10.3 (חיזוי לינארי) נתון תהליך $\mathbf{x}[n]$, בעל תכונות הבאות: סטציאונרי, גאוסי,

לא רעש לבן!

$$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = 0$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = 4\exp\left(-|k|\right)$$

נתון תהליך אקראי

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{x}[n] + 2\mathbf{x}[n-2]$$

(א) חשב הסתברות עבור $p\left(\mathbf{x}[n] < 4\right)$.

(ב) מהו ערך מספרי של מקדם קורלציה בין משתנים אקראיים $\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[3]$?

(ג) נתון תהליך אקראי $\mathbf{w}[n] = \mathbf{x}^2[n]$. חשב $E\left[\mathbf{w}[n]\right]$.

(א) מדובר בתהליך אקראי גאוסי בעל תוחלת ושונות מוגדרים. חישוב ההסתברות הוא בהתאם.

התפלגות $\mathbf{x}[n] \sim N\left(\mu_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}[n]] = 0, \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = C_{\mathbf{x}}[0] = R_{\mathbf{x}}[0] = 4\right)$

$$p\left(\mathbf{x}[n] > a\right) = Q\left(\frac{a-\mu_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}\right)$$

$$p\left(x[n] < a\right) = 1 - Q\left(\frac{4}{2}\right) = 1 - Q(2) \cong 0.977$$

(ב) בהתאם להגדרה של מקדם קורלציה בין הדגימות של תהליך WSS

הפרש זמנים

$$\rho = \frac{C_{\mathbf{x}}[3-1]}{C_{\mathbf{x}}[0]} = \frac{R_{\mathbf{x}}[2]}{R_{\mathbf{x}}[0]} = e^{-2}$$

(ג) מדובר בחישוב הספק

הגדרה של הספק של $x[n]$

$$E\left[\mathbf{w}[n]\right] = E\left[\mathbf{x}^2[n]\right] = R_{\mathbf{x}}[0] = P_{\mathbf{x}} = 4$$

(ד) הוכח, ש-$\mathbf{y}[n]$ הינו תהליך WSS.

(ה) חשב הסתברות עבור $p\left(\mathbf{y}[n] > 4\right), p\left(\mathbf{y}[n] < 4\right)$.

(ו) מהי מטריצת covariance בין משתנים אקראיים $\mathbf{y}[1], \mathbf{y}[3]$? ניתן להשאיר את התשובה כפונ' של $R_{\mathbf{x}}[k]$ בלי להגיע לערך מספרי.

הפרש זמן של 2

(ד) מדובר במערכת FIR, שתמיד יציבה, מהצורה

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{x}[n] * h[n] = \mathbf{x}[n] * \left\{1, 0, 2\right\}$$

$$= \mathbf{x}[n] * \left(\delta[n] + 2\delta[n-2]\right)$$

דרך ב': הוכחה לפי הגדרה

$$\mu_y = \text{const}$$

$$R_y[n, n+k] = E_y\left[y[n]y[n+k]\right] = R_y[k]$$

(ה) חישוב ההסתברות מתבסס על תכונות של הסתברות גאוסית של $\mathbf{y}[n] \sim N\left(\mu_{\mathbf{y}}, \sigma_{\mathbf{y}}^2\right)$.

$$\mu_{\mathbf{y}} = E\left[\mathbf{y}[n]\right] = \cancel{\mu_{\mathbf{x}}}^{0}\sum_m h[m] = 0$$ משוואה (9.2)

תישוב מקדים לחישוב σ_y^2

$$R_{\mathbf{y}}[k] = E\left[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]\right]$$

הצבה

$$= E\left[\left(\mathbf{x}[n] + 2\mathbf{x}[n-2]\right)\cdot\overbrace{\left(\mathbf{x}[n+k] + 2\mathbf{x}[n-2+k]\right)}^{y[n+k]}\right]$$

פתיחת סוגריים

$$= \underbrace{E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[k]} + 2R_{\mathbf{x}}[k-2] + 2R_{\mathbf{x}}[k+2] + 4R_{\mathbf{x}}[k]$$

פתיחת סוגריים

$$= \underbrace{E\big[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\big]}_{R_{\mathbf{x}}[k]} + 2R_{\mathbf{x}}[k-2] + 2R_{\mathbf{x}}[k+2] + 4R_{\mathbf{x}}[k]$$

$$= 5R_{\mathbf{x}}[k] + 2R_{\mathbf{x}}[k-2] + 2R_{\mathbf{x}}[k+2]$$

חישוב ע"פ תכונות מערכות

$$= R_{\mathbf{x}}[k] * h[n] * h[-n] \quad \leftarrow \text{דרך נוספת}$$

$$= R_{\mathbf{x}}[k] * \underbrace{(\delta[n] + 2\delta[n-2]) * (\delta[n] + 2\delta[n+2])}_{2\delta[n-2]+5\delta[n]+2\delta[n+2]}$$

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = \mathrm{Var}[\mathbf{y}[n]] = C_{\mathbf{y}}[0] = R_{\mathbf{y}}[0]$$

$$= 5R_{\mathbf{x}}[0] + 2R_{\mathbf{x}}[2] + 2R_{\mathbf{x}}[-2]$$

$$= 5R_{\mathbf{x}}[0] + 4R_{\mathbf{x}}[2] = 20 + 16e^{-2} \cong 4.71^2$$

$$p\left(\mathbf{y}[n] < a\right) = 1 - Q\left(\frac{a-\mu_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right) = 1 - Q\left(\frac{4}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right)$$

$$p\left(\mathbf{y}[n] > a\right) = Q\left(\frac{a-\mu_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right) = Q\left(\frac{4}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right) \cong 0.19$$

(ו) בהתאם להגדרה

הפרש זמנים של 2

$$C_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[\mathbf{x}[1]] & \mathrm{Cov}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[3]] \\ \mathrm{Cov}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[3]] & \mathrm{Var}[\mathbf{x}[3]] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[2] \\ R_{\mathbf{x}}[2] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix}$$

(ז) חשב $R_{\mathbf{xy}}[n, n+k]$. האם תהליכים $\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ח) מעוניינים לעשות חיזוי לינארי של $\mathbf{x}[n]$ מתוך $\mathbf{y}[n]$. עבור חיזוי מהצורה

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a_0\mathbf{y}[n] + a_1\mathbf{y}[n-1]$$

חשב פרמטרית את הערכים של a_0, a_1 כפונקציה של $R_{\mathbf{x}}[k]$.

(ז) התהליכים הם סטציאונריים במשותף, בגלל שמדובר במערכת יציבה.

$$R_{\mathbf{xy}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k] * h[n]$$

$$= R_{\mathbf{x}}[k] * (\delta[n] + 2\delta[n-2])$$

$$= R_{\mathbf{x}}[k] + R_{\mathbf{x}}[k-2]$$

כמובן חישוב לפי הגדרה נותן תוצאה זהה:

הגדרה

$$R_{\mathbf{xy}}[k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]]$$

הצבה

$$= E\Big[\mathbf{x}[n]\left(\mathbf{x}[n+k] + 2\mathbf{x}[n-2+k]\right)\Big]$$

$$= \underbrace{E\big[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\big]}_{R_{\mathbf{x}}[k]} + 2E\big[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-2+k]\big]$$

(ח) המינימום של שגיאה ריבועית ממוצעת מתקבל ע"י

שגיאה ריבועית ממוצעת

$$mse = E\Big[\left(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1]\right)^2\Big]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_0}mse = 2E\Big[\left(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1]\right)\cdot\left(-\mathbf{y}[n]\right)\Big]$$

$$\Rightarrow R_{\mathbf{xy}}[-1] = a_0R_{\mathbf{y}}[0] + a_1R_{\mathbf{y}}[1]$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}mse = 2E\Big[\left(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1]\right)\cdot\left(-\mathbf{y}[n-1]\right)\Big]$$

$$\Rightarrow R_{\mathbf{xy}}[-2] = a_0R_{\mathbf{y}}[1] + a_1R_{\mathbf{y}}[0]$$

$$R_{\mathbf{xy}}[-1] = R_{\mathbf{x}}[-1] + R_{\mathbf{x}}[-1-2] = R_{\mathbf{x}}[1] + R_{\mathbf{x}}[3]$$

$$R_{\mathbf{xy}}[-2] = R_{\mathbf{x}}[-2] + R_{\mathbf{x}}[-2-2] = R_{\mathbf{x}}[2] + R_{\mathbf{x}}[4]$$

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{y}}[0] & R_{\mathbf{y}}[1] \\ R_{\mathbf{y}}[1] & R_{\mathbf{y}}[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[1] + R_{\mathbf{x}}[3] \\ R_{\mathbf{x}}[2] + R_{\mathbf{x}}[4] \end{bmatrix}$$