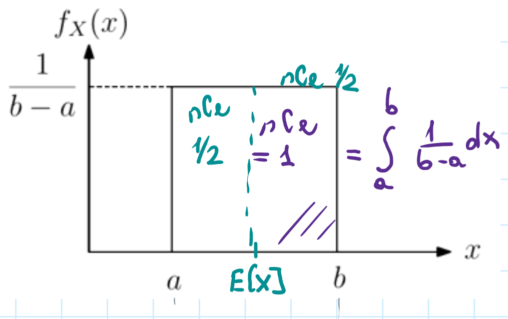
Lecture2 - RV

Thursday, 14 November 2024 16:07

התפלגות אחידה

בכל

מטרה: מודל של תופעות בעלי אותה הסתברות על מקטע רציף.



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$X \sim \underbrace{U}_{\text{uniform}}[a,b]$ PDF

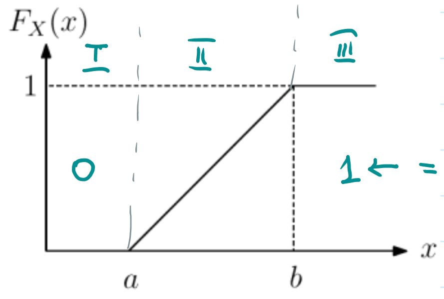
תכונות

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1}$$

.$X \sim U(a,b)$ יש להחליף $\leqslant$ ל-$<$.

קצות לא חלק מ PDF

נוסחה כללית $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(p)\,dp$ CDF



$$\boxed{F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1}$$

$1 \leftarrow = F_X(1) = F_X(\infty) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a & \text{I} \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x < b & \text{II} \\ 1 & b \leqslant x & \text{III} \end{cases}$$

תכונות נוספות: חישוב כתרגיל דוגמא

* תוחלת

$$E[X] = \int_a^b x \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{f_X(x)} dx = \frac{a+b}{2}$$

גבולות בהתאם ל-$f_X(x)$

תכונות

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx}$$

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx}$$

* $E[X^2]$

חישוב לפי הגדרה

$$E\left[X^2\right] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

מעבר קצת "טריק"

* $Var[X]$ - שונות

$$\text{Var}[X] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

* נוסחה שימושית

$$E\left[X^2\right] = \text{Var}[X] + E^2[X]$$

בד"כ עבור $Var[X]$, $E[X]$ התפלגויות נפוצות ידועות מראש.

* חציון

$$\Pr(X \geqslant E[X]) = \Pr(X \leqslant E[X]) = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{ערך } m \text{ עבור מתקיים } \Pr(X \geqslant m) \geqslant \tfrac{1}{2} \text{ וגם } \Pr(X \leqslant m) \geqslant \tfrac{1}{2} \text{ בו-זמנית, נקרא ערך חציון.}}$

דוגמה:

נתון: $X \sim U[0,2]$, $Y = X^2$

$E[Y], \text{Var}[Y] = ?$

דרך א'

$$E[Y] = E\left[X^2\right] = \text{Var}[X] + E^2[X]$$

$$= \int_0^2 x^2 \frac{1}{2-0}dx = \frac{4}{3}$$

דרך ב' חישוב ישיר

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{g(x)}^{x^2} \underbrace{f_X(x)}_{\text{PDF של התפלגות אחידה}} dx}$$

$$E[Y^2] = E\left[X^4\right] = \int_0^2 x^4 \frac{1}{2-0}dx = \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{16}{5}$$

חישוב ע"פ הגדרה

$$\text{Var}[Y] = E\left[Y^2\right] - E^2[Y] = \frac{16}{5} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{45}$$

חישוב ע"פ הגדרה

$$\mathrm{Var}[Y] = E\left[Y^2\right] - E^2[Y] = \frac{16}{5} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{45}$$

התפלגות גאוסית

מטרה: מודל של תופעות רבות בטבע.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E[X] = \mu$ $\quad Var[X] = \sigma^2$

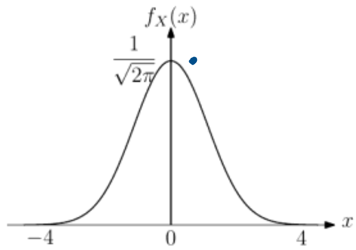
PDF

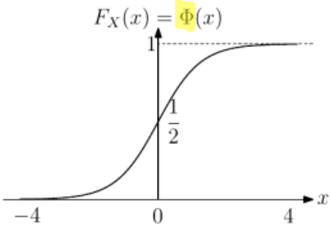
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

CDF: חישוב מספרי בלבד

עבור מקרה פרטי של $N(0,1)$, מסומן ע"י $\Phi(x)$

$X \sim N(0,1)$





תכונות:

הכפלה בקבוע = הכפלת שונות בקבוע בריבוע → $X \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma X \sim N(0, \sigma^2)$

הוספת קבוע = מוסף לתוחלת → $X \sim N(0,1) \Rightarrow \mu + X \sim N(\mu, 1)$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow \underbrace{\mu + \sigma X}_{Y} \sim N(\mu, \sigma^2)$

פעולה הפוכה:

$Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$

$\frac{1}{\sigma}(Y-\mu) \sim N(0,1)$

$\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2$

סיכום:

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Q-function

$\Phi(x) = Pr(X \le x)$

סימן הפוך

הסתברות משלימה ל-CDF

$X \sim N(0,1)$

$Q(x) = \Pr(x < X)$

$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$

$Q(-x) = 1 - Q(x)$

$Q(0) = \frac{1}{2}$

$\Pr(Y > y) = Q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$

ניתן לחשב הסתברויות ע"י $\Phi(x)$

$\Pr(X < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

דוגמה: $Y = X + a$

$X \sim N(0, \sigma^2)$

$? = Pr(Y \le 0)$

$Y \sim N(\underbrace{a}_{\mu_y}, \underbrace{\sigma^2}_{\sigma_y^2})$ הוספת קבוע

תשובה:

$Pr(Y \le 0) = \Phi\left(\frac{0-\mu_y}{\sigma_y}\right)$

$= \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)$

$= Q\left(\frac{a}{\sigma}\right)$

משפט הגבול המרכזי

נתון: n משתנים אקראיים בלתי תלויים $X_1, \dots, X_n$ - התפלגות שרירותית (אותה התפלגות כולם)

$E[X_i] = \mu$

$Var[X_i] = \sigma^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

דוגמה מספרית

$Pr(X=1) = \frac{1}{2}$

$Pr(X=-1) = \frac{1}{2}$

$n = 50$

פעמון גאוסי של ערכים בדידים

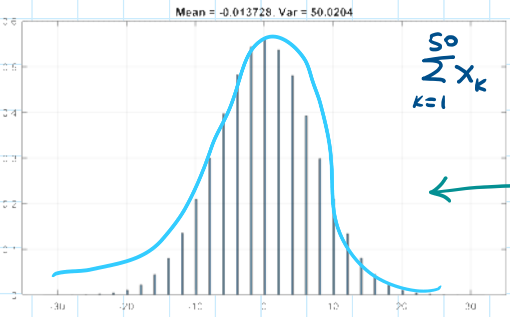
פעמון גאוסי של ערכים בדג'ים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$E[X_i]=\mu$

$Var[X_i]=\sigma^2$

הסתברות של אותו ערך



$\sum_{k=1}^{50} X_k$

איך עושים שרטוט כזה?

ערך

היסטוגרמה

מהי: הצגה של תוצאות הניסוי

דוגמה: זריקת מטבע

ציר y

n_0, n_1: מספר תוצאות מכל סוג = גובה העמודות

$N=n_0+n_1$: סה"כ תוצאות

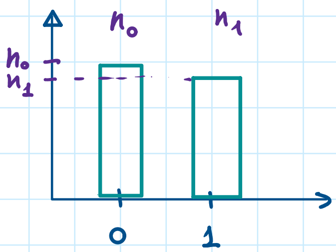
$K=2$: מספר תוצאות אפשריות = מספר עמודות

דוגמה לציור של ההיסטוגרמה מסוג count

$N=1000$ זריקות

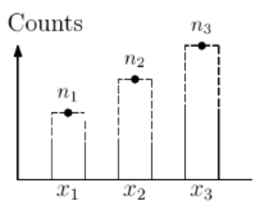
$n_0=496$

$n_1=504$



$K=3$

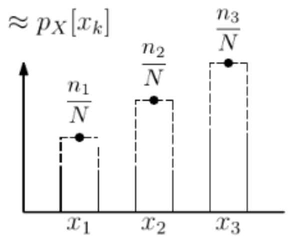
$N=n_1+n_2+n_3$

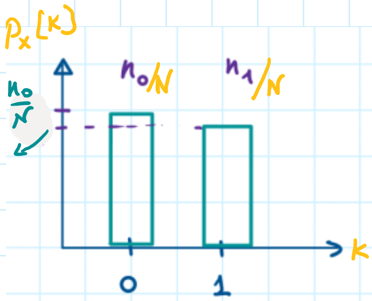


סוג נוסף: probability

מהי: הסתברות של תוצאות

סיכום:





$p_X[x_i] \approx \frac{n_i}{N}$ קירוב של PDF

$p_x[0]=0.496$

$p_x[1]=0.504$

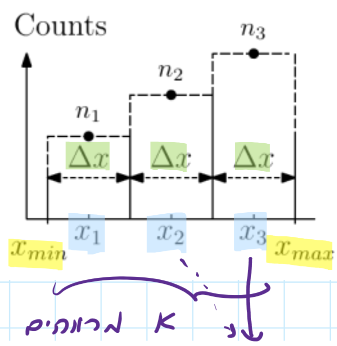
אתגר: מספר תוצאות ניסוי אפשריות:
- גדול מדי בגלל הצגה נוחה
- מעט מדי תוצאות ניסוי

שיטה:

1. לזהות ערך מינימלי ומקסימלי של התוצאות
2. חלוקה ל-K מרווחים שווים ברוחב Δx
3. חישוב מספר ערכים בכל מרווח

count

נירמול ע"י חלוקה ב-N



count — נירמול ע״י חלוקה ב-N

x_{min} x_{max}

K מרווחים

מרכז ← x_i
מרווח

סט נוסף : pdf

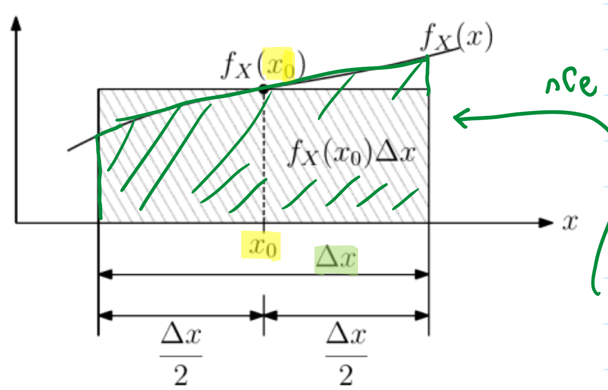
רקע: probability - הסתברות

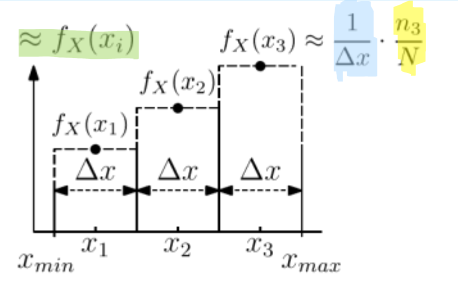
pdf של משתנה אקראי רציף ≠ הסתברות (לדוגמא: יכול להיות מעל 1)

זהה לשאלה הקודמת עם הרבה תוצאות
אפשרות + נירמול

$$f_X(x_i) \approx \frac{n_i}{N}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

הוכחה לנוסחא של $f_X(x_i)$





שטח

$$Pr(X\in\Delta x) = \int_{\Delta x} f_X(x)dx$$

$$\cong \Delta x\cdot f_X(x_0)$$

← שטח מלבן

מרכז המרווח Δx

$$f_X(x_0)\cong\frac{Pr(X\in\Delta x)}{\Delta x}\cong\frac{n}{N}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

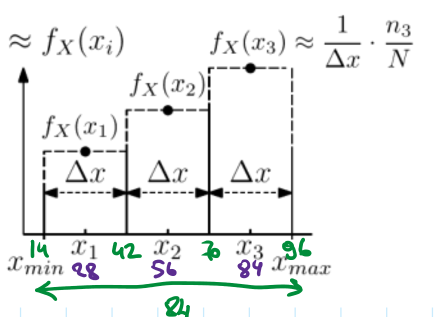
n ערכים בתוך המרווח

דוגמה 2.10: נתונות תוצאות של ניסוי אקראי,

$[16, 98, 96, 49, 81, 14, 43, 92, 80, 96]$

x_{max} x_{min}

מעוניינים להציג את ה-PDF של התוצאות בצורה גרפית ע״י היסטוגרמה בעלת 3 נקודות



פתרון:

* $N=10$ סה״כ ערכים
* $k=3$
* x_{min}, x_{max}
* $\Delta x = \frac{x_{max}-x_{min}}{k} = \frac{84}{3} = 28$, $84 = 98-14$

* מספר ערכים בכל מרווח

$n_1 = 2,$ ערכים במרווח הראשון $\leftarrow \{14, 16\} \in [x_{min}, x_{min}+\Delta x] \quad = [14, 42]$

$n_2 = 2$ מספר ערכים $\leftarrow \{43, 49\} \in [x_{min}+\Delta x, x_{min}+2\Delta x] \quad = (42, 70]$

$n_3 = 6 \leftarrow \{80, 81, 92, 96, 96, 98\} \in [x_{max}-\Delta x, x_{max}] \quad = (70, 98]$

$$n_2 = 2 \quad \text{מספר ערכים} \quad \leftarrow \{43, 49\} \in [x_{min} + \Delta x, x_{min} + 2\Delta x] \quad = (42, 70]$$

גבול מרווח

$$n_3 = 6 \quad \leftarrow \{80, 81, 92, 96, 96, 98\} \in [x_{max} - \Delta x, x_{max}] \quad = (70, 98]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{min} + \Delta x/2 &= 28 \\ x_2 &= x_{min} + \Delta + \Delta x/2 &= 56 \\ x_3 &= x_{min} + 2\Delta + \Delta x/2 = x_{max} - \Delta x/2 &= 84 \end{aligned}$$

* מרכזי מרווחים

* סיכום = תשובה סופית

$$f_X(x_i) \approx \frac{n_i}{N \cdot \Delta x} = n_i \frac{1}{10 \cdot 28}$$