{11}^2\cancel{\mathrm{Var}[W_1]} + \sigma_{12}^2\cancel{\mathrm{Var}[W_2]} = \sigma_1^2$$

סימון

$$\mathrm{Cov}[X_2,X_2] = \mathrm{Var}[X_2] = \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 = \sigma_2^2$$

$$\mathrm{Cov}[X_2,X_1] = \mathrm{Cov}[X_1,X_2] = \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}$$

הגדרה

$$= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[X_1X_2] - \mu_1\mu_2$$

$$E[X_1X_2] = E\big[\underbrace{(\mu_1 + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2)}_{X_1}\underbrace{(\mu_2 + \sigma_{21}W_1 + \sigma_{22}W_2)}_{X_2}\big]$$

9 איברים

$$= E\begin{bmatrix} \mu_1\mu_2 & +\mu_1\cancel{\sigma_{21}W_1} & +\mu_1\cancel{\sigma_{22}W_2} \\ + \quad \mu_2\cancel{\sigma_{11}W_1} & +\sigma_{11}\sigma_{21}W_1^2 & +\sigma_{11}\sigma_{22}\cancel{W_1W_2} \\ + \quad \mu_2\cancel{\sigma_{12}W_2} & +\sigma_{12}\sigma_{21}\cancel{W_1W_2} & +\sigma_{12}\sigma_{22}W_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \mu_1\mu_2 + \sigma_{11}\sigma_{21}E\left[\cancel{W_1^2}\right] + \sigma_{12}\sigma_{22}E\left[\cancel{W_2^2}\right]$$

$=1$, $=1$

$$= \mu_1\mu_2 + \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}$$

$E[W_i]=0 \quad E[W_1W_2] = E[W_1]\cdot E[W_2] = 0$

בלתי תלויים

ומקדם הקורלציה הוא ע"פ הגדרה

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]\,\mathrm{Var}[X_2]}} = \frac{\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}}{\sigma_1\sigma_2}$$

סיכום:

שונות

$$a_1^2\mathrm{Var}[X_1] + 2a_1a_2\mathrm{Cov}[X_1,X_2] + a_2^2\mathrm{Var}[X_2]$$

$a_1 = \sigma_{11}$ $\quad a_2 = \sigma_{12}$

בלתי תלויים $\Leftarrow \mathrm{Cov}\{W_1,W_2\} = 0$

נתון $\mathrm{Var}\{W_1\} = 1 = \mathrm{Var}\{W_2\}$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]\,\mathrm{Var}[X_2]}} = \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22}}{\sigma_1\sigma_2}$$

סיכום:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}[X_1,X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_2,X_1] & \mathrm{Cov}[X_2,X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

זוג משתנים גאוסיים במשותף

$$\underbrace{\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}}_{\text{גאוסיים}} \Rightarrow \mathbf{X} \sim N\left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}}_{\text{תוחלות}}, \underbrace{C_{\mathbf{X}}}_{\text{מטריצת Cov}}\right)$$

מסקנה:

נתון: משתנים אקראיים $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (תלויים או בלתי תלויים)

$\sum_{m=1}^{N} a_m X_m \sim N(\cdot,\cdot)$ $\Leftrightarrow$ $X_1,\ldots,X_N$ יש להם התפלגות גאוסית משותפת

$\forall a_m \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Var}\{X\} = \underbrace{E[X^2]}_{\sigma^2} - \underbrace{E^2[X]}_{0}$$

דוגמה: $X \sim N(0,\sigma^2),\ Y = 3X$

(א) מהו מקדם קורלציה (בלי לחשב)?

בגלל קשר לינארי עם שיפוע חיובי, $\rho_{XY} = 1$.

$\mathrm{Var}\{aX\} = a^2\mathrm{Var}\{X\}$

(ב) הראה שמשתנים X, Y הם גאוסיים במשותף.

$$\underbrace{a_1X + a_2Y}_{\sum a_m X_m} = \underbrace{a_1X + 3a_2X}_{\text{הצבה}} = \underbrace{(a_1+3a_2)X}_{\text{התפלגות גאוסית כפול קבוע}} \sim \underbrace{N\left(0,(a_1+3a_2)^2\sigma^2\right)}_{\text{התפלגות גאוסית}}$$

(ג) מהי מטריצת covariance? מהי התפלגות המשותפת שלהם?

פתרון: דרך א' - ע"פ הגדרה

$E[XY] = 3E[X^2] = \mathrm{Cov}[X,Y] = 3\sigma^2$

$E[Y^2] = 3^2E[X^2] = \mathrm{Var}[Y] = 9\sigma^2$ הצבה

$E^2[Y] = E^2[X] = 0$

$$C_{XY} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathrm{Cov}[X,X]} & \mathrm{Cov}[X,Y] \\ \mathrm{Cov}[Y,X] & \mathrm{Cov}[Y,Y] \end{bmatrix} = \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Var}[X]$ נתון

דרך ב'

$$\mathrm{Var}[\underline{A}X] = \underline{A}\cdot\sigma^2\cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}[1\ \ 3]\cdot\sigma^2$$

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2$

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}X$

$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$

$C_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}C_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$

$Y = 3X \Rightarrow Y^2 = 3^2X^2$

$E[Y^2] = 3^2E[X^2] = 9\sigma^2$

דוגמה:

נתונים משתנים אקראיים X,Y עם $\mathrm{Cov}[X,Y] \neq 0$. נגדיר

$Z = aX + Y$ $\quad a \neq 0$

האם ייתכן מצב של $\mathrm{Cov}[X,Z] = \rho_{XZ} = 0$?

X,Z חסרי קורלציה ותלויים, כי Z הוא פונקציה של X

הגדרה $\mathrm{Cov}[X,Z] = \underbrace{E[XZ]}_{1} - \underbrace{E[X]\,E[Z]}_{2}$

הצבה ② $E[Z] = aE[X] + E[Y]$

הצבה ① $E[XZ] = aE\left[X^2\right] + E[XY]$

חזרה להגדרה $\mathrm{Cov}[X,Z] = aE\left[X^2\right] + E[XY] - aE^2[X] - E[X]\,E[Y]$

$= a\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Cov}[X,Y] = 0$

כנס איברים ע"פ הגדרת של שונות ו שונות משותפת

$a = -\dfrac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]}$

העברת אגפים

דרך נוספת (אלגברית)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}}_{\underline{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{\underline{X}}$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$3 \stackrel{?}{=} 0$

תכונה: עבור משתנים גאוסיים במשותף

חסרי קורלציה $\Leftrightarrow$ בלתי תלויים

חזרה לדוגמה: אם X,Y גאוסיים במשותף $\Leftarrow$ גם חסרי קורלציה וגם בלתי תלויים

חזרה לדוגמה.. אם X,Y גאוסיים במשותף ⇐ גם חסרי קורלציה וגם בלתי תלויים

חיזוי לינארי אופטימלי (הגדרה 5.3):

עבור משתנים **גאוסיים במשותף**, החיזוי לינארי הוא חיזוי אופטימלי (מיטבי), שאין חיזוי יותר טוב ממנו.

התפלגות גאוסית רב-ממדית

* תוחלת = וקטור N ממד.
* מטריצת cov $N \times N$

דוגמה: נתונים משתנים בלתי תלויים $X_1, X_2, X_3 \sim N(0,1)$

מידע הנתונים

$\Rightarrow E[X_i] = 0 \quad i = 1,..,3$

$E[X_i^2] = Var[X_i] = 1$

תוחלות

2 $E[Y_1] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 0$

$= E[Y_2]$

$= E[Y_3]$

נתון:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ Y_2 &= X_1 - X_2 \\ Y_3 &= X_2 - X_3 \end{aligned}}$$

שאלה: מהי התפלגות המשתנה של $\underline{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$

תשובה: 1 התפלגות היא גאוסית

נימוק: קומבינציה לינארית של משתנים גאוסיים

3 חישוב אלגברי

מטריצת C_X עבור X_1, X_2, X_3 תלויות

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}, \quad \mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C_X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathbf{y}} = \mathbf{A C_X A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 $\mu_{\underline{Y}} = A\mu_{\underline{X}} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

3 C_Y

חישוב איבר-איבר

$Var[Y_1] = Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] = 3$

$Var[Y_2] = Var[X_1] + (-1)^2 Var[X_2] = 2$

$Var[Y_3] = 2$

$Cov[Y_1, Y_3] = E[Y_1 Y_3]$

$= \cancel{E[X_1X_2]} - \cancel{E[X_1X_3]} + \underbrace{E[X_2^2]}_{=1} - \cancel{E[X_2X_3]} + \cancel{E[X_2X_3]} - E[X_3^2]$

$+ \cancel{E[X_2X_3]} - \underbrace{E[X_3^2]}_{=1} = 0$

$E[X_1 X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2] = 0 \cdot 0 = 0$

$Cov[Y_2, Y_3] = -E[X_2^2] + \cancel{...} = -1$

$Cov[Y_1, Y_2] = 0$