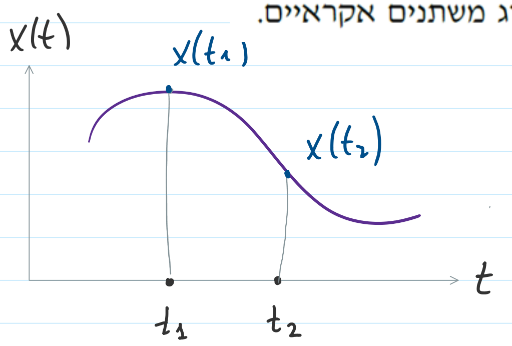
זוג דגימות

זוג דגימות (תכונה 5.4): זוג דגימות של תהליך אקראי זה זוג משתנים אקראיים.



נניח $t_1 \neq t_2$

8 הסתכל על ערכים אלו

$X = x(t_1)$ $Y = x(t_2)$

* אפשר לדבר על התפלגות משותפת של X,Y
* $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
* ρ_{XY}
* CDF $F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \Pr(\mathbf{x}(t_1) \leqslant x_1, \mathbf{x}(t_2) \leqslant x_2)$ נדבר בהרחבה בהמשך
* PDF $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$

מאפיינים

* **אוטו-קורלציה (auto-correlation)**

$X = x(t_1)$ $Y = x(t_2)$

הגדרה

$$\overbrace{R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)}^{\text{סימון}} = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right]$$

שם תהליך, זמנים, ערך ב-t_1, ערך ב-t_2

מקבילה של $E[XY]$ ←

- $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_2, t_1)$ $E[XY] = E[YX]$
- $R_{\mathbf{x}}(t, t) = E\left[\mathbf{x}^2(t)\right]$ $t_1 = t_2 = t$ $E[X^2]$ ←
- עבור $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$ בלתי תלויים מתקיים

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$

$t_1 \neq t_2$

תזכורת: עבור מ"א בלתי תלויים

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_1) = E[\mathbf{x}^2(t_1)] \neq E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_1)] = E^2[\mathbf{x}(t_1)]$$

טעות נפוצה:

$t_1 = t_2$

$t_1 \neq t_2 = E[x(t_1) x(t_2)] = E[x(t_1)]E[x(t_2)]$

עבור בלתי תלויים בלבד!

$X = x(t_1) \quad Y = x(t_2)$

$Cov[X,Y]$ של מקבילה ⟶ **Auto-covariance** * אות את

תזכורת:

$$\boxed{\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E\Big[\big(X - E[X]\big)\big(Y - E[Y]\big)\Big] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}}$$

הגדרה:
$$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \underbrace{R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}_{E[x(t_1)x(t_2)]} - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$

$$= E\Big[\{\mathbf{x}(t_1) - E[\mathbf{x}(t_1)]\}\{\mathbf{x}(t_2) - E[\mathbf{x}(t_2)]\}\Big]$$

- $Cov[X,Y] = Cov[Y,X] \longrightarrow C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = C_{\mathbf{x}}(t_2,t_1)$
- $Cov[X,X] = Var[X] \longrightarrow C_{\mathbf{x}}(t,t) = \mathrm{Var}[\mathbf{x}(t)]$
- מקדם קורלציה $\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \dfrac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}} = \dfrac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{x}(t_1))\,\mathrm{Var}(\mathbf{x}(t_2))}}$

  $|\rho_x| \le 1$
- עבור $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$ חוסרי קורלציה מתקיים

  $Var[x(t_1)] \Leftarrow t_1 = t_2$

  $t_1 \neq t_2 \qquad C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = 0$
- אחד מהם מתקיים
  $$\left\{\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t_1)] &= 0 \\ E[\mathbf{x}(t_2)] &= 0 \end{aligned}\right.$$

  $E[X] = 0$

  $E[Y] = $ או

  $\Rightarrow Cov[X,Y] = E[XY]$

  $$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) \Leftarrow$$

דוגמה: מתנד עם אמפליטודה אקראית קבועה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = A\cos(2\pi t)$, כאשר A משתנה אקראי.

חשב: $R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), \rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$

פתרון:

הגדרה ⟶ $R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)]$

הצבה ⟶ $= E[A\cos(2\pi t_1)A\cos(2\pi t_2)]$

תשובה סופית ⟶ $= E[A^2]\underbrace{\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)}_{\text{"קבועים" מחוץ לתוחלת}}$

הגדרה ⟶ $C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$

הצבה ⟶ $= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) - E[A]\cos(2\pi t_1)E[A]\cos(2\pi t_2)$

גורם משותף

$= \underbrace{\left(E[A^2] - E^2[A]\right)}\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$

$= \mathrm{Var}[A]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$

$$= \mathrm{Var}\left[A\right] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2)$$

$$C_{\mathbf{x}}(t,t) = \mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right]$$

תזכורת (הרצאה קודמת)

$$E\left[\mathbf{x}(t)\right] = E[A]\cos(2\pi t)$$

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right] = E\left[\mathbf{x}^2(t)\right] - E^2\left[\mathbf{x}(t)\right]$$

$$= E[A^2]\cos^2(2\pi t) - E^2[A]\cos^2(2\pi t)$$

$$= \left(E[A^2] - E^2[A]\right)\cos^2(2\pi t) = \mathrm{Var}\left[A\right]\cos^2(2\pi t)$$

הגדרה $\rightarrow$ $$\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}}$$

הצבה $\rightarrow$ $$= \frac{\mathrm{Var}\left[A\right]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[A\right]\cos^2(2\pi t_1)\,\mathrm{Var}\left[A\right]\cos^2(2\pi t_2)}} = \pm 1$$

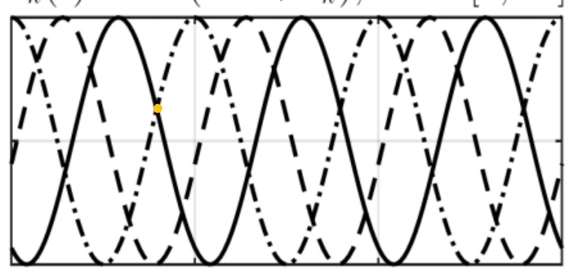
$$\frac{X}{|X|} = \pm 1$$

* ניתן לחיזוי ליניארי מושלם

* $\cos(2\pi t_1) = 0$ או $\cos(2\pi t_2) = 0$ $\leftarrow$ לא ניתן חיזוי.
כי אמפליטודה לא ידועה במקרה כזה

דוגמה: מתנד עם מופע (פאזה) אקראית קבועה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = \cos(2\pi t + \theta)$ $\quad \theta \sim U[-\pi,\pi]$

$$x_k(t) = \cos(2\pi t + \theta_k), \theta \sim U[0, 2\pi]$$



חשב: $R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2), \rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$.

תזכורת: תוחלת ע"פ כל אפשרויות של θ

$$E\left[\mathbf{x}(t)\right] = E\left[\cos(2\pi t + \theta)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos(2\pi t + \theta)}^{g(\theta)} f_\theta(\theta) d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi t + \theta)\frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

הגדרה: $$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right]$$

הצבה: $$= E\left[\cos(2\pi t_1 + \theta)\cos(2\pi t_2 + \theta)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi\left[t_1 - t_2\right])\right]}_{\text{תוחלת של פונקציה לא אקראית של זמן}} + \underbrace{\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi\left[t_1 + t_2\right] + 2\theta)\right]}_{=0}$$

בדומה לתוחלת

תזכורת:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

תזכורת: עבור $E[x(t_i)] = 0$

$$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi\left[t_1 - t_2\right])$$

$$= C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$$

מקרה פרטי: $t_1 = t_2 = t$

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right] = C_{\mathbf{x}}(t,t) = \frac{1}{2}$$

בכל שהפרש זמן $\quad \rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\dots}$ $\quad$ מקדם קורלציה

$$\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}} = \cos\left(2\pi\,[t_1 - t_2]\right)$$

מקדם קורלציה $\leftarrow \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

ככל שהפרש זמן קטן יותר, כך המתאם יותר טוב (מחזורי)

סיווג של אותות אקראיים: סטציונריות

מטרה: לאפיין את אקראי בעל תכונות סטטיסטיות קבועות בזמן

הגדרה: דגימה בודדת: התפלגות קבועה בזמן

$$F_{\mathbf{x}}(x;t) = F_{\mathbf{x}}(x;t+c) = F_{\mathbf{x}}(x) \quad \text{CDF}$$
$$f_{\mathbf{x}}(x;t) = f_{\mathbf{x}}(x;t+c) = f_{\mathbf{x}}(x) \quad \text{PDF}$$
$$E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(t+c)] = \mu_{\mathbf{x}} \quad \text{תוחלת}$$
$$Var[\mathbf{x}(t)] = Var[\mathbf{x}(t+\underbrace{c}_{\text{קבוע שרירותי}})] = \sigma_{\mathbf{x}} \quad \text{שונות}$$

זוג דגימות: הזזה בזמן לא משנה את התפלגות המשותפת

תכונה מקבילה עבור זוג דגימות

$f_x(x), f_y(y)$ בלת׳ תלוי׳ בזמן, $X = x(t_1)$, $Y = x(t_2)$

$$F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c) \quad \text{CDF}$$
$$f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c) \quad \text{PDF}$$

בלי הגבלת הכלליות, ניתן לבחור $c=-t_1$ או $c=-t_2$ ולרשום

$$F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;\tau)$$
$$f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{\mathbf{x}}(x_1,x_2;\tau),$$

כאשר

$$\tau = |t_2 - t_1|\,. \quad \text{הפרש זמנים}$$

לסיכום: דגימה בודדת: תוחלת ושונות קבועים בזמן

זוג דגימות: תלויים בהפרש זמנים $\tau = |t_1 - t_2|$, בלי קשר ישיר לערכים של t_1, t_2.

תכונות:

תוחלת (תכונה 6.3): תוחלת בלתי תלוי בזמן

(1)
$$E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(0)] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const}$$
$$E[\mathbf{x}[n]] = E[\mathbf{x}[0]] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const}$$

אוטו-קורלציה (תכונה 6.4): אוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד

(2)
$$R_{\mathbf{x}}(t,t+\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$
$$R_{\mathbf{x}}[n,n+k] = E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]\right] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2 - t_1|),$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = R_{\mathbf{x}}(k = |n_2 - n_1|),$$

הגדרות שקולות

הגדרת סטציונריות: קיום התכונות אלה (1) (2)

הגדרת שקולות

הוכחת סטציונריות: קיום התכונות של 1, 2

דוגמה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = A\cos(2\pi t+\theta)$, כאשר $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ ו-A משתנה אקראי בלתי תלוי ב- Θ
הוכח, שמדובר בתהליך/אות סטציונרי.

פתרון:

1

$$
\begin{aligned}
E[\mathbf{x}(t)] &= E[A\cos(2\pi t+\theta)] \quad \text{הצבה}\\
&= E[A]\,E[\cos(2\pi t+\theta)] \quad A,\Theta \text{ בלתי תלויים}\\
&= E[A]\int_{-\pi\,(a)}^{\pi\,(b)} \cos(2\pi t+\theta)\,\underbrace{f_\theta(\theta)}\,d\theta\\
&= \underbrace{E[A]\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta}_{0} = 0
\end{aligned}
$$

$a=-\pi,\ b=\pi$

תזכורת: התפלגות אחידה PDF

$$
f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}
$$

סיכום: קבוע בזמן

2

הגדרה: $R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)=E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)]$

הצבה $= E[A\cos(2\pi t_1+\Theta)\,A\cos(2\pi t_2+\Theta)]$

תזכורת: $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

$$
=\frac{1}{2}E[A^2]\,E[\underbrace{\cos(2\pi[t_1-t_2])}_{\text{אין אקראיות}}]+\frac{1}{2}E[A^2]\,\underbrace{E[\cos(2\pi[t_1+t_2]+2\theta)]}_{=0}
$$

0 בדומה לתוחלת

תזכורת: $E[b]=b$

$$
=\frac{1}{2}E[A^2]\cos(2\pi\underbrace{[t_1-t_2]}_{\tau})
$$

תזכורת: $\cos(x)=\cos(-x)$

$$
=R_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{1}{2}E[A^2]\cos(2\pi\tau)
$$

$\tau=|t_1-t_2|$

סיכום: תלוי בהפרש זמנים (τ) בלבד

הערה: ניתן היה לעשות חישוב מהגדרה $R_x(t,t+\tau)$ ולהגיע לממצא זהה

סיכום של הדוגמה - מדובר באות סטציונרי!

$$R_x(t_1,t_2)\overset{?}{=}R_x(\tau)$$

רישום בצורה הזאת, כדי להעביר ששיוויון מתקיים (תשובה חיובית לשאלה)

הדגשה: $R_x(t_1,t_2)$ בלתי תלוי ב t_1, t_2

כשלעצמם, אלא בהפרש שלהם בלבד!

לחלופין * החישוב של $R_x(t,t+\tau)$ בלתי תלוי ב t (אלא מופיע בביטוי המתקבל של R_x)

תכונות של אמות ס'

* **סימטריה בזמן** (תכונה 6.6):

$$R_{\mathbf{x}}(-\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$
$$R_{\mathbf{x}}[-k] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

* **ערך מקסימלי** (תכונה 6.7):

$$R_{\mathbf{x}}(0) \geqslant |R_{\mathbf{x}}(\tau)|$$
$$R_{\mathbf{x}}[0] \geqslant |R_{\mathbf{x}}[k]|$$

עבור $\tau=0$ הערך הוא מקסימלי.
שיוויון הוא רק עבור א) אותות מחזוריים ב) אינסופ"ים בזמן

* **הספק ממוצע** (תכונה 6.8): הספק ממוצע של אות אקראי נתון ע"י

$$P_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{x}}(0) = E\left[|\mathbf{x}(t)|^2\right] = E\left[|\mathbf{x}(0)|^2\right]$$
$$P_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{x}}[0] = E\left[|\mathbf{x}[n]|^2\right] = E\left[|\mathbf{x}[0]|^2\right]$$

בדוגמה 8 הלן:
$$P_x = R_x[0] = \frac{1}{2} E[A^2]$$

* **שונות משותפת** (תכונה 6.9): שונות משותפת תלויה בהפרש זמנים בלבד

$$C_{\mathbf{x}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2 - t_1|), \quad \forall t_1, t_2$$
$$C_{\mathbf{x}}[k] = C_{\mathbf{x}}(k = |n_2 - n_1|), \quad \forall n_1, n_2$$

* **הפרש זמן 0** (תכונה 6.11): קשר בין שונות לשונות משותפת בנקודת זמן מסויימת

$$Var[\mathbf{x}(t)] = C_{\mathbf{x}}(t,t) = C_{\mathbf{x}}(0) = \sigma_{\mathbf{x}}^2$$
$$Var\left[\mathbf{x}[n]\right] = C_{\mathbf{x}}[n,n] = C_{\mathbf{x}}[0] = \sigma_{\mathbf{x}}^2$$

קבוע בזמן

* **מקדם קורלציה** (תכונה 6.12): מקדם קורלציה בהפרש זמנים τ

$$\rho_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{C_{\mathbf{x}}(\tau)}{C_{\mathbf{x}}(0)}$$
$$\rho_{\mathbf{x}}[k] = \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]}$$