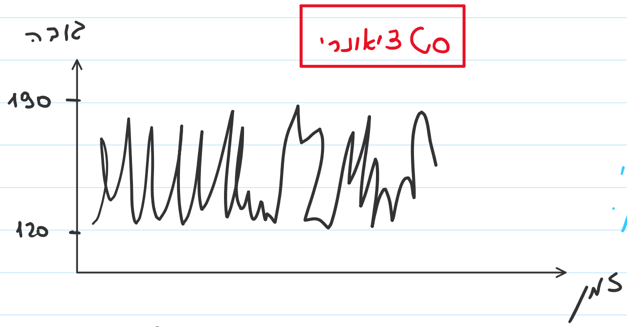
הודעה כללית:

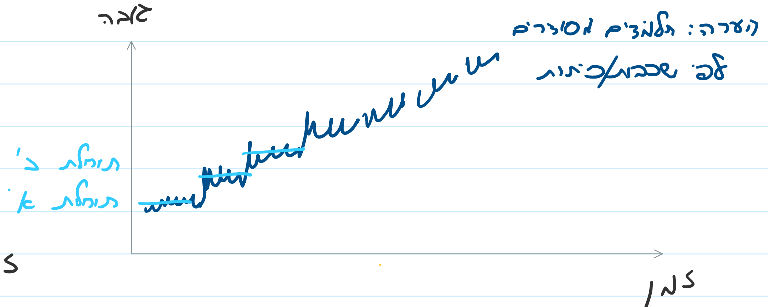
* מטלה 1 מתוך 3 (פרויקט א', בוחן, פרויקט ב') = מגן → אחוז הציון מועבר לבחינה סופית

* פרויקט א': בתרגול יוסבר הפתרון ע"מ לתת אפשרות להשוואה לפתרון שהוגש. אני מבקש שבמקרה של טעות בבדיקה לפנות אליי שנית אחרי בדיקה עצמית כן היתר, כדי למנוע מצב של ערעור במקרה של טעות בדיקה לכלול הסטודנט/ית.

אותות אקראיים סטציונריים

תזכורת: נתון בית הספר, 8 שכבות - כיתות א' - ח'
כל 3 שניות עובר תלמיד וגובה שלו נמדד בצורה אוטומטית





שונות ותוחלת קבועה לאורך זמן

מאפיינים משתנים בזמן

רעש לבן גאוסי כדוגמה לאות/תהליך סטציונרי בזמן בדיד

רעש לבן גאוסי (הגדרה 5.13): תהליך אקראי $\underbrace{x[n] \sim N(0, \sigma^2)}_{\text{התפלגות גאוסית}}$ כאשר $x[n], x[m]$ חסרי קורלציה (ובלתי תלויים) נקרא רעש לבן גאוסי.

תכונות רעש לבן גאוסי (תכונה 5.11):

(5.19) ① $E[x[n]] = 0$

(5.20) $\mathrm{Var}[x[n]] = \sigma^2$

(5.21) $R_x[n_1, n_2] = \sigma^2 \delta[n_1 - n_2] = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases}$

(5.22) $n_1 = n$, $n_2 = n + k$ $\quad = C_x[n_1, n_2]$

רישום ע"י פונק' $\delta[n]$

$R_x[n_1, n_2] = E[x[n_1] x[n_2]]$

$n_1 = n_2$: $= E[x^2[n_1]]$

$n_1 \neq n_2$: $E[x[n_1]] \cdot E[x[n_2]] = 0$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

② $\Rightarrow R_x[k] = \sigma^2 \delta[k]$

בשביל להוכיח, כי תהליך הוא סטציונרי צריכים להתקיים תנאים הבאים:

① $E[x[n]] \qquad = \mu_x = \text{const}$ קבוע בזמן

① $E[x[n]] \qquad = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const}$ קבוע בזמן

② $R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right] = R_{\mathbf{x}}[k]$ תלוי בהפרש זמנים בלבד

דוגמה 6.4: (חזור על הדוגמה 5.4) נתון תהליך אקראי $\mathbf{x}[n] = \frac{1}{2}\mathbf{w}[n] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$ כאשר $\mathbf{w}[n]$ הוא רעש לבן גאוסי. הוכח, שמדובר בתהליך WSS? חשב $\rho_{\mathbf{x}}[k]$.

נתון: $w[n]$ = רעש לבן ⇐

$w[n] \sim N(0, \sigma^2)$

$R_w[k] = \sigma^2 \delta[k]$

דרך נוספת לרשום $x[n]$: $x[n] = h[n] * w[n]$, כאשר $h[n] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

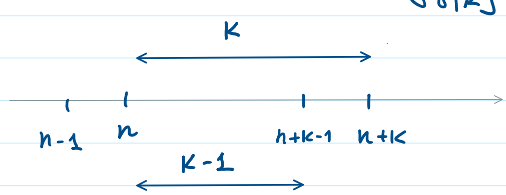
פתרון:

① $$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = \frac{1}{2}E\left[\mathbf{w}[n]\right] + E\left[\frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]\right] = 0 \quad ✓$$

② $$C_{\mathbf{x}}[n, n+k] = R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right]$$

$$= \frac{1}{4}E\left[\left(\mathbf{w}[n] + \mathbf{w}[n-1]\right)\left(\mathbf{w}[n+k] + \mathbf{w}[n+k-1]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{E\left[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]\right]}_{R_w[k] = \sigma^2\delta[k]} + \underbrace{E\left[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k-1]\right]}_{R_w[k-1] = \sigma^2\delta[k-1]} + \underbrace{E\left[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k]\right]}_{\sigma^2\delta[k+1]} + \underbrace{E\left[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k-1]\right]}_{\sigma^2\delta[k]}\Big)$$



$$= 2\frac{\sigma^2}{4}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$$

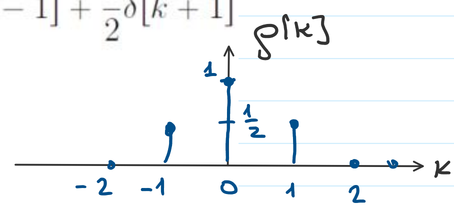
$$✓ = C_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

$C_x[0] = \frac{\sigma^2}{2}$

הגדרה

$$\boxed{\rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]}} = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$$

$$= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{1}{2} & k = \pm 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



הפרשי זמן

$$\rho_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}} \Rightarrow \begin{array}{l} X = x[n] \\ Y = x[n+k] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Var[X] \to C_x[0] = Var[x[n]] \\ Var[Y] \;\; = \;\; Var[x[n+k]] \\ Cov[X,Y] \to C_x[k] \end{array}$$

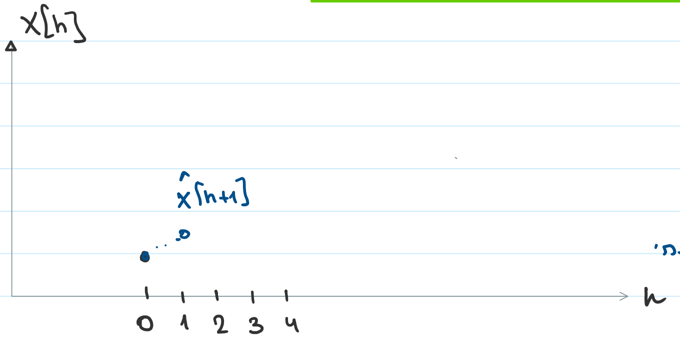
בגלל ס'

$$C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] - E\left[\mathbf{x}[n_1]\right]E\left[\mathbf{x}[n_2]\right]$$

$n_1 = n_2 = n \Rightarrow C_x[0] = Var[x[n]]$

$k = n_1 - n_2 = 0$

$$n_1 = n_2 = n \;\Rightarrow\; C_x[0] = Var[x[n]]$$
$$k = n_1 - n_2 = 0$$



מקדמי קורלציה בין הזמנים שונים

* $x[n]$ · ידועה התפלגות (גאוסי)
* מטרה: לחזות $x[n+1]$ מתוך $x[n]$

$\underbrace{x[n+1]}_{\text{עתיד = טרם ידוע}}$, $\underbrace{x[n]}_{\text{זמן נוכחי = ידוע}}$

$$x[n+1] = a\,x[n] + b$$

$$\overbrace{\hat{Y}}^{\text{חיזוי}} = \overbrace{a_{opt}}^{\text{מחושב}}\underbrace{x}_{\text{תוצאה של X}} + \overbrace{b_{opt}}^{\text{מחושב}} = E[Y] + \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

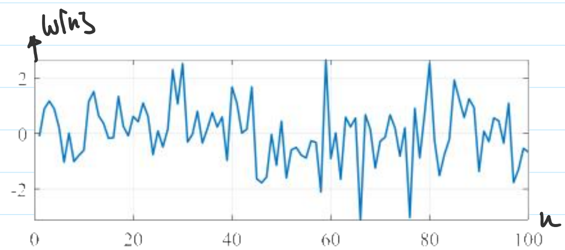
$\rightarrow$ $\hat{Y} = \hat{x}[n+1]$, $X = x[n]$

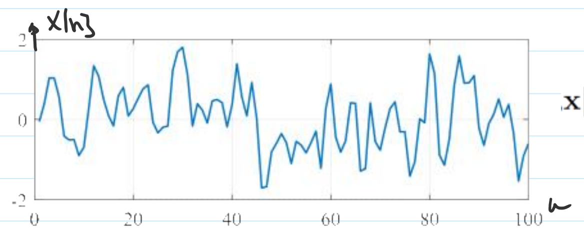
$C_x[k=1]$ — חיזוי 1 צעד קדימה $x[n+1]$

$\rho_x[2] \rightarrow$ חיזוי של $x[n+2]$

דוגמה 1:

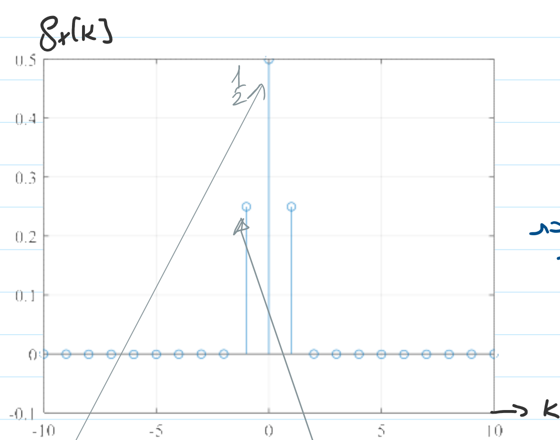
$w[n]$ רעש לבן גאוסי באורך 10^6





$$\mathbf{x}[n] = \tfrac{1}{2}\mathbf{w}[n] + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$$

תשימו לב, שהשינויים בגרף תחתון הרבה יותר "חלקים" מגרף עליון ⇐ יכול חיזוי שגה יותר של העתיד




```
N = 1e6;
w = randn(1,N);
a = 1;
b = [1/2 1/2];
x = filter(b,a,w);

[R,lags] = xcorr(x,10,'biased');
```

N = 1e6 → אורך של $w[n]$

w = randn(1,N) → סימולציה של רעש לבן גאוסי

a, b, x = filter(b,a,w) — הגדרה של המערכת שבדוגמה; x → $x[k]$

'biased' — נרמול $1/N$; "xcov"

R — ערכי $R_x[k]$; lags — ערכי k ; x — R_x ; 10 — ערך מקסימלי של k

$$R_x[k] = \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$$

$\sigma^2 = 1$

$$x[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1]$$

מסנן FIR עם תגובה להלם

$w[n] \rightarrow \boxed{h[n] = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}} \rightarrow x[n]$

$6^2 = 1$

אופן חישוב מעשי של $C_x[k], R_x[k]$

$E[XY] \to$ $R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] = R_{\mathbf{x}}[k]$

$X = x[n]$ $Y = x[n+k]$

מספר ערכים

דרך א' $$R_{\mathbf{x}}[k] = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]}_{\text{ממוצע של } x[n]x[n+k]}$$

דרך ב' $$R_{\mathbf{x}}[k] = x[n] * x[-n] = \sum_n x[n]x[n+k]$$

קונבולוציה
$$x[n] * y[n] = \sum_n x[n]y[k-n]$$

ההבדל בין הדרכים הוא $\frac{1}{N}$

$R_x[0] = x^2[0] + x^2[1] + \dots + x^2[N]$

ערכים לא חופפים

$R_x[1] = x[0]x[1] + x[1]x[2] + \dots + x[N-1]x[N] + x[N]\cdot 0$

דרך ג' להכפיל תוצאה ב-$\frac{1}{N}$

$R[k=2] = \sum_{n=0}^{N} x[n]x[n+2] = x[0]x[2] + x[1]x[3] + \dots + x[N-3]x[N-1]$

$\sum_n x[n]x[n+k]$ $+ x[N-2]x[N] + x[N-1]\cdot x[N+1] + \dots$

0 0

צפיפות הספק ספקטרלית

מטרה: אמת ס' במישור התדר.

רקע: התמרת פוריה של אות אקראי הוא חסר משמעות ← על כל ניסוי אקראי יתקבל את אחר ⇐ התמרה אחרת

תזכורת

התמרת פוריה בזמן רציף (הגדרה 6.4): התמרת פוריה של אות $x(t)$ בזמן רציף נתונה ע"י

$$X(F) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt, \qquad (6.20)$$

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$.

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.5): התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \qquad (6.21)$$

$\omega = 2\pi f$

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.5): התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi f n}, \qquad (6.21)$$

$\omega = 2\pi f$

כאשר f הוא תדר מנורמל. $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

צפיפות הספק ספקטראלי (הגדרה 6.6): צפיפות הספק ספקטראלית של התהליך מוגדרת ע"י התמרת פוריה של פונ' אוטו-קורלציה.

כאשר $y(t)$ הוא לא אקראי. $|Y(jf)|^2$ מקבילה של ←

$$S_{\mathbf{x}}(F) = \mathcal{F}\left\{R_{\mathbf{x}}(\tau)\right\} \qquad (6.22א)$$

$\left[\frac{W}{Hz}\right]$

$$S_{\mathbf{x}}(f) = \mathrm{DTFT}\left\{\underbrace{R_{\mathbf{x}}[k]}_{\text{לא אקראי!}}\right\} \qquad (6.22ב)$$

כמובן, מתקיים גם הקשר ההפוך. הקשר להלן גם נקרא משפט Wiener–Khinchin–Einstein