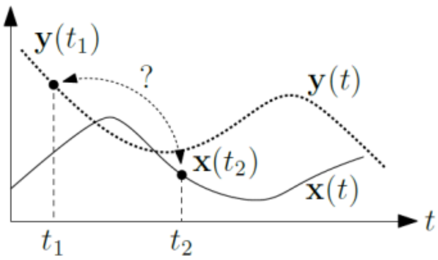
קשר בין תהליכים



מטרה: קשר בין $y(t_2)$, $x(t_1)$

$x(t_1)$ — את א' בזמן מסוים

$y(t_2)$ — את ב' בזמן מסוים (אחר)

$\boxed{\text{תזכורת: קשר בין } x(t_2) \text{ ל- } x(t_1)}$

* cross-correlation

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)\right]$$

$$R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{y}[n_2]\right]$$

את א'
את ב'
זמן של את א'
זמן של את ב'

מצב מיוחד: אורתוגונליות

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0$$

$$R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = 0$$

auto-correlation מקרה פרטי של cross-cor.

$R_{xx}(t_1,t_2)$ או בקיצור $R_x(t_1,t_2)$

* **Cross-covariance** (הגדרה 7.2):

$$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{y}(t_2)]$$

$$C_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] - E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] E\left[\mathbf{y}[n_2]\right]$$

מצב מיוחד: חוסר קורלציה

$$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0$$

$$C_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = 0$$

* **בלתי תלויים** (הגדרה 7.5): עבור $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{y}(t_2)$ בלתי תלויים מתקיים

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{y}(t_2)]$$

$$R_{\mathbf{xy}}[n_1, n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] E\left[\mathbf{y}[n_2]\right]$$

חלש בכיוון אחד
באופן כללי, ודו-כיווני
עבור x,y גאוסיים
(כמו רעש לבן)

סיום הקשר: תהליכים סטציונאריים במשותף

תהליכים סטציונאריים במשותף (הגדרה 7.6): ניתן להגדיר סטציונאריות משותפת (joint-WSS) בין תהליכים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$, אם ורק אם הם תהליכי WSS, ומתקיים הקשר

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] \qquad \text{(א7.6)}$$

$$R_{\mathbf{xy}}[k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]\right]. \qquad \text{(ב7.6)}$$

3

תנאים:

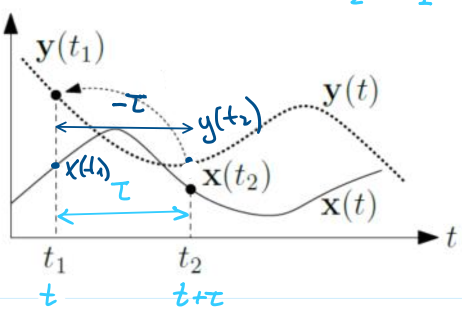
1 $x(t)$ סטצ' אוטו'

2 $y(t)$ "

$\tau = t_2 - t_1$

(1) $x(t)$ סט' כ"אוני'
(2) $y(t)$ "

$\tau = t_2 - t_1$



תכונות: * $\boxed{R_x(\tau) = R_x(-\tau)}$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$
$$R_{xy}[k] = R_{yx}[-k]$$

* ישנם ספרים, שמשתמשים בהגדרה $\tau = t_1 - t_2$ ⇐ תוצאה שונה!

* **Cross-covariance** (תכונה 7.3):

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \underbrace{\mu_x \mu_y}_{\text{קבוע בזמן}}$$

* **מקדם קורלציה** (הגדרה 7.7): מקדם קורלציה בין $x(0)$ לבין $y(\tau)$,

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}}$$

$X = x(t)$ $\quad Cov[X,Y] \to C_{xy}(\tau)$
$Y = y(t+\tau)$ $\quad Var[X] \to Var[x(t)] = C_x(0)$

תכונות בתדר (של PSD)

* **Cross-PSD** (הגדרה 7.8):

$$S_{xy}(F) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

* **תכונות PSD** (תכונה 7.4):

$$S_{xy}(F) = S_{yx}(-F) = S^*_{xy}(-F)$$
$$S_{xy}(-F) = S^*_{xy}(F)$$
$$S_{yx}(F) = S^*_{xy}(F)$$

* **coherence** (הגדרה 7.9): מקדם קורלציה במישור התדר, בין $X(F)$ לבין $Y(F)$,

$$\gamma_{xy}(F) = \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}},$$

כאשר מתקיים $|\gamma_{xy}(F)| \leqslant 1$.

דוגמה 7.2: נתון

$$x(t),\ E[x(t)] = \mu_x = 0,\ \underset{\text{ממוצע 360}}{\text{WSS}}, \quad \underset{\text{ידוע}}{R_x(\tau)}$$
$$y(t) = x(t - t_0)$$

חשב $C_x(\tau)$ (1), $R_y(\tau)$ (2), $C_y(\tau)$ (2), $S_y(F)$ (3), $R_{xy}(\tau)$ (4), $C_{xy}(\tau)$ (5), $R_{yx}(\tau)$ (6), $C_{yx}(\tau)$ (6), $S_{xy}(F)$, $S_{yx}(F)$,
$\gamma_{xy}(F)$, $\rho_{xy}(\tau)$, $R_{yx}(-\tau) = R_{xy}(\tau)$ (7)

אחד השימושים המעשיים
הנפוצים ב"מר של $C_{xy}(\tau)$
הוא זיהוי הפרש זמן
בין האותות

→ (4) (5) $\gamma_{xy}(F), \rho_{xy}(\tau), R_{yx}(-\tau) = R_{xy}(\tau)$ (7)

פתרון:

(1) $C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2 = R_x(\tau)$

$\mu_y = \mu_x = 0$

עבור אות סט', הזזה בזמן לא משנה R,C

(2) $R_y(\tau) = R_x(\tau) = C_y(\tau)$

(3) $S_y(F) = S_x(F)$

(4) $R_{xy}(\tau) = R_{xy}(t, t+\tau) = E\left[x(t)y(t+\tau)\right]$ הגדרה

$= E\left[x(t)x(t+\tau-t_0)\right]$ הצבה

$= R_x(\tau - t_0)$

(5) $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x^2 = R_{xy}(\tau) = R_x(\tau - t_0)$ חישוב לפי הגדרה

(6) $R_{yx}(\tau) = E\left[y(t)x(t+\tau)\right]$ הגדרה

$= E\left[x(t-t_0)x(t+\tau)\right]$ הצבה

סיכום $= R_x(\tau + t_0) = C_{yx}(\tau)$ תוחלת 0

הצבה בתכונה לעיל

$R_{yx}(-\tau) = R_x(t_0 - \tau) = R_x(\tau - t_0) = R_{xy}(\tau)$ $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

הזזה בזמן = כפל ב exp בתדר $S_{xy}(F) = S_x(F)e^{-j2\pi F t_0}$

תכונה לעיל $S_{yx}(F) = S_x(F)e^{j2\pi F t_0} = S_{xy}(-F)$

$$\gamma_{xy}(F) = \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}} = e^{-j2\pi F t_0} \Longrightarrow |\gamma_{xy}(F)| = 1$$

תיאום לינארי מושלם בתדר

הגדרה $\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{C_x(0)} = \frac{R_{xy}(\tau)}{R_x(0)} = \frac{R_x(\tau + t_0)}{R_x(0)}$ הצבה

תוחלת 0

תכונה של תהליכים סט' באופן כללי

ערך מקסימלי (תכונה 6.7):

(6.11א) $R_x(0) \geqslant |R_x(\tau)|$

(6.11ב) $R_x[0] \geqslant |R_x[k]|$

הערה: סימן $\geqslant$ הוא עבור אותות מחזוריים אינסופיים בזמן בלבד (כגון בדוגמה 6.1), אחרת מדובר בסימן $>$. יתרה מזאת, עבור אותות לא מחזוריים ו/או סופיים בזמן מתקיים

$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) \to 0$$

$$\lim_{\tau\to\infty} C_x(\tau) \to \mu_x$$

הערה (*)

$\Rightarrow \tau = \arg\max_{\tau} \rho_{xy}(\tau)$

מהו τ עבורו $\rho_{xy}(\tau)$ מקסימלי?

$= \arg\max_{\tau} R_x(\tau + t_0)$

$\tau + t_0 = 0$

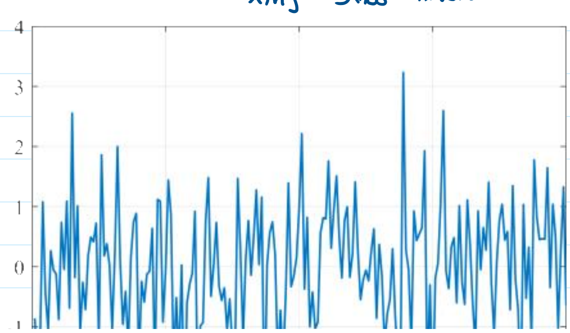
$\boxed{\Rightarrow \tau = -t_0}$

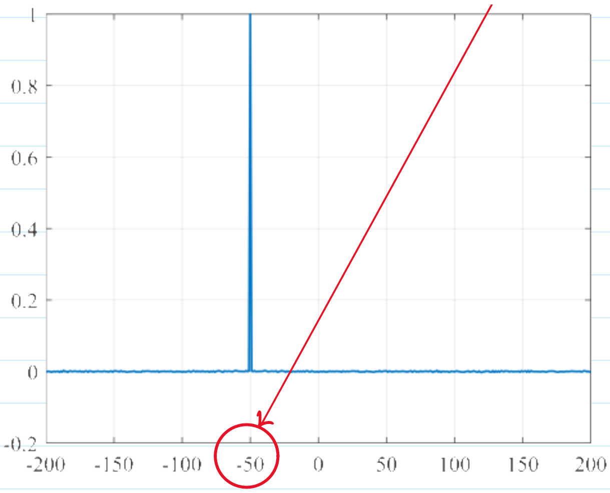
```
N = 1e6;
x = randn(1,N);
y = [zeros(1,50) x(1:end-50)];
[C, lags] = xcov(x,y,200,'normalized');
plot(lags,C)
```

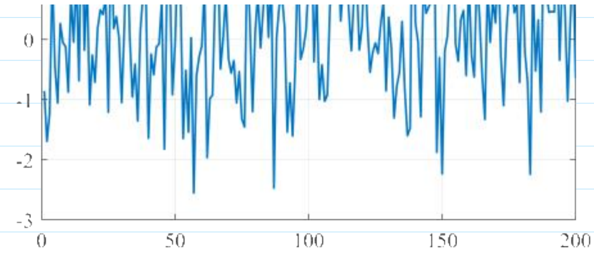
$y[n] = x[n-50]$

$n_0 = 50$

דוגמה לאות x[n]







חישוב נומרי :

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n+k]$$

מטרה : להראות למה מתקיים $R_x[k] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$R_x[k] = \frac{1}{N}\sum_n x[n]x[n+k] \qquad x[n] \begin{cases} = 0 & n<0,\ n>N \\ \neq 0 & 0\le n\le N \end{cases} \quad (*)$$

$$= x[0], x[1] \dots, x[N]$$

$$R_x[0] = x^2[0] + x^2[1] + \dots + x^2[N]$$

$$R_x[1] = x[0]x[1] + x[1]x[2] + x[N-1]x[N] + \cancel{x[N]x[N+1]}^{=0}$$

$$R_x[2] = x[0]x[2] + x[1]x[3] + \dots + x[N-2]x[N] + 0 + 0$$

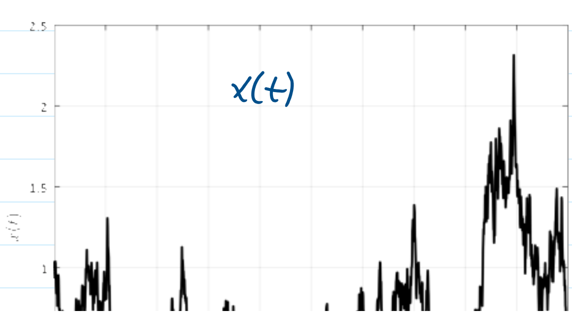
$$R_x[3] = \dots + 0 + 0 + 0$$

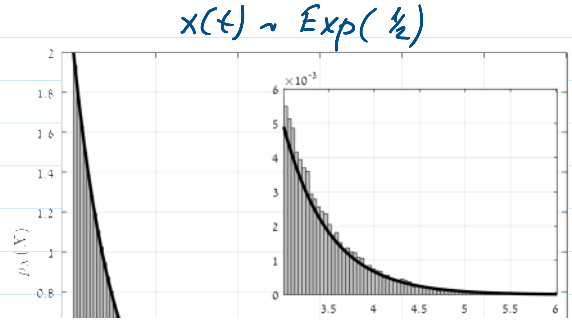
$$R_x[N] = x[0]x[N] + 0 + \dots + 0$$

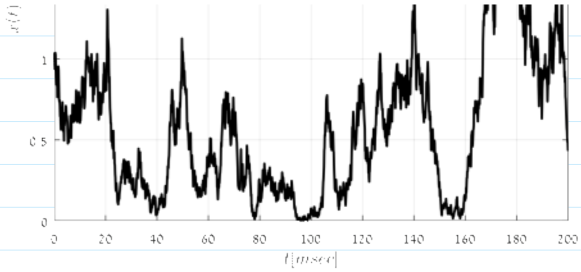
דוגמה מספרית :

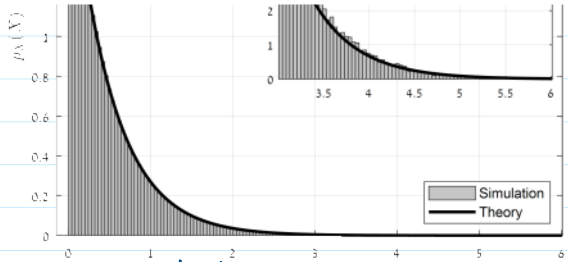
נתון תהליך אקראי $x(t) \sim Exp(x)$ דגום בתדר $F_s = 10kHz$

$R_x(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)$ $\quad \tau_c = 20msec$ (200 דגימות)



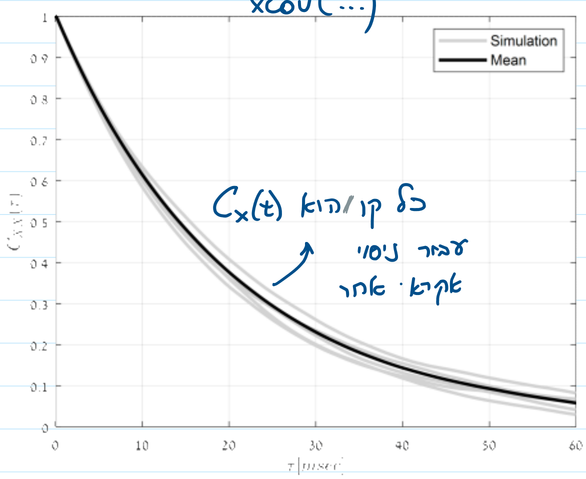






xcov(...)

historgram



כל קו הוא $C_x(t)$
עבור ניסוי
אקראי אחר

הוכחה, שסימון רעשים עוזב רעש אות

דוגמה 7.1: נתון אות

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t),$$

נניח שידועים: $\mu_x, \mu_n, R_n(\tau), R_x(\tau)$

כאשר $\mathbf{x}(t), \mathbf{n}(t)$ הם WSS, בלתי תלויים.

חשב $R_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau), C_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau), R_{\mathbf{y}}(t, t+\tau), C_{\mathbf{y}}(t, t+\tau)$.

הנח $E[\mathbf{n}(t)] = 0$, וחשב $S_{\mathbf{y}}(F)$.

פתרון:

$$R_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$ הגדרה

$$= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{n}(t+\tau)]$$ הצבה

$$= R_{\mathbf{x}}(\tau) + E[\mathbf{x}(t)]\,E[\mathbf{n}(t+\tau)]$$ תכונות א' תלות

סיכום $$= R_{\mathbf{x}}(\tau) + \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}$$

$$C_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau) = R_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau) - E[\mathbf{x}(t)]\,E[\mathbf{y}(t+\tau)]$$ הגדרה

$$= R_{\mathbf{xy}}(t, t+\tau) - E[\mathbf{x}(t)]\,E[x(t+\tau)+n(t+\tau)]$$

$$= \underbrace{R_{\mathbf{x}}(t, t+\tau) + \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}}_{R_{\mathbf{xy}}(t,t+\tau)} - E[\mathbf{x}(t)]\,E[\mathbf{x}(t+\tau)] - \underbrace{E[\mathbf{x}(t)]}_{\mu_{\mathbf{x}}}\,\underbrace{E[\mathbf{n}(t+\tau)]}_{\mu_{\mathbf{n}}}$$

$$= C_{\mathbf{x}}(\tau)$$

הגדרה

$$R_{\mathbf{y}}(t, t+\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t+\tau)]$$

$$= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] + \underbrace{E[\mathbf{x}(t)]}_{\mu_x}\,\underbrace{E[\mathbf{n}(t+\tau)]}_{\mu_n}$$ הצבה ⇐ 4 איברים

$$+ E[\mathbf{n}(t)]\,E[\mathbf{x}(t+\tau)] + \underbrace{E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau)]}_{R_n(\tau)}$$ אחרי פתיחת סוגריים

$$= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) + 2\mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}$$

$$+ E\left[\mathbf{n}(t)\right] E\left[\mathbf{x}(t+\tau)\right] + \underbrace{E\left[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau)\right]}_{R_n(\tau)}$$

אותה תוחלת
סטצ״ם

$$= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) + 2\mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}$$

$$C_{\mathbf{y}}(t, t+\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) - E\left[\mathbf{y}(t)\right] E\left[\mathbf{y}(t+\tau)\right]$$

הגדרה + הצבה

$$= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) + 2\mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}} - (\mu_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{n}})^2$$

$$= C_{\mathbf{x}}(\tau) + C_{\mathbf{n}}(\tau)$$

$$S_{\mathbf{y}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F) + S_{\mathbf{n}}(F)$$

אות + רעש בלתי תלויים בתדר!

⇐ ניתן לנתח בסופר - פוזיציה