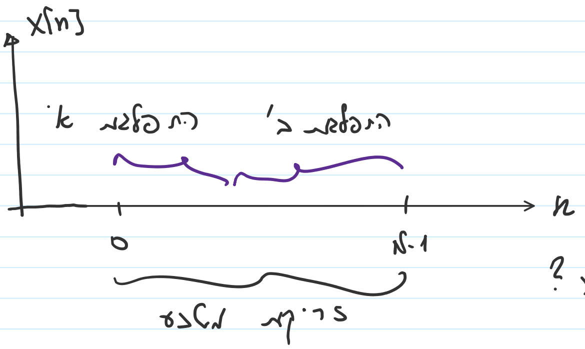
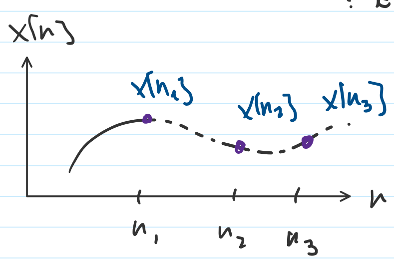
אותות אקראיים - הקדמה

דוגמה: צריכת מטבע כל שניה
אות אקראי.

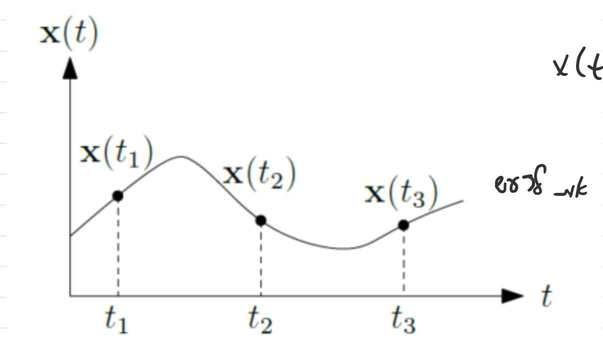


שאלות המתבקשות:

* האם התפלגות משתנה בזמן?
מה התפלגות של תוצאה מסוימת $x[n_0]$?
* מה המשמעות של תוחלת שונות של תהליך אקראי?
* האם ניתן לחזות $x[n_1]$ מ $x[n_2]$?
* " " " $x[n_3]$ מתוך $x[n_1], x[n_2]$
ביחד, והאם זה משפר חיזוי?



* הספק של $x(t)$
* ייצוג בתדר של $x(t)$
* סינון רעש $x(t)$
מתוך האות, יחס אות לרעש



סיווגים:

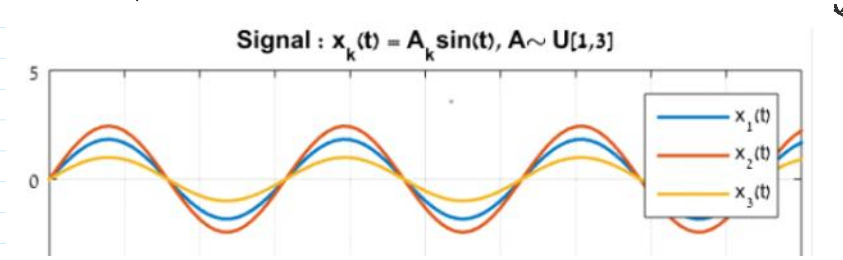
* זמן בדיד / רציף
* ערכים בדידים / רציפים

דוגמה: מחולל אותות אנלוגי עם מצב לא ידוע של בורר אמפליטודה.

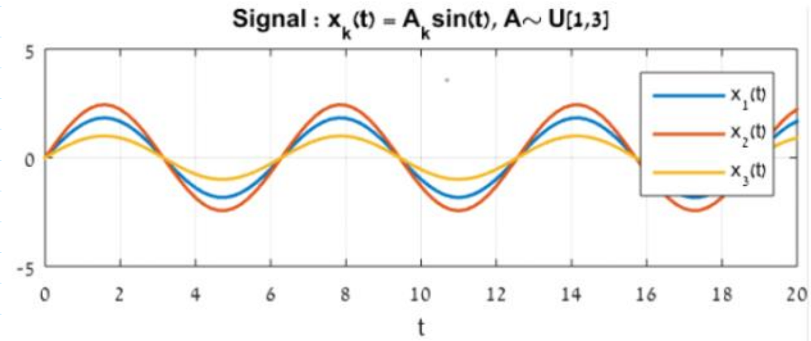
סימון: $x(t)$ - זמן רציף

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{משתנה אקראי}} \sin(\omega_0 t)$$

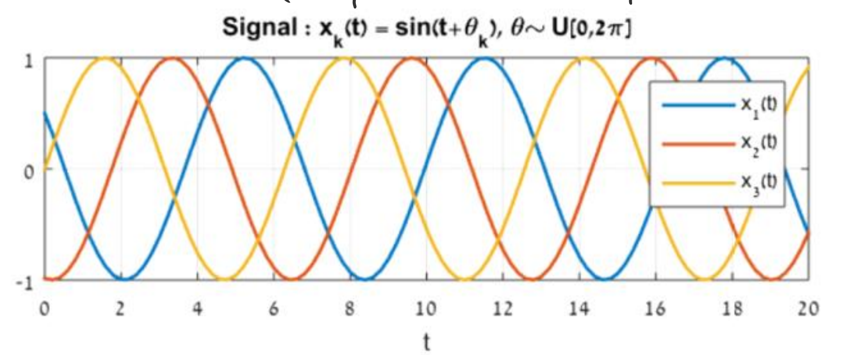
$x_1(t)$
$\vdots$
$x_n(t)$
תוצאה של נסוי אקראי = תהליך אקראי.



} $x_n(t)$



דוגמה: פאזה אקראית (אמפליטודה קבועה)



הגדרה: דגימה בודדת של תהליך אקראי היא משתנה אקראי.

זמן בדיד או רציף

הערה: אין כוונה לפעולת דגימה, אלא לערך מסוים $x(t)$ או $x[n_0]$

"דגימה בודדת" היא כוונה לנקודה שרירותית בזמן רציף או בדיד.

תכונות כתוצאה מהגדרה:

הערה: זמן (רציף או בדיד) הוא פרמטר לא אקראי ⇐ ניתן להציב כל ערך שהוא ברצוננו!

CDF (הגדרה 5.1): ההגדרה זהה לתהליכים בזמן רציף/בדיד

$$F_{\mathbf{x}}(x;t) = \Pr\{\mathbf{x}(t) \leqslant x\}$$
$$F_{\mathbf{x}}(x;n) = \Pr\{\mathbf{x}[n] \leqslant x\}.$$

יכול להיות כל ערך הרלוונטי לנו $t=t_0$, $n=n_0$

PDF (הגדרה 5.2): ההגדרה שונה עבור זמן רציף ובדיד

$$f_{\mathbf{x}}(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} F_{\mathbf{x}}(x;t)$$
$$p_{\mathbf{x}}[x_k;n] = \Pr\{\mathbf{x}[n] = x_k\}.$$

תוחלת (הגדרה 5.3): תוחלת כפונקציה של זמן נתונה ע"י

$$E[\mathbf{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}}(x;t)dx = \mu_{\mathbf{x}}(t)$$
$$E\Big[\mathbf{x}[n]\Big] = \sum_i x_i p_{\mathbf{x}}[x_k;n] = \mu_{\mathbf{x}}[n]$$

שונות (הגדרה 5.4): שונות כפונקציה של זמן נתונה ע"י

$$E[X^2]-E^2[X] \xrightarrow[\text{זמן}]{\text{הוספת}} \mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right]=E\left[\mathbf{x}^2(t)\right]-E^2\left[\mathbf{x}(t)\right]=\sigma_{\mathbf{x}}(t)$$

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}[n]\right]=E\left[\mathbf{x}^2[n]\right]-E^2\left[\mathbf{x}[n]\right]=\sigma_{\mathbf{x}}[n]$$

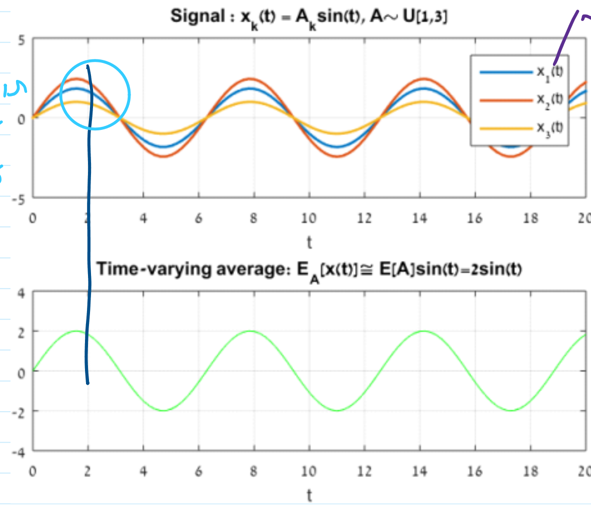
דוגמה: $x(t)=A\cos(2\pi t)$ חשב: $E[x(t)]$

A . מ"א

תזכורת: $E[aX]=aE[X]$

פתרון: $\mu(t)=E\left[\mathbf{x}(t)\right]=E[A]\underbrace{\cos(2\pi t)}$

* לא אקראי ⇐ מבחינת חישוב הסתברותי מדובר בקבוע
* תוחלת משתנה בזמן



תוחלת ע"פ כל ערכים אפשריים עבור זמן t זה

$\rightarrow A\sin(t)$ $\quad A\sim U[1,3]$

$\Rightarrow E[A]\sin(t)=2\sin(t)$

$E[A]=\frac{a+b}{2}=\frac{1+3}{2}$ תכונה של התפלגות אחידה

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right]&=E\left[\mathbf{x}^2(t)\right]-E^2\left[\mathbf{x}(t)\right]\\&=E[A^2]\cos^2(2\pi t)-E^2[A]\cos^2(2\pi t)\\&=\underbrace{\mathrm{Var}\left[A\right]}_{E[A^2]-E^2[A]}\cos^2(2\pi t)\end{aligned}$$

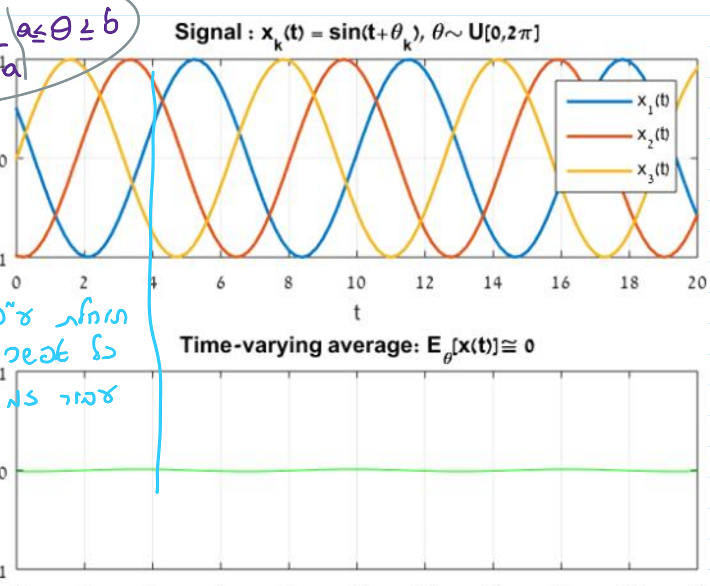
תזכורת: $Var[X]=E[X^2]-E^2[X]$

דוגמה 2:

מתנד עם מופע (פאזה) אקראית קבועה: נתון אות $x(t)=\cos(2\pi t+\theta)$, כאשר $\theta\sim U[-\pi,\pi]$

$f_\theta(\theta)=\frac{1}{b-a}$ $\quad a\le\theta\le b$

$$\begin{aligned}E\left[\mathbf{x}(t)\right]&=E\left[\cos(2\pi t+\theta)\right]\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(2\pi t+\theta)}_{g(\theta)}f_\theta(\theta)d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0\end{aligned}$$



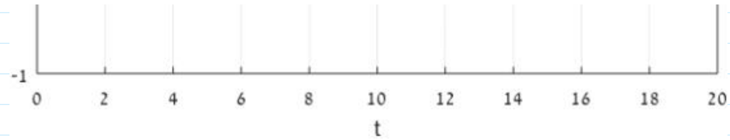
תוחלת ע"פ כל אפשרויות עבור זמן t זה

תזכורת:

$$E[\mathbf{x}(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{x}_{g(x)=x}f_{\mathbf{x}}(x;t)dx=\mu_{\mathbf{x}}(t)$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty} g(x) f_X(x) dx$$



זוג דגימות

זוג דגימות של תהליך אקראי זה זוג משתנים אקראיים.

* ניתן להגדיר את ההתפלגות המשותפת של זוג הדגימות, בין היתר ע"י PDF ו-CDF.

CDF (הגדרה 5.5): ההגדרה זהה לתהליכים בזמן רציף/בדיד

$$F_{XY}(x,y) = p(X \leqslant x, Y \leqslant y) \longrightarrow F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \Pr\big(\mathbf{x}(t_1) \leqslant x_1, \mathbf{x}(t_2) \leqslant x_2\big).$$

PDF (הגדרה 5.6): בדומה למקרה של דגימה בודדת

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \xrightarrow{\text{הוספת מימד זמן}} f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$p_{\mathbf{x}}[x_1, x_2; n_1, n_2] = \Pr\big[\mathbf{x}[n_1] = x_1, \mathbf{x}[n_2] = x_2\big].$$

תכונות:

* מקבילה של $E[XY]$ $X = x(t_1), Y = x(t_2)$

אוטו-קורלציה (auto-correlation) (הגדרה 5.7): ניתן להגדיר קשר בין הדגימות ע"י

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right]$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{x}[n_2]\right]$$

- סימטריה בזמן:

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_2, t_1)$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{x}}[n_2, n_1]$$

- הפרש זמן 0:

$$R_{\mathbf{x}}(t,t) = E\left[\mathbf{x}^2(t)\right]$$
$$R_{\mathbf{x}}[n,n] = E\left[\mathbf{x}^2[n]\right]$$

- מצב מיוחד:

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = 0$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = 0$$

אורתוגונליות

---

* מקבילה של

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[X,Y] &= E\Big[\big(X - E[X]\big)\big(Y - E[Y]\big)\Big] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

שונות משותפת (auto-covariance) (הגדרה 5.8):

$$C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\left[\{\mathbf{x}(t_1) - E[\mathbf{x}(t_1)]\}\{\mathbf{x}(t_2) - E[\mathbf{x}(t_2)]\}\right]$$

$$= R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$

$$C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = E\left[\{\mathbf{x}[n_1] - E[\mathbf{x}[n_1]]\}\{\mathbf{x}[n_2] - E[\mathbf{x}[n_2]]\}\right]$$
$$= R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] - E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] E\left[\mathbf{x}[n_2]\right]$$

תזכורת:

$$\mathrm{Cov}[X,X] = Var[X]$$
$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Cov}[Y,X]$$

$$\text{Cov}[X,X] = Var[X]$$
$$\text{Cov}[X,Y] = \text{Cov}[Y,X]$$

$$= R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] - E\left[\mathbf{x}[n_1]\right]E\left[\mathbf{x}[n_2]\right]$$

- הפרש זמן 0

$$C_{\mathbf{x}}(t,t) = \text{Var}[\mathbf{x}(t)]$$
$$C_{\mathbf{x}}[n,n] = \text{Var}[\mathbf{x}[n]]$$

- סימטריה בזמן
- חוסר קורלציה

$$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = 0$$
$$C_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = 0$$

משתנים בלתי תלויים סטטיסטית:

עבור $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$ בלתי תלויים מתקיים

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$
$$R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = E\left[\mathbf{x}[n_1]\right]E\left[\mathbf{x}[n_2]\right]$$

- מקדם קורלציה בין זמן t_1 לזמן t_2

$$\rho_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1,t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2,t_2)}}$$
$$\rho_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = \frac{C_{\mathbf{x}}[n_1,n_2]}{\sqrt{\underbrace{C_{\mathbf{x}}[n_1,n_1]}_{Var[x[n_1]]}C_{\mathbf{x}}[n_2,n_2]}}$$

טעות נפוצה

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_1) = E[\mathbf{x}^2(t_1)] \neq E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_1)] = E^2[\mathbf{x}(t_1)]$$

$$E[x^2] \neq E[x]\cdot E[x] = E^2[x]$$

דוגמה: $\mathbf{x}(t) = A\cos(2\pi t)$

Auto correlation

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right]$$
$$= E\left[A\cos(2\pi t_1)A\cos(2\pi t_2)\right]$$
$$= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$

$X = x(t_1)$
$Y = x(t_2)$
$E[XY]$

Auto-covariance

$$C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{x}(t_2)]$$
$$= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) - E[A]\cos(2\pi t_1)E[A]\cos(2\pi t_2)$$
$$= \underbrace{\left(E[A^2] - E^2[A]\right)}\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$
$$= \text{Var}\left[A\right]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)$$

$$C_{\mathbf{x}}(t,t) = \text{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right] = \text{Var}\left[A\right]\cos^2(2\pi t)$$

מקרה פרטי של $t_1 = t_2$

תזכורת:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

תצרה לו!

דוגמה: $\mathbf{x}(t) = \cos(2\pi t + \theta)$

$$R_{\mathbf{x}}(t_1,t_2) = E\left[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right]$$
$$= E\left[\cos(\overbrace{2\pi t_1 + \theta}^{\alpha})\cos(\overbrace{2\pi t_2 + \theta}^{\beta})\right]$$
$$= \frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi\underbrace{\left[t_1 - t_2\right]}_{\alpha-\beta\ \text{הפרש}})\right] + \underbrace{\frac{1}{2}E\left[\cos(2\pi\overbrace{\left[t_1 + t_2\right]}^{\alpha+\beta\ \text{סכום}} + 2\theta)\right]}_{=0\ \text{בדומה}}$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi\left[t_1 - t_2\right])$$
$$= C_{\mathbf{x}}(t_1,t_2)$$

לחישוב מוחלט לעיל עם אינטגרל שהתאפס

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi\,[t_1 - t_2])$$
$$= C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$$

לעיל עם אינטגרל
שהתאפס

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}(t)\right] = C_{\mathbf{x}}(t,t) = \frac{1}{2}$$

הערה: שונות ותוחלת ב"ת בזמן

$$E\left[\mathbf{x}(t)\right] = E\left[\cos(2\pi t + \theta)\right] = 0$$

רעש לבן גאוסי

מקרה פרטי חשוב (תת-סיווג) של תהליך אקראי - נחזור עליו עוד פעמים רבות בהמשך

רעש לבן גאוסי (הגדרה 5.12): תהליך אקראי $\mathbf{x}[n] \sim N(0,\sigma^2)$, כאשר $\mathbf{x}[n], \mathbf{x}[m]$ חסרי קורלציה (ובלתי תלויים) נקרא רעש לבן גאוסי.

* $\boxed{\text{כל זוג דגימות אפשרי הוא חסר קורלציה.}}$

* כל אחת מה דגימות $x[n]$ מתפלגת גאוסית $x[n] \sim N(\underbrace{0}_{\mu}, \sigma^2)$

* תכונות :

$$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = 0 = \mu$$

$$\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}[n]\right] = \sigma^2$$

בגלל תוחלת 0
$R_x[n_1,n_2] = C_x[n_1,n_2]$

$$R_{\mathbf{x}}[n_1,n_2] = \sigma^2 \overbrace{\delta[n_1 - n_2]}^{\text{הלם בדיד}} = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Var}[x[n]]$$

$$= C_{\mathbf{x}}[n_1,n_2]$$

$X = x[n_1] \quad Y = x[n_2]$

$\Rightarrow \quad E[XY] = 0$

מתקיים כל זוג $X \neq Y$

$n_1 = n_2 \Rightarrow X = Y \Rightarrow E[X^2] = \sigma^2$

צורת רישום של הפרש זמנים, = זה ≠ הוא ע"י פונקציית $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$n=0$ ← הפרש זמן 0

$n \neq 0$ ← הפרש זמן $\neq 0$

דוגמה 5.4: נתון תהליך אקראי $\mathbf{x}[n] = \frac{1}{2}\mathbf{w}[n] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]$, כאשר $\mathbf{w}[n]$ הוא רעש לבן גאוסי. חשב $C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2]$.

$x[n] = h[n] * w[n]$

$h[n] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

פתרון:

$$E[\mathbf{x}[n]] = \frac{1}{2}E[\cancel{\mathbf{w}[n]}] + E\left[\frac{1}{2}\cancel{\mathbf{w}[n-1]}\right] = 0$$

$$C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = E[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{x}[n_2]]$$

$$= \frac{1}{4}E\left[\underbrace{(\mathbf{w}[n_1] + \mathbf{w}[n_1 - 1])}_{x[n_1]}\ \overbrace{(\mathbf{w}[n_2] + \mathbf{w}[n_2 - 1])}^{x[n_2]}\right]$$

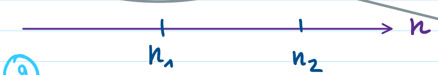
$$= \frac{1}{4}\Big(\underset{①}{E[\mathbf{w}[n_1]\mathbf{w}[n_2]]} + \underset{②}{E[\mathbf{w}[n_1]\mathbf{w}[n_2 - 1]]}$$

$$+ \underset{③}{\underbrace{E[\mathbf{w}[n_1 - 1]\mathbf{w}[n_2]]}_{R\mathbf{w}[n_1-1,n_2]=\sigma^2\delta[n_1-n_2-1]}} + \overset{④}{E[\mathbf{w}[n_1 - 1]\mathbf{w}[n_2 - 1]]}\Big)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[n_1 - n_2] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[n_1 - n_2 - 1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[n_1 - n_2 + 1]$$

①

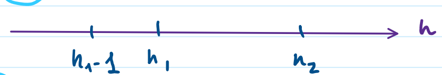
$\sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - n_2]$



②

$\sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - (n_2 - 1)] = \sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - n_2 + 1]$

③



$\sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - 1 - n_2]$

④

$\sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - 1 - (n_2 - 1)] = \sigma^2 \frac{1}{4}\delta[n_1 - n_2]$