מערכות LTI - זמן רציף

$$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$$

הגדרה של אינטגרל קונבולוציה

$$\mathbf{y}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)h(s)ds$$

סימון למעבר דרך מערכת LTI

סימון עזר $y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

קשר בין סטציונריות ל LTI

תהליך סטציונרי $f_x(x;t) = f_x(x;t+c)$ PDF

קביעות בזמן: $\mathcal{L}\{x(t+c)\} = y(t+c)$

פעולה של מערכת לא מושפעת מהזזה של זמן

כניסה WSS (תכונה 8.1): התהליך במוצא של מערכת LTI יציבה הוא WSS, אם ורק אם התהליך בכניסה הוא WSS. בנוסף, כניסה ומוצא הם WSS במשותף.

כניסה סטציונרית $\Leftarrow$ מוצא סטציונרי + סטציונריים במשותף

תכונה+דוגמה: תוחלת של $y(t)$, כאשר $x(t)$ הוא ס"ט.

הגדרה:

$$E[\mathbf{y}(t)] = E\left[\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}(t-s)ds}^{\text{הגדרה } y(t)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)E[\mathbf{x}(t-s)]\, ds$$

$= E[x(t)] = \mu_x =$ קבוע

ניתן לשנות סדר אינטגרציה

$$= \mu_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = \mu_{\mathbf{x}} \underbrace{H(F=0)}_{\text{תגובת אמפליטודה בתדר DC}}$$

$$H(F) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

קשר בין כניסה למוצא - מישור הזמן

Cross-correlation

$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$ הגדרה

הצבה של הגדרה של $y(t+\tau)$: $= E\left[\mathbf{x}(t)\left(\mathbf{x}(t+\tau) * h(t)\right)\right]$

רישום של קונבולוציה ע"י אינטגרל: $= E\left[\mathbf{x}(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}(t-s+\tau)ds\right]$

שינוי מיקום אינטגרל ותוחלת: $= \int^{\infty} h(s)E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau-s)]\, ds$

ללא הוכחה:

$$C_{\mathbf{xy}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$
$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{yx}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

שינוי מיקום אינטגרל ותוחלת $= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \underbrace{E\left[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau-s)\right]}_{R_x(\tau-s)} ds$

$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

שמים לב, שמדובר בקונבולוציה $= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) R_{\mathbf{x}}(\tau - s) ds = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$

סיכום: הקשרים מבוססים תכונות את כניסה מקורי ושימוש שלו ע"י חישוב קונבולוציה עם תגובה להלם של המערכת

$$S_{\mathbf{xy}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\, H(F) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$
$$S_{\mathbf{yx}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\, H^*(F)$$
$$S_{\mathbf{y}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\, H(F) H^*(F) = S_{\mathbf{x}}(f)\, |H(F)|^2$$

תכונות במישור התדר:

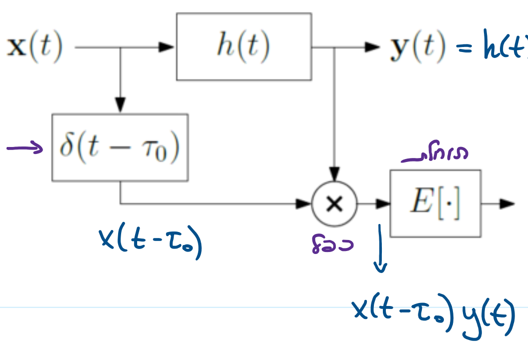
מבוסס על:

* $H^*(f) = \mathcal{F}\{h(-\tau)\}$
* קונב' בזמן = מכפלה בתדר

$$P_x = R_{\mathbf{x}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)\, dF$$
$$P_y = R_{\mathbf{y}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S_{\mathbf{x}}(F)\, |H(F)|^2}_{S_y(F)} dF$$

* הספק הוא שטח מתחת לגרף של PSD

דוגמה: הסבר, איך בעזרת המערכת ניתן לזהות $h(t)$. $x(t) \sim N(0,1)$ רעש לבן גאוסי.



הצבה ב τ_0 של משהו Co.

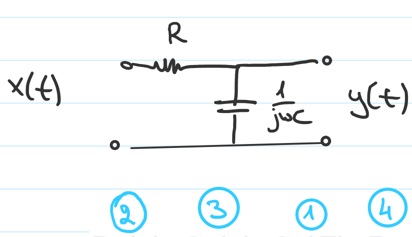
$$E\left[\mathbf{x}(t-\tau_0)\mathbf{y}(t)\right] = \underbrace{E\left[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau_0)\right]}_{R_{xy}(\tau_0)}$$

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau_0) = \underbrace{R_{\mathbf{x}}(\tau)}_{\delta(\tau)} * h(\tau)\Big|_{\tau=\tau_0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) R_x(\tau - s) ds, \quad \tau = \tau_0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(\tau_0 - s) ds = h(\tau_0)$$

לסיכום, ניתן לקבל ערכים של $h(t = \tau_0)$ ע"י שינוי ערכי τ_0. שונים.

לוקחים הרבה ערכי τ_0 שונים ומחשבים $h(\tau_0)$ עבור כל אחד ואחד



$R_x(\tau)$ $C_x(\tau)$ $S_x(F)$ P_x

דוגמה:

$x(t)$ הוא רעש לבן גאוסי

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$
$$S_{\mathbf{x}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

סימון

$$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$
$$S_x(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

$$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

$$E[x(t)]=0$$

2 3 1 4

מצא $R_y(\tau), C_y(\tau), S_y(F), P_y$

פתרון: * ניתוח של מערכת תדר:

$$H(F) = \frac{\frac{1}{j2\pi FC}}{R+\frac{1}{j2\pi FC}} = \frac{1}{1+j2\pi RCF} = \frac{1/RC}{1/RC + j2\pi F}$$

זמן:

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)u(t) \qquad \exp(-at)u(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi F}$$

1

$$S_y(F) = S_x(F)\left|H(F)\right|^2 = \frac{N_0/2}{1+(2\pi RCF)^2} = \frac{1}{2}\frac{N_0}{2}\frac{2\frac{1}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\pi^2F^2}\cdot\frac{1}{RC} \leftarrow \exp(-a|t|) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2F^2}$$

2

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(F)\} = \frac{N_0}{4RC}\exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

3

$$\boxed{C_y(\tau) = R_y(\tau) - \cancel{\mu_y^2}} \quad \mu_y = E[y(t)] = E[\cancel{x(t)}]\int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = 0$$

4

א ב

$$P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)\left|H(F)\right|^2 dF$$

א

$$P_y = R_y(0) = \frac{N_0}{4RC}$$

ב

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_y(F)dF = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0/2}{1+(2\pi RCF)^2}\,df \qquad \int\frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$a = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi RC}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi RC}\right)^2+F^2}\,df$$

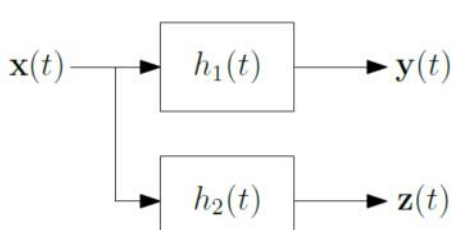
$$= \frac{N_0}{2}\frac{\operatorname{atan}(2\pi RCF)}{2\pi RC}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi RC}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

א & ב זהה

* הערה: הספק של $x(t)$ הוא אינסופי! / $y(t)$ הוא סופי! [סימון רעש בתדר!

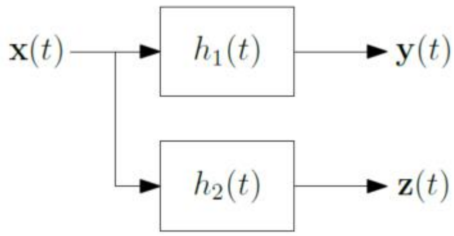
מערכות שונות (תכונה 8.5): עבור תהליך $\mathbf{x}(t)$, העובר דרך 2 מערכות שונות,

קשרים בין $y(t)$ ל $z(t)$:



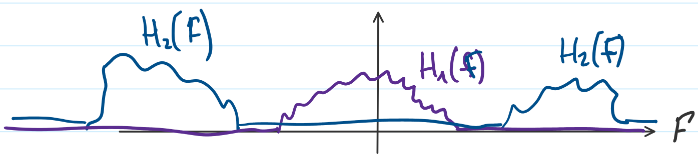
$$R_{yz}(\tau) = R_x(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau)$$
$$S_{yz}(F) = S_x(F)H_1^*(F)H_2(F)$$

מערכות שונות (תכונה 8.5): עבור תהליך $\mathbf{x}(t)$, העובר דרך 2 מערכות שונות,



קשרים בין $y(t)$ ל- $z(t)$:

$$R_{\mathbf{yz}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau)$$
$$S_{\mathbf{yz}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F) H_1^*(F) H_2(F)$$



הערות:

אין חפיפה בין H_1 ל-H_2

$\Rightarrow S_{yz}(F)=0 \Rightarrow R_{yz}(\tau)=0$

$\Downarrow$

$y(t), z(t)$ הם אורתוגונליים

$$\mu_z = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = \mu_x H_z(F = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) = 0$$

$\Downarrow$

חסרי קורלציה

$$C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) - \mu_y \cancel{\mu_z} = R_{yz}(\tau)$$

ואם $x(t)$ גאוסי

$\Downarrow$

בלתי תלויים

סיכום: * מעבר דרך מערכת יוצר 2 אותות חסרי קורלציה (בלתי תלויים)

* באופן כללי, מעבר דרך מערכות שונות מבטל קשר בין האותות מוצא

$\Leftarrow$ לדוגמה מספר תחנות רדיו, הרעש במקלט יהיה שונה וחסר קורלציה, אפילו אם מדובר במקור רעש משותף

תהליכים גאוסיים

הגדרה: תהליך $x(t)$ הוא גאוסי, אם ורק אם ל- $x(t_N), \dots, x(t_1)$ ישנה התפלגות גאוסית משותפת. במקרה שלנו נסתפק בנתות עבור $N=2$ (WSS).

דוגמה 8.3: נתון תהליך גאוסי $\mathbf{x}(t) \sim N(\underbrace{\mu}_{\text{תוחלת}}, \underbrace{\sigma^2}_{\text{שונות}})$ עם פונקציה ידועה $C_{\mathbf{x}}(\tau)$. מהי התפלגות משותפת של $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, כאשר $X_1 = \mathbf{x}(t_1), X_2 = \mathbf{x}(t_2)$?

$x(t_1) \sim N(\mu, \sigma^2)$

$x(t_2) \sim N(\mu, \sigma^2)$

התפלגויות שוליות

פתרון:

$$\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, \underbrace{C_{\mathbf{X}}}_{\text{מטריצת Cov}})$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix} \begin{matrix} \to E\{x(t_1)\} \\ \to E\{x(t_2)\} \end{matrix}$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}(\tau) \\ C_{\mathbf{x}}(\tau) & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} = \sigma^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{x}}(\tau) \\ \rho_{\mathbf{x}}(\tau) & 1 \end{bmatrix}}_{\text{גרסה מנורמלת}}$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}(\tau) \\ C_{\mathbf{x}}(\tau) & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{x}}(\tau) \\ \rho_{\mathbf{x}}(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}[X_1, X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_2, X_1] & \mathrm{Cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1, X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_1, X_2] & \mathrm{Var}[X_2] \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)}$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$

$\mathrm{Cov}[x_1, x_2] \Rightarrow C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau)$

מעבר דרך מערכת LTI

* תהליך גאוסי, העבור דרך מערכת LTI, נשאר גאוסי

* תוחלת

$$E[\mathbf{y}(t)] = E[\mathbf{x}(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds$$
$$= E[\mathbf{x}(t)]H(0), \quad H(F) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

* מטריצת cov ע"י $C_y(t)$ במקום $C_x(t)$

$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

נחזור לדוגמה של מסנן RC:

מצא פרמטרי התפלגות של $\mathbf{y}(t)$ והתפלגות של $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(3) \end{bmatrix}$.

פתרון: הקדמה: פרמטרי התפלגות של $x(t)$ והתפלגות של $X = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix}$

$\tau = 3 - 1 = 2$

$x(t) \sim N(0, \sigma^2)$ $\qquad X \sim N(\mu_{\underline{x}}, C_{\underline{x}})$

$C_x(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$ $\qquad \mu_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} E[x(1)] \\ E[x(3)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad C_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} C_x(0) & C_x(\tau) \\ C_x(\tau) & C_x(0) \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y}(t) \sim N\left(E[\mathbf{y}(t)], C_{\mathbf{y}}(0)\right) = N\left(0, \frac{N_0}{4RC}\right)$$

הערה: במקרה שלנו $C_y(0) = R_y(0) = P_y = \sigma^2$

$$\mathbf{Y} \sim N(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}})$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[\mathbf{y}(1)] \\ E[\mathbf{y}(3)] \end{bmatrix} \quad \leftarrow E[\mathbf{y}(1)] = E[\mathbf{y}(3)] = 0$$

$$C_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{y}}(0) & C_{\mathbf{y}}(\tau = 3-1) \\ C_{\mathbf{y}}(2) & C_{\mathbf{y}}(0) \end{bmatrix} \quad \leftarrow C_{\mathbf{y}}(2) = R_{\mathbf{y}}(2) = \frac{N_0}{4RC}\exp\left(-\frac{2}{RC}\right)$$