תהליכים סטציונאריים

מטרה: מודל של אותות, שתכונות שלהן קבועות בזמן.

דגימה (ערך) בודדת:

$$F_{\mathbf{x}}(x;t) = F_{\mathbf{x}}(x;t+c) = F_{\mathbf{x}}(x) \quad \text{CDF}$$
$$f_{\mathbf{x}}(x;t) = f_{\mathbf{x}}(x;t+c) = f_{\mathbf{x}}(x) \quad \text{PDF}$$
$$E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(t+c)] = \mu_{\mathbf{x}} \quad \text{תוחלת}$$
$$Var[\mathbf{x}(t)] = Var[\mathbf{x}(t+c)] = \sigma_{\mathbf{x}} \quad \text{שונות}$$

קבוע בזמן

זוג דגימות:

$$\text{CDF} \quad F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$
$$\text{PDF} \quad f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$

בו נבחר $c = -t_1$

$$f_x(x_1,x_2;0,t_2-t_1) = f_x(x_1,x_2;\tau)$$

כאשר $\tau = t_2 - t_1$ {
התלות היא בהפרש זמנים t_2-t_1 ולא בערכים של t_1,t_2

סיווג אותות הנקראים סטציונריים

הנקראים: **תהליך סטציונארי במובן הרחב**
wide sense stationary (WSS)

תהליך סטציונארי במובן צר

ישנה הרחבה שנקראת strict sense stationary, שדורשת קביעות בזמן של 3 דגימות האלה ויותר (n דגימות) - לא נרחיב.

הוכחת סטציונריות:

1. **תוחלת** (תכונה 6.3): תוחלת בלתי תלויה בזמן

$$E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(0)] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const} \quad \forall t$$
$$E[\mathbf{x}[n]] = E[\mathbf{x}[0]] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const} \quad \forall n$$

2. **אוטו-קורלציה** (תכונה 6.4): אוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד

$$R_{\mathbf{x}}(t,t+\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$
$$R_{\mathbf{x}}[n,n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

נראה, שביטוי $R_x(t,t+\tau)$ תלוי ב-τ בלבד, ללא t

תזכורת:
$X = x(t_1)$
$Y = x(t_2)$
$R_x(t_1,t_2) = E[XY]$

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2 - t_1|),$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = R_{\mathbf{x}}(k = |n_2 - n_1|),$$

נראה. שביטוי $R_x(t_1,t_2)$ תלוי ב הפרש זמנים בלבד

דוגמה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = A\cos(2\pi t + \theta)$, כאשר $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ ו-A משתנה אקראי בלתי תלוי ב-θ

נבדוק תנאים אלו:

דוגמה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = A\cos(2\pi t+\theta)$, כאשר $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ ו-A משתנה אקראי בלתי תלוי ב-θ

נבדוק תנאים לעיל:

1

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t)] &= E[A\cos(2\pi t+\theta)] \overset{?}{=} \text{קבוע בזמן} \\ &= E[A]\,E[\cos(2\pi t+\theta)] \\ &= E[A]\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(2\pi t+\theta)}_{g(\theta)} f_\theta(\theta)\,d\theta \\ &= E[A]\int_{-\pi=a}^{\pi=b} \cos(2\pi t+\theta)\underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\frac{1}{b-a}}\,d\theta = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

תזכורת: עבור X,Y בלתי תלויים

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

$$g_1(x)=x \qquad g_2(y)=\cos(2\pi t+y)$$

תזכורת: התפלגות אחידה

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$a=-\pi,\quad b=\pi$$

2

$$R_x(t,t+\tau) \overset{?}{=} R_x(\tau)$$

$$= E[A\cos(2\pi t+\theta)\,A\cos(2\pi(t+\tau)+\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}E[A^2]\Big\{E[\underbrace{\cos(-2\pi\tau)}_{\text{לא אקראי}}]$$

$$+ E[\underbrace{\cos(2\pi(2t+\tau)+2\theta)}_{=0 \text{ בדומה לחישוב לעיל}}]\Big\}$$

תזכורת:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$= \frac{1}{2}E[A^2]\cos(2\pi\tau)$$

$$= R_x(\tau) \quad \checkmark$$

תכונות של WSS

* **סימטריה בזמן** (תכונה 6.6):

$$R_{\mathbf{x}}(-\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$
$$R_{\mathbf{x}}[-k] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

* **ערך מקסימלי** (תכונה 6.7):

(*)

$$R_{\mathbf{x}}(0) \geqslant |R_{\mathbf{x}}(\tau)|$$
$$R_{\mathbf{x}}[0] \geqslant |R_{\mathbf{x}}[k]|$$

הפרש זמנים 0

(*) $=$ רק עבור אותות מחזוריים אינסופיים בזמן (ראה דוגמה לעיל)
במצב מעשי הסימן הוא $>$ (בלי שווה)

* **הספק ממוצע** (תכונה 6.8): הספק ממוצע של אות אקראי נתון ע"י

* מדובר בגישה שונה עם תוצאה זהה

$$P_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{x}}(0) = E\left[|\mathbf{x}(t)|^2\right] = E\left[|\mathbf{x}(0)|^2\right]$$

$$P_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{x}}[0] = E\left[|\mathbf{x}[n]|^2\right] = E\left[|\mathbf{x}[0]|^2\right]$$

תזכורת:

$X = x(t_1)$

$Y = x(t_2)$

$C_x(t_1,t_2) = Cov[X,Y]$

* Auto-covariance

$$C_{\mathbf{x}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2 - t_1|), \quad \forall t_1, t_2$$

$$C_{\mathbf{x}}[k] = C_{\mathbf{x}}(k = |n_2 - n_1|), \quad \forall n_1, n_2$$

תזכורת

$$\boxed{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]}$$

$$C_{\mathbf{x}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) - \mu_{\mathbf{x}}^2$$

$$C_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k] - \underbrace{\mu_{\mathbf{x}}^2}_{E[x(t)]}$$

* **הפרש זמן 0** (תכונה 6.11): קשר בין שונות לשונות משותפת בנקודת זמן מסויימת

$\boxed{Cov[X,X] = Var[X]}$

$$Var[\mathbf{x}(t)] = C_{\mathbf{x}}(t,t) = C_{\mathbf{x}}(0) = \sigma_{\mathbf{x}}^2$$

$$Var\left[\mathbf{x}[n]\right] = C_{\mathbf{x}}[n,n] = C_{\mathbf{x}}[0] = \sigma_{\mathbf{x}}^2$$

מקדם קורלציה (תכונה 6.12): מקדם קורלציה בהפרש זמנים τ

$|\rho_{XY}| \leq 1$

מדד לשגיאה של חיזוי לינארי בין X,Y

$$\rho_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{C_{\mathbf{x}}(\tau)}{C_{\mathbf{x}}(0)}$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]}$$

דוגמה 6.3: רמת DC אקראית, $\mathbf{x}[n] = A$, כאשר $A \sim N(0,1)$ הוא משתנה אקראי גאוסי. האם מדובר בתהליך WSS?

פתרון:

(1) $$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = E[A] = 0$$

(2) $$R_{\mathbf{x}}[n,n+k] = E\left[\underbrace{\mathbf{x}[n]}_{A}\underbrace{\mathbf{x}[n+k]}_{A}\right] = E\left[A^2\right] = 1 = Var[A]$$

הערות: * מדובר בתהליך סטציונרי

* מתוך ערכים של x[n] לא ניתן להגיע להתפלגות של x[n]

רעש לבן גאוסי

רעש לבן גאוסי (הגדרה 5.13): תהליך אקראי $\mathbf{x}[n] \sim N(0,\sigma^2)$, כאשר $\mathbf{x}[n], \mathbf{x}[m]$ חסרי קורלציה (ובלתי תלויים) נקרא רעש לבן גאוסי.

תכונות רעש לבן גאוסי (תכונה 5.11):

(5.19) $$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = 0$$ (1) V

(5.20) $$Var\left[\mathbf{x}[n]\right] = \sigma^2$$ (2) V

שאלה: האם מדובר בתהליך ס"ט?

תשובה: כן!

תשובה: כן!

$$E[\mathbf{x}[n]] = 0 \qquad (5.19) \quad ① \ V$$

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = \sigma^2 \qquad (5.20) \quad ② \ V$$

$$R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = \sigma^2\delta[\overbrace{n_1 - n_2}^{K=|n_1-n_2|}] = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases} = R_x[k] \qquad (5.21)$$

$$= C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = C_x[k] \qquad (5.22)$$

חזרה של הדוגמה:

דוגמה 5.4: נתון תהליך אקראי $\mathbf{x}[n] = \frac{1}{2}\mathbf{w}[n] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$, כאשר $\mathbf{w}[n]$ הוא רעש לבן גאוסי. דרך נוספת לרישום התרגיל: $x[n] = h[n] * w[n]$, כאשר $h[n] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
חשב $C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2]$.

תוצאה קודמת:

$$V \ E[\mathbf{x}[n]] = \frac{1}{2}E[\mathbf{w}[n]] + E\left[\frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]\right] = 0$$

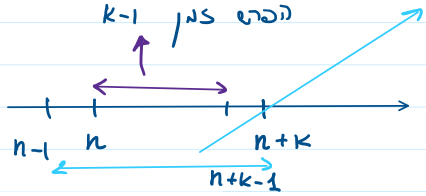
$$C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = \frac{\sigma^2}{2}\delta[\underbrace{n_1 - n_2}_{k}] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[\underbrace{n_1 - n_2}_{k} - 1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[\underbrace{n_1 - n_2}_{k} + 1]$$

הפעם, נראה שוב תוך חישוב של $R_x[n,n+k]$, נחשב $\rho_x[k]$.

$$C_{\mathbf{x}}[n, n+k] \overset{\text{בגלל תוחלת 0}}{=} R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = \overbrace{E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]]}^{\text{הגדרה}}$$

$$\text{הצבה} \rightarrow \quad = \frac{1}{4}E\left[(\mathbf{w}[n] + \mathbf{w}[n-1])(\mathbf{w}[n+k] + \mathbf{w}[n+k-1])\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]]}_{\text{הפרש זמן } k} + \underbrace{E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k-1]]}_{\text{הפרש זמן } k-1} + \underbrace{E[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k]]}_{\sigma^2\delta[k+1]} + \underbrace{E[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k-1]]}_{\text{הפרש זמן } k}\Big)$$



$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$$

$$= C_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

$$\rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]} = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$$

$$= \begin{cases} 1 & k = 0 \quad \rightarrow \text{הפרש זמן 0} \\ \frac{1}{2} & k = \pm 1 \quad \rightarrow \text{חיבור בהפרש של דגימה 1} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הפרש של 2 דגימות ויותר

חישוב מספרי של auto-correlation:

$$R_{\mathbf{x}}[k] = x[n] * x[-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k] \quad \longleftarrow \quad \text{Matlab: ברירת מחדל}$$

$$\boxed{R_{\mathbf{x}}[k] = E[x[n]x[n+k]] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k] \qquad \text{'biased' אומדן *}}$$

מספר דגימות של רעש לבן

a_0

b_0, b_1

סימולציה של רעש לבן מעבר דרך מערכת

```
N = 1e6;
a = 1;
b = [1/2 1/2];
w = randn(1,N);
x = filter(b,a,w);
[R,lags] = xcorr(y,10,'biased');
```

$R_x[k]$ k $|k|\le 10$

מגבלה של ערך מקסימום של k

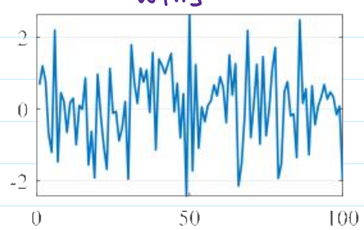
בשביל פקטור $\frac{1}{N}$

ניתן לראות את הדוגמה, כהעברת רעש דרך מערכת עם תגובה להלם

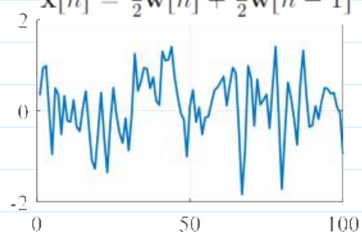
$$h[n]=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0}$$

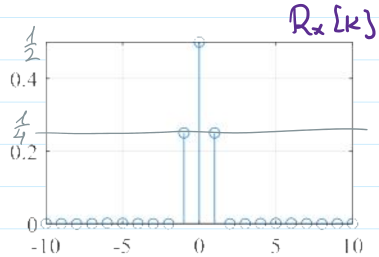
רעש $w[n]$



$\mathbf{x}[n]=\frac{1}{2}\mathbf{w}[n]+\frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$



$R_x[k]$



נתון:

$X=x[n]$

$Y=x[n+1]$

$E[XY]\rightarrow R_x[1]=C_x[1]$

$Y=x[n+2]$ $E[XY]\rightarrow R_x[2]=C_x[2]$

... ...

בגלל תוחלת 0

צפיפות הספק ספקטראלית

Power Spectral Desnisty (PSD)

* לא ניתן לחשב התמרת פוריה עבור אות אקראי (אך לא הפחות זה חסר משמעות) רקע מעשית

* במקרה של אות WSS, ניתן לעשות זאת, של אופיין $R_x[k]$, $C_x[k]$ הם <u>לא</u> אקראיים!

הגדרה:

$$S_x(F)=\mathcal{F}\left\{R_x(\tau)\right\} \quad \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

$$S_x(f)=\text{DTFT}\left\{R_x[k]\right\}$$

נקרא משפט Wiener–Khinchin–Einstein.

תזכורת:

התמרת פוריה בזמן רציף (הגדרה 6.5): התמרת פוריה של אות $x(t)$ בזמן רציף נתונה ע"י

$$X(F)=\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi Ft}dt, \tag{6.21}$$

אות בגבולה

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$.

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.6): התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.6): התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi f}, \quad (6.22)$$

את קשבה

כאשר f הוא תדר מנורמל.

$f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

תכונות: $S_x(F) = S_x(-F)$ סימטרי עבור $x(t)$ ממשי. $S_x(f) = S_x(-f)$

$S_x(F) \geqslant 0, \ \forall F$ לא שלילי. $S_x(f) \geqslant 0, \ \forall f$

$S_x(F) \in \mathbb{R}$ ממשי - ללא פאזה $S_x(f) \in \mathbb{R}$

$S_x(f) = S_x(f+1)$ מחזוריות של DTFT

הספק ממוצע (הגדרה 6.8): הספק ממוצע של האות מוגדר ע"י

$$P_x = E\left[x^2(t)\right] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)dF$$

$$P_x = E\left[x^2[n]\right] = R_x[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f)df$$

דוגמה: הכרה לדוגמה $\mathbf{x}[n] = \frac{1}{2}\mathbf{w}[n] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$

סיכום דוגמה קודמת $\rightarrow$ $R_x[k] = \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$

הגדרה $\rightarrow$ $S_x(f) = \text{DTFT}\{R_x[k]\}$

$= \frac{\sigma^2}{4}\text{DTFT}\left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 1\right\}$ דרך נוספת לרשום $R_x[k]$

חישוב ע"פ הגדרה $= \frac{\sigma^2}{4}\left(e^{j\pi f} + 2 + e^{-j\pi f}\right) = \frac{\sigma^2}{4}\left(2 + 2\frac{e^{j\pi f} + e^{-j\pi f}}{2}\right)$

$\boxed{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi f n}}$ $n=-1$, $n=0$, $n=1$

$= \frac{\sigma^2}{2}(1 + \cos(2\pi f))$

$$P_x = \underset{\downarrow \ \frac{\sigma^2}{2}}{R_x[0]} = \int_{0 \ (-\frac{1}{2})}^{1 \ (1/2)} \frac{\sigma^2}{2}(1 + \cos(2\pi f))\, df = \frac{\sigma^2}{2}$$

PSD של רעש לבן

רעש לבן (הגדרה 6.9): תהליך אקראי WSS, עבורו מתקיים

$E[\mathbf{n}(t)] = 0$

$R_n(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) = C_n(\tau)$

$E[\mathbf{n}[n]] = 0$

$R_n[k] = \sigma^2\delta[k] = C_n[k]$

white Gaussian noise (WGN)

עבור רעש לבן גאוסי

$\mathbf{n}(t) \sim N(0, \sigma^2)$

$\frac{N_0}{2} = \sigma^2$ נהוג לסמן

$$E[\mathbf{n}[n]] = 0$$
$$R_{\mathbf{n}}[k] = \sigma^2\delta[k] = C_n[k]$$

נהוג לסמן $\frac{N_0}{2} = \sigma^2$

$$R_{\mathbf{n}}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$
$$S_{\mathbf{n}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

ה-PSD הוא

$$S_{\mathbf{n}}(F) = \sigma^2 \quad \forall F$$
$$S_{\mathbf{n}}(f) = \sigma^2 \quad -1/2 \leqslant f \leqslant 1/2.$$

הדגימות של רעש לבן חסרי קורלציה

$$R_{\mathbf{n}}(t_1, t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2$$
$$R_{\mathbf{n}}[n_1, n_2] = 0 \quad n_1 \neq n_2$$

← משתנים גאוסיים חסרי קורלציה ⟸ בלתי תלויים

⟸ דגימות של WGN בלתי תלויים

דוגמה 6.5: נתון אות מאופנן DSB מהצורה

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)\sin(2\pi F_0 t + \theta),$$

כאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$, $\mathbf{x}(t)$ הוא WSS ובלתי תלוי ב-θ.
הוכח, ש-$\mathbf{z}(t)$ הוא WSS וחשב $S_{\mathbf{z}}(F), P_{\mathbf{z}}$.

WSS: (1) $E[\mathbf{z}(t)] = E[\mathbf{x}(t)]\,\underbrace{E[\sin(2\pi F_0 t + \theta)]}_{0} = 0$ ✓

(2) הגדרה: $R_{\mathbf{z}}(t, t+\tau) = E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+\tau)]$

הצבה

$$= \underbrace{E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)]}_{R_x(\tau)}\, E\left[\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0\tau)}_{\text{לא אקראי}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0[2t+\tau] + 2\theta)}_{E\{\dots\}=0}\right\}\right]$$

תלוי τ בלבד

$$= \frac{1}{2}R_{\mathbf{x}}(\tau)\cos(2\pi F_0\tau) \quad ✓$$

$$S_{\mathbf{z}}(F) = \frac{1}{4}[S_{\mathbf{x}}(F - F_0) + S_{\mathbf{x}}(F + F_0)] = \mathcal{F}\{R_z(\tau)\}$$

$$P_{\mathbf{z}} = R_{\mathbf{z}}(0) = \frac{\overset{P_x}{R_{\mathbf{x}}(0)}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{z}}(F)dF = \frac{P_{\mathbf{x}}}{2}$$