צפיפות הספק ספקטראלית Power Spectral Density (PSD)

מטרה: "לגזור" במישור התדר של אותות אקראיים סטציונריים

רקע: התמרת פורייה של אות אקראי היא חסר משמעות פיזיקלית

התמרת פוריה בזמן רציף (הגדרה 6.4): התמרת פוריה של אות $x(t)$ בזמן רציף נתונה ע"י

$$X(F) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt, \quad (6.21)$$

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$.

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.5): התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

$\omega = 2\pi f$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi fn}, \quad (6.22)$$

כאשר f הוא תדר מנורמל.

הגדרה:

$$S_{\mathbf{x}}(F) = \mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}}(\tau)\}$$

$$S_{\mathbf{x}}(f) = \text{DTFT}\{R_{\mathbf{x}}[k]\}$$

אות - קורלציה ← לא אקראי

* משפט Wiener–Khinchin–Einstein.
* יחידות: $\frac{W}{Hz}$ או $\frac{V^2}{Hz}$

הערה: עבור אות לא אקראיים, צפיפות הספק ספקטראלית נתונה ע"י

$$S_x(F) = |X(jF)|^2 = X(jF)\cdot X(jF)^*$$

צמוד קומפלקסי.

דוגמה: נתון אות מאופנן DSB מהצורה

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)\sin(2\pi F_0 t + \theta),$$

אות אקראי WSS, ידוע $R_x(\tau)$, בלתי תלוי ב-θ

$\theta \sim U[-\pi,\pi]$ התפלגות אחידה

נדרש:
* להראות ש-$z(t)$ הוא WSS
* חשב $S_z(F)$

פתרון:

* ① $E[\mathbf{z}(t)] = E[\mathbf{x}(t)]\cdot E[\sin(2\pi F_0 t + \theta)] = 0$ ✓ קבוע בזמן

② $R_{\mathbf{z}}(t, t+\tau) = E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+\tau)]$ ← הגדרה

הצבה $= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)]\cdot E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0\tau) - \frac{1}{2}\cos(2\pi F_0[2t+\tau] + 2\theta)\right]$

$E[\ldots] = 0$, לא אקראי.

$= \frac{1}{2}R_{\mathbf{x}}(\tau)\cos(2\pi F_0\tau)$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{R_{\mathbf{x}}(\tau)\cos(2\pi F_0 \tau)}$$

לא אקראי.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{עבור X,Y בלתי תלויים} \\ E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]\end{array}}$$

הגם בלתי תלוי ב t ? =

הגם תלוי ב τ בלבד ?

$$\cos(2\pi F_0 \tau) = \frac{e^{j2\pi F_0 \tau} + e^{-j2\pi F_0 \tau}}{2}$$

הכפלה בזמן = הזזה בתדר

$$* \quad S_z(F) = \frac{1}{4}\left[S_{\mathbf{x}}(F - F_0) + S_{\mathbf{x}}(F + F_0)\right] \quad \leftarrow S_x(F) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

קשר להספק:

הספק ממוצע (הגדרה 6.7): הספק ממוצע של האות מוגדר ע"י

אינטגרציה על כל התדרים של צפיפות ההספק

$$P_{\mathbf{x}} = E\left[\mathbf{x}^2(t)\right] = R_{\mathbf{x}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F)dF$$

$$P_{\mathbf{x}} = E\left[\mathbf{x}^2[n]\right] = R_{\mathbf{x}}[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{\mathbf{x}}(f)df$$

תזכרה לדוגמה: חשב הספק P_z

הרצאה הקודמת

$$P_{\mathbf{z}} = \overset{\tau=0}{R_{\mathbf{z}}(0)} = \frac{R_{\mathbf{x}}(0)}{2} = \frac{P_x}{2}$$

תכונות נוספות:

$$S_{\mathbf{x}}(F) = S_{\mathbf{x}}(-F)$$
$$S_{\mathbf{x}}(F) \geqslant 0, \ \forall F$$
$$S_{\mathbf{x}}(F) \in \mathbb{R}$$
$$S_{\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{x}}(-f)$$
$$S_{\mathbf{x}}(f) \geqslant 0, \ \forall f$$
$$S_{\mathbf{x}}(f) \in \mathbb{R}$$

ממשי, חיובי, סימטרי (עבור אות ממשי)

רעש לבן גאוסי

רעש לבן (הגדרה 6.8): תהליך אקראי WSS, עבורו מתקיים

$$E\left[\mathbf{n}(t)\right] = 0 \qquad \mathbf{n}(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$R_{\mathbf{n}}(t_1, t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2 \leftrightarrow R_{\mathbf{n}}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$$

$$R_{\mathbf{n}}[n_1, n_2] = 0 \quad n_1 \neq n_2 \leftrightarrow E\left[\mathbf{n}[n]\right] = 0$$

$$R_{\mathbf{n}}[k] = \sigma^2\delta[k]$$

צפיפות ההספק:

$$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$$

סימון מקובל

קיים בכל תדר בצפיפות <u>אחידה</u>

$$R_{\mathbf{n}}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

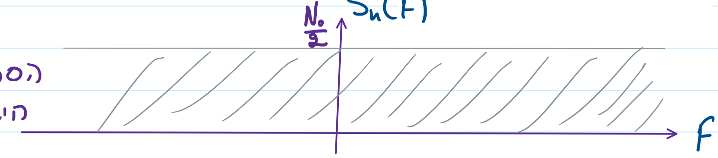
$$S_{\mathbf{n}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

$$S_{\mathbf{n}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

F.

$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$ מקובל

* הספק ממוצע אינסופי

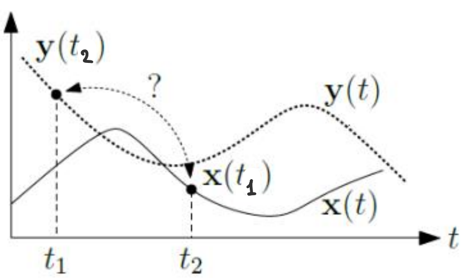


הספק ממוצע היא שטח מתחת ל $S_n(F)$

הערה 6.5 ! רעש לבן תאורטי הוא בעל הספק אינסופי. דוגמה מעשית לרעש כזה הוא רעש טרמי (Johnson-Nyquist noise) שמקורו בתנועה אקראית של נושאי מטען חשמלי (אלקטרונים) במוליך. צפיפות הספק ספקראלית של הרעש טרמי היא $\frac{N_0}{2} \approx 1.7 \times 10^{-20} R \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$, כאשר R הוא גודל הנגד. הרעש זה מתקיים עד לתדרים של $10^{13} Hz$, ויכול להיות משמעותי עבור אותות ברוחב פס גדול.

קשר בין תהליכים

<u>מטרה</u>: לאפיין קשר בין $x(t_1)$ לבין $y(t_2)$



$p(x(t_1) = a) = 0$
כל קבוע

הגדרות:

קרוס-קורלציה (הגדרה 7.1): עבור תהליכים אקראיים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$

$$R_{\mathbf{xy}}(\underbrace{t_1, t_2}_{\text{זמנים}}) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)\right]$$

$$R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{y}[n_2]\right]$$

אוטו-קורלציה: מקרה פרטי של קרוס קורלציה $R_{xx}(t_1,t_2)$

זמנים של התאמה

אם ורק אם

אורטוגונליים (הגדרה 7.2): עבור תהליכים אקראיים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ אורטוגונליים מתקיים

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$$

$$R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1, n_2.$$

Cross-covariance (הגדרה 7.3): עבור תהליכים אקראיים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$

$C_{xx}(t_1,t_2)$ ($y=x$)

(א7.3) $$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{y}(t_2)]$$

(ב7.3) $$C_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] - E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] E\left[\mathbf{y}[n_2]\right]$$

חוסרי קורלציה (הגדרה 7.4): עבור תהליכים אקראיים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ חוסרי קורלציה מתקיים

= אין קשר לינארי

(א7.4) $$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$$

(ב7.4) $$C_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1, n_2$$

$\Uparrow$

בלתי תלויים (הגדרה 7.5): עבור $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ בלתי תלויים מתקיים

תהליכים בלתי תלויים הם גם חסרי קורלציה.

$\Updownarrow$ פרט למקרה של התפלגות גאוסית משותפת. ואז הקשר הוא ...

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{y}(t_2)]$$

⇕ פרט למקרה של התפלגות גאוסית משותפת, ואז הקשר הינו דו כיווני

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]\cdot E[\mathbf{y}(t_2)]$$
$$R_{\mathbf{xy}}[n_1,n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\right]\cdot E\left[\mathbf{y}[n_2]\right]$$

תהליכים סטציונריים במשותף (הגדרה 7.6): ניתן להגדיר סטציונריות משותפת (joint-WSS) בין תהליכים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$, אם ורק אם מתקיימים **כל** התנאים להלן:

1. $\mathbf{x}(t)$ סטציונרי (WSS)
2. $\mathbf{y}(t)$ סטציונרי (WSS)
3. מתקיים הקשר

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$
$$R_{\mathbf{xy}}[k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]\right].$$

$$R_{yx}(\tau) = E\left[y(t)\,x(t+\tau)\right]$$

תזכורת

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(-\tau) &= R_{\mathbf{x}}(\tau) \\ R_{\mathbf{x}}[-k] &= R_{\mathbf{x}}[k] \end{aligned}} \rightarrow$$

תכונה: "סימטריה"

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = R_{\mathbf{yx}}(-\tau)$$
$$R_{\mathbf{xy}}[k] = R_{\mathbf{yx}}[-k]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{xy}}(\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] && \text{הגדרה} \\ &= E[\mathbf{x}(t-\tau)\mathbf{y}(t)] && \text{הזזה ב-}\tau \\ &= \underbrace{R_{\mathbf{yx}}(t-\tau,t)}_{\text{הגדרה}} = \underbrace{R_{\mathbf{yx}}(-\tau)}_{\text{הפרש זמן } -\tau} \end{aligned}$$

$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(t_2-t_1)$

$\neq R_{xy}(t_1-t_2)$

$\boxed{\tau = t_2 - t_1 \text{ בקורס שלנו}}$

יש ספרים $\tau = t_1 - t_2$

$$R_{yx}(-\tau) = R_{xx}(t, t-\tau) = \underbrace{R_{yx}(t-\tau, t)}_{\text{הזזה ב-}\tau}$$

Cross-covariance (תכונה 7.4):

$$C_{\mathbf{xy}}(\tau) = R_{\mathbf{xy}}(\tau) - \overbrace{\mu_{\mathbf{x}}}^{E[x(t)]}\mu_{\mathbf{y}}$$

מקדם קורלציה (הגדרה 7.7): מקדם קורלציה בין $\mathbf{x}(0)$ לבין $\mathbf{y}(\tau)$,

$x(t_1)$ לבין $y(t_2)$

$$\rho_{\mathbf{xy}}(\tau) = \frac{C_{\mathbf{xy}}(\tau)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(0)C_{\mathbf{y}}(0)}}$$

Cross-PSD (הגדרה 7.8):

$$S_{\mathbf{xy}}(F) = \mathcal{F}\left\{R_{\mathbf{xy}}(\tau)\right\}$$

סימטריה של PSD (תכונה 7.5): בשונה מתכונה 6.15, ובהתבסס על תכונה 7.2,

בהתאם לתכונות של התמרת פורייה

$$\left\{\begin{aligned} S_{\mathbf{xy}}(F) &= S_{\mathbf{yx}}(-F) = S^*_{\mathbf{xy}}(-F) \\ S_{\mathbf{xy}}(-F) &= S^*_{\mathbf{xy}}(F) \\ S_{\mathbf{yx}}(F) &= S^*_{\mathbf{xy}}(F) \end{aligned}\right.$$

coherence (הגדרה 7.9): מקדם קורלציה במישור התדר, בין $X(F)$ לבין $Y(F)$,

$$S_{\mathbf{xy}}(F)$$

coherence (הגדרה 7.9): מקדם קורלציה במישור התדר, בין $X(F)$ לבין $Y(F)$,

מטרה: לאפיין קשר בין התדרים שונים של אות

$$\gamma_{xy}(F) = \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}},$$

כאשר מתקיים $|\gamma_{xy}(F)| \leqslant 1$.

דוגמא: מטרה: מצא הפרש זמן בין זוג אותות אקראיים סט'.

נתון תהליך אקראי $x(t)$, סטציונארי, כאשר: $R_x(\tau)$ ידוע, $E[x(t)] = \mu_x = 0$,

$\Rightarrow E[y(t)] = 0$

נתון הקשר $\boxed{y(t) = x(t - t_0)}$

חשב $C_x(\tau), R_y(\tau), C_y(\tau), S_y(F), R_{xy}(\tau), C_{xy}(\tau), R_{yx}(\tau), C_{yx}(\tau),$
$\gamma_{xy}(F), \rho_{xy}(\tau), R_{yx}(-\tau) = R_{xy}(\tau)$,$S_{xy}(F), S_{yx}(F)$

1 הגדרה $C_x(\tau) = R_x(\tau) - \underbrace{\mu_x^2}_{=0} = R_x(\tau)$

2,3 $R_y(\tau) = R_x(\tau) = C_y(\tau)$ מתבסס על הגדרה של סט'

$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)]$
הצבה
$= E[x(t-t_0)x(t+\tau-t_0)]$
הפרש זמן הוא τ
$= R_x(\tau)$

4 $S_y(F) = S_x(F) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$

5
$$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$ הגדרה
$$= E[x(t)x(t+\tau-t_0)]$$ הצבה
$$= R_x(\underbrace{\tau - t_0}_{\text{הפרש זמנים}})$$

6 לפי הגדרה
$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \underbrace{\mu_x^2}_{0} = R_{xy}(\tau) = R_x(\tau - t_0)$$

7
$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)]$$ הגדרה
$$= E[x(t-t_0)x(t+\tau)]$$ הצבה
$$= R_x(\underbrace{\tau + t_0}_{\text{הפרש זמנים}}) = C_{yx}(\tau)$$ 8

$(t+\tau) - (t-t_0) = \tau + t_0$

9
$$R_{yx}(-\tau) = R_x(t_0 - \tau) = R_x(\tau - t_0) = R_{xy}(\tau)$$
הצבה של $-\tau$ במקום τ

10,11,12

$$S_{xy}(F) = S_x(F)e^{-j2\pi F t_0}$$ הזזה בזמן $= \mathcal{F}\{R_x(\tau - t_0)\}$

$$S_{yx}(F) = S_x(F)e^{j2\pi F t_0} = S_{xy}(-F)$$ הזזה בזמן בכיוון השני $\mathcal{F}\{R_x(\tau + t_0)\}$

$$\gamma_{xy}(F) = \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}} = e^{-j2\pi F t_0} \Longrightarrow |\gamma_{xy}(F)| = 1$$

(13)

$$\rho_{xy}(\tau) = \underbrace{\frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}}}_{\text{הגדרה}} = \underbrace{\frac{R_{xy}(\tau)}{R_x(0)}}_{\text{הצבה}} = \underbrace{\frac{R_x(\tau - t_0)}{R_x(0)}}_{\text{הצבה}}$$

$$\boxed{R_x(0) \geqslant |R_x(\tau)|}$$

עבור אות סט"ב
בזמן הסימן הוא >

$$\boxed{\text{מקסימום של } C_{xy}(\tau), \rho_{xy}(\tau) \text{ הוא עבור } \tau = t_0}$$

דוגמה מספרית: נתון אות $x[n]$, רעש לבן גאוסי, $n=0,..,10^6$

$$y[x] = x[n-\underbrace{50}_{n_0}]$$

N = 1e6; אורך של $x[n]$

x = randn(1,1e6); $x[n] \sim N(0,1)$

y = [x(51:end) zeros(1,50)]; $y[n] = x[n-50]$

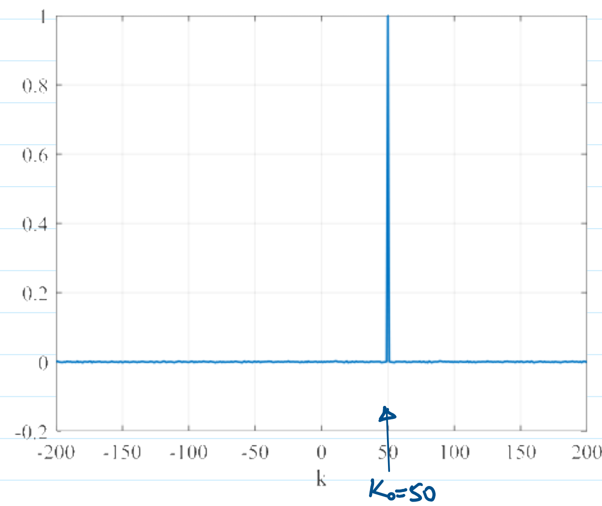
[C, lags] = xcov(x,y,200,'normalized'); חישוב של $C_{xy}[k]$

200 – ערך מקסימלי של k

'normalized' – מנורמל לערך מקסימלי 1

plot(lags,C)

k $C_{xy}[k]$



* הערה: בהזזה של 50 יש תיאום "מושלם"
בהזזה $\neq 50$ אין צורך לחכות, כי ערכי
הרעש בלתי-תלויים/חסרי-קורלציה
גאוס