Lecture10 - RP

Thursday, 9 January 2025 16:15

מערכות LTI - תהליכים גאוסיים

חזרה קצרה: התפלגות גאוסית רב-ממדית

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, C_{\mathbf{X}})$$

וקטור של N משתנים אקראיים גאוסיים במשותף

וקטור של תוחלות

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}$$

מטריצת Covariance

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_1, X_N] \\ \mathrm{Cov}[X_2, X_1] & \mathrm{Var}[X_2] & \cdots & \mathrm{Cov}[X_2, X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[X_N, X_1] & \mathrm{Cov}[X_N, X_2] & \cdots & \mathrm{Var}[X_N] \end{bmatrix}$$

אות תהליך גאוסי

* תהליך $\mathrm{x}(t)$ הוא גאוסי אם, ורק אם עבור $\forall k > 0$ ועבור זמנים $t_1, \ldots, t_k$ ההתפלגות של $\mathrm{x}(t_1), \ldots, \mathrm{x}(t_k)$ היא גאוסית במשותף.

$t_1, \ldots, t_k$

* תהליך גאוסי היא WSS

$$C_x[0] = \mathrm{Var}[x(t)]$$

$$C_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(\underbrace{t_1 - t_1}_{=0}) & C_{\mathbf{x}}(t_1 - t_2) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(t_1 - t_N) \\ C_{\mathbf{x}}(t_2 - t_1) & C_{\mathbf{x}}(0) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(t_2 - t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\mathbf{x}}(t_N - t_1) & C_{\mathbf{x}}(t_N - t_2) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}$$

$$C_{\mathbf{x}}(t_i - t_j) = C_{\mathbf{x}}(t_j - t_i)$$

דוגמה 1: נתון תהליך גאוסי $\mathrm{x}(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$, כאשר $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, $X_1 = \mathrm{x}(t_1), X_2 = \mathrm{x}(t_2)$

$$\Rightarrow E[x(t)] = \mu$$

$$\mathrm{Var}[x(t)] = C_x(0) = \sigma^2$$

נניח, שידוע $C_x(\tau)$.

$$\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})$$

רישום ע"י מ"מ

$$\sim N\left(\begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_1, X_2] & \mathrm{Var}[X_2] \end{bmatrix} \right)$$

וקטור תוחלות

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[\mathrm{x}(t_2)] \\ E[\mathrm{x}(t_1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

מטריצת Cov

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}(\tau) \\ C_{\mathbf{x}}(\tau) & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} = \sigma_{\mathbf{x}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{x}}(\tau) \\ \rho_{\mathbf{x}}(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

מעבר דרך מערכת LTI

תכונה: אות גאוסי העובר דרך מערכת LTI נשאר גאוסי.

שימור תוחלת

(הוכחה בהרצאה קודמת)

$$E[\mathrm{y}(t)] = E[\mathrm{x}(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds$$

$$= E[\mathrm{x}(t)] H(0), \quad H(F) = \mathscr{F}\{h(t)\}$$

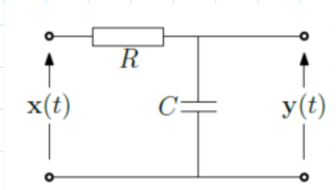
שינוי בעקבות מעבר דרך מערכת עם תגובה להלם $h(\tau)$ ←

$$C_{\mathrm{y}}(\tau) = C_{\mathrm{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$S_{\mathrm{y}}(F) = S_{\mathrm{x}}(F) |H(F)|^2$$

$$S_y(F) = \mathscr{F}\{R_y(\tau)\}$$

דוגמה:



אות כניסה $\mathrm{x}(t)$ הוא רעש לבן גאוסי

עם שונות $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

יש לחשב:

(א) $S_{\mathrm{y}}(F), R_{\mathrm{y}}(\tau), C_{\mathrm{y}}(\tau)$ - פרמטרים כלליים של אות מוצא

(ב) הספק ממוצע של $\mathrm{y}(t)$, והספק עבור תחום תדרים של $|F| < F_0[\mathrm{Hz}]$.

(ג) פרמטרי התפלגות של $\mathrm{y}(t)$ והסתברות $\Pr\big(\mathrm{y}(t) > 3\big)$.

(ד) הסתברות $\Pr\Big(\big[\mathrm{y}(t_1) + \mathrm{y}(t_2)\big] > 3\Big)$.

(ה) פרמטרי התפלגות של $\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{y}(t_1) \\ \mathrm{y}(t_3) \end{bmatrix}$.

הקדמה לפתרון:

סימון עזר $\alpha = \frac{1}{RC}$

ניתוח מעגל RC בזמן ובתדר

תדר:

$$H(F) = \frac{\frac{1}{j2\pi FC}}{R + \frac{1}{j2\pi FC}} = \frac{1}{1 + j2\pi RCF} = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi F}$$

זמן (תגובה להלם)

$$h(t) = \alpha \exp(-\alpha t) u(t) \quad \leftarrow \exp(-at)u(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{a + j2\pi F}$$

פתרון:

נתון (רעש לבן) מחושב

הגדרה $S_{\mathrm{y}}(F) = S_{\mathrm{x}}(F) |H(F)|^2 \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} R_{\mathrm{y}}(\tau) = R_{\mathrm{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

$S_x(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$

פתרון:

מסונן (רעש לבן)   מחושב

$S_x(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$

הגדרה $\quad S_y(F) = S_x(F)\left|H(F)\right|^2 \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

הצבה $\quad = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi RCF)^2}$

רישום מתאים להתמרה הפוכה $\quad = \alpha\frac{N_0}{4}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2F^2} \qquad \leftarrow \exp(-a|t|) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2F^2}$

התמרה ע"פ טבלה $\quad R_y(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{S_y(F)\} = \alpha\frac{N_0}{4}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2F^2}\right\} = \alpha\frac{N_0}{4}\exp(-\alpha|\tau|)$ P_y

תוחלת 0 בכניסה ⇐ תוחלת 0 במוצא

$C_y(\tau) = R_y(\tau) - \cancel{\mu_y^2}^{\,0} = R_y(\tau) \qquad \leftarrow E[y(t)] = \cancel{E[x(t)]}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds}_{\text{תמיד ערך סופי (מערכת יציבה)}} = 0$

(ב) הספק ממוצע של $y(t)$, והספק עבור תחום תדרים של $|F| < F_0[\mathrm{Hz}]$.

פתרון במישור הזמן

$P_y = R_y(0) = \alpha\frac{N_0}{4}$

הגדרה   הצבה

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(F)dF = \alpha\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2F^2}dF$$

פתרון במישור התדר (פחות מומלץ)

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\alpha}{2\pi}}{\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + F^2}dF \qquad \leftarrow \int \frac{a}{a^2 + x^2}dx = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

צורה מתאימה לטבלת אינטגרלים

חישוב

$$= \alpha\frac{N_0}{4}\frac{1}{\pi}\arctan\left(F\frac{2\pi}{\alpha}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \alpha\frac{N_0}{4}\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

הגדרה   סימטריה   חלק שני של סעיף ב'

$$P = \int_{-F_0}^{F_0} S_y(F)dF = 2\int_{0}^{F_0} S_y(F)dF$$

$$= 2\alpha\frac{N_0}{4\pi}\arctan\left(F\frac{2\pi}{\alpha}\right)\Big|_{0}^{F_0} = 2\alpha\frac{N_0}{4\pi}\arctan\left(\frac{2\pi F_0}{\alpha}\right)$$

סופי F_0

במקום ∞ ← F_0

(ג) פרמטרי התפלגות של $y(t)$ והסתברות $\Pr(y(t) > 3)$.

מהו אחוז הזמן שהאות נמצא מעל ערך 3

(ד) הסתברות $\Pr\Big(\underbrace{[y(t_1) + y(t_2)]}_{\substack{\text{התפלגות גאוסית} \\ \text{סכום של מ"א גאוסים} \\ \text{בגלל התפלגות גאוסית} \\ \text{משותפת (הרצאה 5)}}} > 3\Big)$.

אם מתפלג גאוסית

$$y(t) \sim N\Big(\underbrace{E[y(t)]}_{=0}, \mathrm{Var}[y(t)] = C_y(0) = \alpha\frac{N_0}{4} = P_y\Big) \rightarrow R_y(0)$$

תוחלת   שונות ע"פ חישוב לעיל   בגלל תוחלת $=0$

$$y(t) \sim N(0, P_y) \Rightarrow \Pr(y(t) > 3) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{P_y}}\right)$$

$E[y(t_1) + y(t_2)] = 0$ תוחלת

שונות

$$\mathrm{Var}[y(t_1) + y(t_2)] = \mathrm{Var}[y(t_1)] + 2\mathrm{Cov}[y(t_1), y(t_2)] + \mathrm{Var}[y(t_2)]$$

$$= P_y + \overset{\text{סעיף א'}}{2C_y(\tau)} + P_y = 2P_y\left(1 + \exp(-\alpha\tau)\right)$$

תזכורת

$$\boxed{\mathrm{Var}[X \pm Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \pm 2\mathrm{Cov}[X, Y]}$$

$$\Pr\Big([y(t_1) + y(t_2)] > 3\Big) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{2P_y\left(1 + \exp(-\alpha\tau)\right)}}\right)$$

(ה) פרמטרי התפלגות של $Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_3) \end{bmatrix}$.

התפלגות גאוסית דו ממדית משותפת

$$Y \sim N(\mu_Y, C_Y)$$

תוחלות

$$\mu_X = \begin{bmatrix} E[y(t_1)] \\ E[y(t_2)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow E[y(t_1)] = E[y(t_2)] = 0$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} C_y(0) & C_y(\tau = t_1 - t_2) \\ C_y(\tau) & C_y(0) \end{bmatrix} \qquad \leftarrow C_y(\tau) = R_y(\tau) = \alpha\frac{N_0}{4}\exp(-\alpha\tau)$$

רעש צר-סרט (זמן רציף)

רעש צר-סרט גאוסי מתקבל אחרי העברת רעש לבן במסנן LPF או BPF מהצורה

$$H(F)=\begin{cases}1 & F\in B\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases},$$

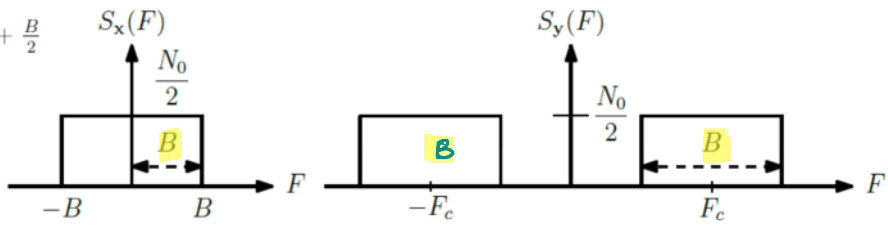
B = רוחב ספקטראלי של המסנן

$$S_{\mathrm{x}}(F)=\begin{cases}\frac{N_0}{2} & |F|\leqslant B\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\qquad(10.5)$$

$$S_{\mathrm{y}}(F)=\begin{cases}\frac{N_0}{2} & F_c-\frac{B}{2}\leqslant|F|\leqslant F_c+\frac{B}{2}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מוצא של LPF

מוצא של BPF



? תכונות: הספק מוצא, אוטו-קורלציה והתפלגות מוצא (התפלגות גאוסית)

$$E[\mathrm{x}(t)]=E[\mathrm{y}(t)]=0$$

$$P_{\mathrm{x}}=\int_{2B}S_{\mathrm{x}}(F)dF=\int_{2B}\frac{N_0}{2}dF=2B\frac{N_0}{2}=N_0B=R_{\mathrm{x}}(0)$$

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{x}}(\tau)&=\mathscr{F}^{-1}\{S_{\mathrm{x}}(F)\}\\&=\frac{N_0}{2}\int_{-B}^{B}\exp(j2\pi F\tau)dF=\frac{N_0}{2}\frac{e^{j2\pi B\tau}-e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau}\\&=\frac{N_0}{2}\frac{1}{\pi\tau}\sin(2\pi B\tau)=N_0B\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}\\&=N_0B\,\mathrm{sinc}(2\pi B\tau)=C_{\mathrm{x}}(\tau)\end{aligned}$$

$$\mathrm{x}(t)\sim N\left(0,\sigma_{\mathrm{x}}^2=C_{\mathrm{x}}(0)=P_{\mathrm{x}}=N_0B\right)$$

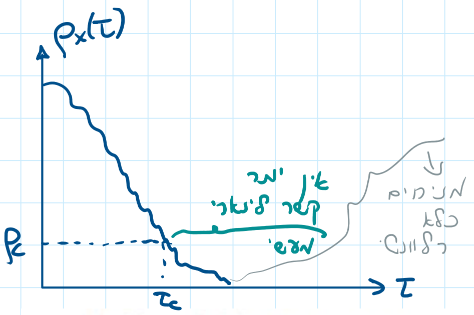
$$P_{\mathrm{y}}=\int_{2B}S_{\mathrm{y}}(F)dF=\int_{2B}\frac{N_0}{2}dF=2B\frac{N_0}{2}=N_0B=R_{\mathrm{y}}(0)$$

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{y}}(\tau)&=\mathscr{F}^{-1}\{S_{\mathrm{y}}(F)\}=N_0B\frac{\sin(\pi B\tau)}{2\pi B\tau}\left(e^{-2\pi F_c\tau}+e^{2\pi F_c\tau}\right)\\&=N_0B\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau}\cos(2\pi F_c\tau)\\&=N_0B\,\mathrm{sinc}(\pi B\tau)\cos(2\pi F_c\tau)=C_{\mathrm{y}}(\tau)\end{aligned}$$

$$\mathrm{y}(t)\sim N\left(0,\sigma_{\mathrm{y}}^2=C_{\mathrm{y}}(0)=P_{\mathrm{y}}=N_0B\right)$$

ביטויים זהים

$F_c=B/2$



במקרה של sync לפי

זמן קורלציה

זמן קורלציה עבור האות $\mathrm{x}(t)$ הוא ערך הכי קטן של τ_c, עבורו מתקיים

$$\rho_{\mathrm{x}}(\tau_c)\approx\rho_c\quad(0.1,\exp(-1),0.5)$$

$0.36\approx\frac{1}{e}$

$$\rho_x(\tau)=\frac{C_x(\tau)}{C_x(0)}$$

מקדם קורלציה בין זוג ערכים בהפרש τ בזמן

כאשר $C_{\mathrm{x}}(\tau_c=\frac{1}{2B})=0$, ניתן להניח עבור $\tau\geqslant\tau_c$, שמתקיים $R_{\mathrm{x}}(\tau)=C_{\mathrm{x}}(\tau)\approx0$.
באופן כללי, זוהי הנחה מקובלת עבור המקרים בהם פונקציה אוטו-קורלציה החוצה את ערך ה-0.