# מערכת LTI - זמן בדיד

**מטרה:** ניתוח של מעבר אות אקראי דרך מערכת בזמן בדיד.

הקדמה

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

התמרת DTFT $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f n}$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n]$$

$$= \sum_m x[m]h[m-n]$$

תכונות כלליות:
* כניסה WSS
* מוצא WSS
* כניסה-מוצא joint-WSS

מספיק שרק אחד מתקיים

* דיון רק על מערכות יציבות

* כניסה גאוסית $\Leftrightarrow$ מוצא גאוסית

**תוחלת** (מוצא)

הגדרה

$$E[\mathrm{y}[n]] = E[h[n] * \mathrm{x}[n]] = E\left[\sum_m h[m]\mathrm{x}[n-m]\right]$$

שינוי סדר $\Sigma$, $E$

$$= \sum_m h[m]E[\mathrm{x}[n-m]]$$

$$= \mu_{\mathrm{x}} \sum_m h[m] = \mu_{\mathrm{x}} H(0)$$

$f=0$

**שונות מוצא עבור רעש לבן**

עבור רעש לבן $x[n_1], x[n_2]$
חסרי קורלציה (ובלתי תלויים עבור רעש גאוסי)

$$\mathrm{Var}[\mathrm{y}[n]] = \mathrm{Var}\left[\sum_m h[m]\mathrm{x}[n-m]\right]$$

$$= \sum_m h^2[m]\underbrace{\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n-m]]}_{\text{קבוע}}$$

$$= \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_{\mathrm{y}}[0]$$

**שונות של משתנים בלתי תלויים (כלכל)**

$$\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2\mathrm{Var}[X] + b^2\mathrm{Var}[Y]$$

$$\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]] = C_{\mathrm{x}}[0]$$

שונות של רעש לבן

**ניתוח במישור Z**

| בזמן | DTFT | $\mathcal{Z}$ |
|---|---|---|
| $R_{\mathrm{xy}}[k] = R_{\mathrm{x}}[k] * h[k]$ | $S_{\mathrm{xy}}(f) = S_{\mathrm{x}}(f)H(f)$ | $S_{\mathrm{xy}}(z) = S_{\mathrm{x}}(z)H(z)$ |

הגדרה של התמרת $\mathcal{Z}$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$S_{\mathrm{x}}(z) = \mathcal{Z}\{R_{\mathrm{x}}[n]\}$$

תכונות של ההתמרה:

$$y[n] = x[n] * h[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z) = H(z)X(z)$$

$$\mathcal{Z}\{h[-n]\} = H\left(z^{-1}\right) = H(1/z)$$

$$R_{\mathrm{y}}[k] = R_{\mathrm{x}}[k] * h[n] * h[-n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} S_{\mathrm{y}}(z) = S_{\mathrm{x}}(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$R_{\mathrm{y}}[k] = R_{\mathrm{x}}[k] * h[n] * h[-n] \stackrel{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} S_{\mathrm{y}}(z) = S_{\mathrm{x}}(z)H(z)H(z^{-1})$$

## מערכות FIR

מערכות עם תגובה סופית להלם

$$h[n] = \{b_0, b_1, \ldots, b_N\}$$

$$= b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \ldots + b_N\delta[n-N]$$

$$= \sum_{m=0}^{N} b_m \delta[n-m]$$

$$H(z) = \mathscr{Z}\{h[n]\} = \frac{B(z)}{A(z)}$$ מקרה כללי

מוגז בלבד עבור FIR

$$H(z) = B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}$$

$A(z) = 1$

מערכות FIR תמיד יציבות.

דוגמה:

האות כניסה $\mathrm{x}[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי (WGN)

$$h[n] = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

(א) $\mathrm{y}[n]$ התפלגות, $P_{\mathrm{y}}$ הספק, $\mathrm{Var}[\mathrm{y}[n]]$, $E[\mathrm{y}[n]]$

(ב) צפיפות הספק ספקטראלית $S_{\mathrm{y}}(f)$.

בהתאם לתכונות:

$$E[\mathrm{y}[n]] = \underbrace{\cancel{E[\mathrm{x}]}}_{=0} \sum_m h[m] = 0$$

$$\mathrm{Var}[\mathrm{y}[n]] = \sigma^2 \sum_m h^2[m] = \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mathrm{y}[n] \sim N\left(E[\mathrm{y}[n]] = 0, \mathrm{Var}[\mathrm{y}[n]] = \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$x[n] \sim N(0, \sigma^2)$

$$P_{\mathrm{y}} = R_{\mathrm{y}}[0] = C_{\mathrm{y}}[0] \quad \leftarrow E[\mathrm{y}[n]] = 0$$
$$= \mathrm{Var}[\mathrm{y}[n]]$$

ניתוח מקדים של מערכת

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$ זמן

$$H(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} = \frac{1}{2}e^{-j\pi f}\left[e^{j\pi f} + e^{-j\pi f}\right] = e^{-j\pi f}\cos(\pi f)$$ תדר

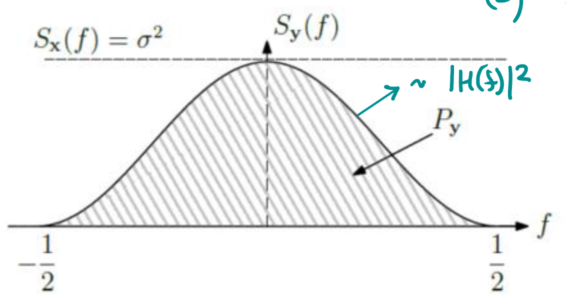
(1) $$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j2\pi f}\right)$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi f)] = \cos^2(\pi f)$$

(2) $$S_{\mathrm{x}}(f) = \sigma^2$$

(3) $$S_{\mathrm{y}}(f) = \underset{(2)}{S_{\mathrm{x}}(f)}\,\underset{(1)}{|H(f)|^2} = \mathrm{DTFT}\{R_{\mathrm{y}}[k]\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}[1 + \cos(2\pi f)] = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{1}{2}\exp\{j2\pi f\} + 1 + \frac{1}{2}\exp\{-j2\pi f\}\right]$$




$$P_{\mathrm{y}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{\mathrm{y}}(f)df = \int_0^1 S_{\mathrm{y}}(f)df = 2\int_0^{\frac{1}{2}} S_{\mathrm{y}}(f)df = \frac{\sigma^2}{2}$$

(ג) $R_{\mathrm{y}}[k]$.

חישוב $R_{\mathrm{y}}[k]$

**דרך א'** - חישוב קונבולוציה במישור הזמן

$$R_{\mathrm{y}}[k] = R_{\mathrm{x}}[k] * h[n] * h[-n]$$

$$= R_{\mathrm{x}}[k] * \sum_{n=0}^{N-1} h[n]h[n+k]$$

$h[n]$    $h[-n]$

$$= \sigma^2\delta[k] * \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} * \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \sigma^2\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$$

סימון של $n,k=0$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1] = C_{\mathrm{y}}[k]$$

**דרך ב'** - שימוש בהתמרת Z לחישוב הקונבולוציה

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad z \neq 0 \quad = \mathscr{Z}\{h[n]\}$$

$$H\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z, \quad |z| \neq \infty$$

$$S_{\mathrm{x}}(z) = \sigma^2 \quad = \mathscr{Z}\{R_{\mathrm{x}}[k]\}$$

$$S_{\mathrm{y}}(z) = S_{\mathrm{x}}(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z^{-1}\right) \qquad |z|\neq 0,\infty$$

$$R_{\mathbf{y}}[k] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{S_{\mathbf{y}}(z)\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k]+\frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1]+\frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1] = C_{\mathbf{y}}[k]$$

$n,k=0$

$\boxed{\delta[n]*h[n]=h[n]}$

דרך ג'

$$R_{\mathbf{y}}[k] = \mathrm{DTFT}^{-1}\left\{S_{\mathbf{y}}(f)\right\}$$

ד) התפלגות משותפת של $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}[n_1]\\ \mathbf{y}[n_2]\end{bmatrix}$.

התפלגות גאוסית

$$\mathbf{Y}\sim N\left(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}}\right)$$

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix}E[\mathbf{y}[n_1]]\\ E[\mathbf{y}[n_2]]\end{bmatrix} \quad \leftarrow E[\mathbf{y}[n_1]] = E[\mathbf{y}[n_2]] = 0$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$C_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix}C_{\mathbf{y}}[0] & C_{\mathbf{y}}[k]\\ C_{\mathbf{y}}[k] & C_{\mathbf{y}}[0]\end{bmatrix} \qquad k=|n_1-n_2|$$

במקרה של $k\geqslant 2$, הערכים של $\mathbf{y}[n_1],\mathbf{y}[n_2]$ הם בלתי תלויים

$\Leftarrow$ מוכיח גם אלכסונית

הערה

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}[k]\\ C_{\mathbf{x}}[k] & C_{\mathbf{x}}[0]\end{bmatrix} = \sigma_{\mathbf{x}}^2\begin{bmatrix}1 & \rho_{\mathbf{x}}[k]\\ \rho_{\mathbf{x}}[k] & 1\end{bmatrix} \quad \Leftarrow \rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]} = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{\sigma_{\mathbf{x}}^2}$$

מקדם קורלציה בהפרש זמנים $k$

דרך נוספת לרשום $C_y[k]$:

$$C_y[k] = \begin{cases}\frac{\sigma^2}{2} & k=0\\ \frac{\sigma^2}{4} & |k|=1\\ 0 & |k|\geq 2\end{cases}$$

## מערכות IIR

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Nz^{-N}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Mz^{-M}}$$

**דוגמה 11.3:** נתון תהליך אקראי מהצורה

$$\mathbf{x}[n] = a\mathbf{x}[n-1]+\mathbf{w}[n],$$

כאשר $\mathbf{w}[n]\sim N(0,\sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.

$$X(z) = az^{-1}X(z)+W(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a| \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} h[n] = a^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a|<1$$

חשב $E[\mathbf{x}[n]]$.

דרך א' - ע"פ משוואה (11.3)

$$\mu_{\mathbf{x}} = \overset{0}{\cancel{\mu_{\mathbf{w}}}}\sum_m h[m] = 0$$

דרך ב' - מתבסס על תכונת WSS של $\mathbf{x}[n]$

$$\underbrace{E[\mathbf{x}[n]]}_{\text{קבוע}} = a\underbrace{E[\mathbf{x}[n-1]]}_{\text{קבוע}} + \cancel{E[\mathbf{w}[n]]}$$

$$\mu_{\mathbf{x}} = a\mu_{\mathbf{x}}$$

$$\mu_{\mathbf{x}} = 0$$

□ חישוב שונות $\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]]$ והספק $P_{\mathbf{x}}$

דרך א'

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = C_{\mathbf{x}}[0] = R_{\mathbf{x}}[0] = P_{\mathbf{x}}$$

$$= \mathrm{Var}[\mathbf{w}[n]]\sum_m h^2[m]$$

$$(a^n)^2 = (a^2)^n$$

דרך ב' (בדומה לדרך ב' של חישוב תוחלת)

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = \mathrm{Var}[a\mathbf{x}[n-1]+\mathbf{w}[n]]$$

$$= a^2\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] + \mathrm{Var}[\mathbf{w}[n]]$$

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = a^2\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] + \sigma^2$$

$\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]] = a^2\mathrm{Var}[\mathrm{x}[n]] + \sigma^2$

$$= \mathrm{Var}[\mathrm{w}[n]]\sum_m h^2[m]$$

$(a^n)^2 = (a^2)^n$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty}\left(a^2\right)^n \quad \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r|<1$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{1-a^2}$$

$w[n]$ , $x[n-1]$ חסרי קורלציה

כי תלוי רק ב $w[n-1], w[n-2], \ldots$

דרך ב' עבור השונות $\mathrm{Var}[x[n]]$

$$P_{\mathrm{x}} = \int_{-1/2}^{1/2} S_{\mathrm{x}}(f)df = 2\int_0^{1/2} S_{\mathrm{x}}(f)df$$

$= R_x[0]$

$= C_x[0]$

$= \mathrm{Var}[x[n]]$

□ חישוב $S_{\mathrm{x}}(f)$

$$X(f) = X\left(z = e^{j2\pi f}\right)$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$$

$$\left|X(f)\right|^2 = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}\cdot\frac{1}{1-ae^{j2\pi f}} = \frac{1}{1+a^2-2a\dfrac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}} = H(f)H^*(f)$$

$$= \frac{1}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}$$

$$S_{\mathrm{x}}(f) = \underbrace{S_{\mathrm{w}}(f)}_{\sigma^2}\left|X(f)\right|^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}$$

11.1 (תאוריה ו/או סימולציה) נתון רעש לבן גאוסי $\mathrm{w}[n] \sim N(0,1)$ ($\sigma^2=1$) עובר דרך מערכת בעלת תגובה להלם

$$h[n] = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32}\end{bmatrix}$$

$w[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow x[n]$

מוצא המערכת מסומן ב- $\mathrm{x}[n]$.

יש לחשב $R_{\mathrm{x}}[3]$.

$R_w[k] = \sigma^2\delta[k] = \delta[k]$

$$R_{\mathrm{x}}[k] = \sigma^2 h[n]*h[-n] = h[n]*h[-n] = \sum_m h[m]h[m+k]$$

$$R_{\mathrm{x}}[3] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]h[m+3] = h[0]h[3]+h[1]h[4]+h[2]h[5] = \frac{21}{128}$$

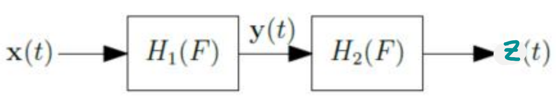
רכיבי סכום מעשיים בלבד

כל יתר האיברים = 0

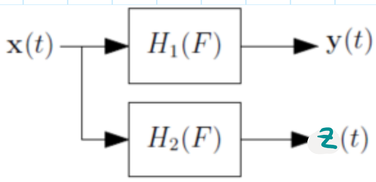
10.3 (ניתוח מערכת) נתון תהליך אקראי $\mathrm{x}(t)$ בעל תכונות הבאות: WSS, גאוסי, $E[\mathrm{x}(t)] = 0, R_{\mathrm{x}}(\tau) = 10\delta(\tau)$. התהליך עובר דרך 2 מערכות הבאות:

$$H_1(F) = \begin{cases}1, & |F| < 3\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$H_2(F) = \exp\left(-\frac{F^2}{4}\right)$$




1




2

1

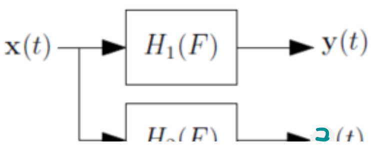
(א) יש לחשב הספק $P_{\mathrm{y}}$.

(ב) יש לחשב הסתברות $\Pr(\mathrm{y}(t) > 3)$

(ג) יש לחשב הספק $P_{\mathrm{z}}$.

2

(ד) מהי התפלגות המשותפת של $\begin{bmatrix}\mathrm{y}(t)\\ z(t)\end{bmatrix}$ עבור

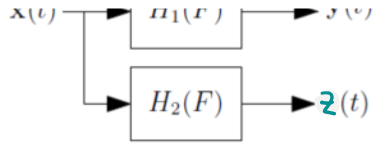



$R_{\mathrm{x}}(\tau) = 10\delta(\tau)$ $N_0$

(k)

פתרון:

$S_x = 10$




נתון

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = 10\delta(\tau)$$

(א) התמרת פוריה

פתרון:

$$S_{\mathbf{x}} = 10$$

הצבה

$$P_{\mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)\left|H_1(F)\right|^2 dF = \int_{-3}^{3} 10 \cdot 1^2 dF = 60$$

$$= R_y(0)$$

$$= C_y(0) = Var\{y(t)\}$$

(ב)

$$\mathbf{y}(t) \sim N(0,60) \Leftarrow \Pr(\mathbf{y}(t) > 3) = Q\left(\frac{3}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{60}}\right)$$

מערכת "ביחד" כגור $H(F)$

(ג)

$$P_{\mathbf{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)\left|\overbrace{H_1(F)H_2(F)}^{H(F)}\right|^2 dF$$

$$= 10\int_{-3}^{3}\left|H_2(F)\right|^2 dF = 10\int_{-3}^{3}\exp\left(-\frac{F^2}{4}\right) dF$$

$$= 10\int_{-3}^{3}\exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF$$

$$= 10\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3}\exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF$$

(ד)

$$P_{z} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)\left|H_2(F)\right|^2 dF$$

$$= 10\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF = 10\sqrt{2\pi}$$

1) $z(t) \sim N(0, 10\sqrt{2\pi})$

2) סעיף א' $\leftarrow y(t) \sim N(0,60)$

3) $C_{yz}(\tau) \leftarrow$ במקרה הנתון $\tau = 0$

$$C_{yz}(0) = R_{yz}(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)H_1^*(F)H_2(F)dF$$

$$= 10\int_{-3}^{3}\exp\left(-\frac{F^2}{4}\right) dF$$

$$S_{\mathbf{xy}}(F) = \mathscr{F}\left\{R_{\mathbf{xy}}(\tau)\right\}$$

באופן כללי.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(F)\, \underbrace{e^{j2\pi F\tau}}_{1} dF$$

$\tau = 0$