- מטריצת Covariance
- PDF/CDF
- Matlab
- הערכות לבוחן

## משתנים אקראיים גאוסיים

סיכום הרצאה קודמת: התפלגות גאוסית דו ממדית של זוג משתנים $X_1,X_2$

צורת רישום ←

$$\underbrace{\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}}_{\underline{X}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\text{ גאוסי}} \underbrace{\sim N}_{\text{מתפלג}}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}}_{\text{תוחלת}},\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}}_{\text{מטריצת Cov}}\right)$$

כאשר:

$$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$
$$X_2\sim N(\underbrace{\mu_2}_{\text{תוחלת}},\underbrace{\sigma_2^2}_{\text{שונות}})$$

מקדם קורלציה

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]\,\mathrm{Var}[X_2]}}$$

## מטריצת Covariance

מטרה: מטריצת שונות

הגדרה:

$$\underbrace{\mathrm{C}_{\mathbf{X}}}_{\text{סימון של מטריצת Cov.}}=\begin{bmatrix}\overset{1)}{\mathrm{Cov}[X_1,X_1]} & \overset{2)}{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}\\ \overset{3)}{\mathrm{Cov}[X_2,X_1]} & \overset{4)}{\mathrm{Cov}[X_2,X_2]}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2]\\ \mathrm{Cov}[X_1,X_2] & \mathrm{Var}[X_2]\end{bmatrix}$$

תזכורת:
$\mathrm{Cov}[X,X]=Var[X]$
$\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{Cov}[Y,X]$

1) שונות של $X_1$
2)
3) שונות משותפת $X_1,X_2$ "
4) שונות של $X_2$

תכונות חשובות:

* סימטריה

$\mathrm{C}_{\mathbf{X}}=\mathrm{C}_{\mathbf{X}}^T \quad \mathrm{Cov}[X_i,X_j]=\mathrm{Cov}[X_j,X_i]$ T- transpose

* עבור $X_1,X_2$ חסרי קורלציה ⇐ $Cov[X_1,X_2]=0$ ← תנאי לחוסר קורלציה

מטריצה אלכסונית

$$C_{\underline{X}}=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}[X_1] & 0\\ 0 & \mathrm{Var}[X_2]\end{bmatrix}$$

* בהתייחסות למה שרשום לעיל

$$Cov[X_1,X_2]=\rho\,\sigma_1\sigma_2$$

$\sigma_1=\sqrt{Var[X_1]}$ $\sigma_2=\sqrt{Var[X_2]}$

מקדם קורלציה $\rho=\dfrac{Cov[X_1,X_2]}{\sigma_1\sigma_2}$

במקרה של 2x2 הצורה של מט Cov היא:

$$C_{\underline{X}}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

דוגמה:

תזכורת:

**משפט.** משתנים אקראיים $X_1,X_2,\ldots,X_N$ הם גאוסיים במשותף (בעלי התפלגות גאוסית N-ממדית משותפת) אם ורק אם הקומבינציה לינארית $\sum_{m=1}^N a_mX_m$ היא מתפלגת גאוסית עבור $\forall a_m\in\mathbb{R}$.

תזכורת: מCor:
$a_1X_1+a_2X_2\sim N$
כיוון א׳: יש ל $X_1X_2$ התפלגות גאוסית משותפת
כיוון ב׳: $X_1,X_2$ הם גאוסים

**דוגמה 4.3**: נתונים זוג משתנים אקראיים, $X\sim N(\underbrace{0}_{\mu=0},\sigma^2), Y=3X$.

(א) הראה שמשתנים $X,Y$ הם גאוסיים במשותף.

$X\sim N(0,\sigma^2)$
$Y\sim 3$

**דוגמה 4.3**: נתונים זוג משתנים אקראיים, $X \sim N(\underbrace{0}_{\mu=0}, \sigma^2), Y = 3X$.

$X \sim N(0, \sigma^2)$
$Y = 3x$

(א) הראה שמשתנים $X, Y$ הם גאוסיים במשותף.

(ב) מהי מטריצת covariance? מהי התפלגות המשותפת שלהם?

פתרון:

א

$$a_1X + a_2\overbrace{Y}^{Y=3x} = a_1X + 3a_2X = \underbrace{(a_1 + 3a_2)}_{\text{קבוע}}\underbrace{X}_{\text{משתנה גאוסי}} \sim N\left(0, \underbrace{(a_1 + 3a_2)^2\sigma^2}_{\text{שונות}}\right)$$

תזכורת:
$$\boxed{Var[aX + b] = a^2Var[X]}$$

$Var[X] = \sigma^2$
$Var[aX] = a^2\sigma^2$

בהתאם להגדרה: כל $a_1X_1 + a_2X_2$ מתפלג גאוסי ⇐ יש להם התפלגות גאוסית

ב

מטרה של סעיף ב': למצוא את כל הפרמטרים של התפלגות משותפת

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{covariance מ}}\right)$$

$Var[X] = \sigma^2$
$Var[Y] = Var[3X] = 3^2Var[X] = 9\sigma^2$
$E[XY] = E[3X \cdot X] = 3E[X^2] = 3\sigma^2$

תזכורת:
$$\boxed{Var[X] = E[X^2] - E^2[X]}$$

$E[X^2] = Var[X] + \underbrace{E^2[X]}_{0} = \sigma^2$ את הדרכים לחישוב $E[X^2]$

$E[X] = 0 \quad E[Y] = E[3X] = 3E[X] = 0$

$\Rightarrow Cov[X,Y] = E[XY] - \cancel{E[X]E[Y]} = E[XY] = 3\sigma^2$

סיכום:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \text{Cov}[X_1, X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \text{Cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{\mathbf{X}}\right)$$

דוגמה:

מטרה: ✓ * להראות של X,Y אין התפלגות גאוסית משותפת, אפילו שכל אחד מהם בנפרד מתפלג גאוסית
✓ * תלויים, חסרי קורלציה

$X \sim N(\underbrace{0}_{\mu=0}, 1)$ — הכפלה ב $\pm 1$
$Y = W \cdot X \sim N(0, 1)$ — לא משנה התפלגות:
$W = p(W = \pm 1) = \frac{1}{2}$ כאשר: — הסתברות
$p(W=1) = \frac{1}{2}$
$p(W=-1) = \frac{1}{2}$

□ חסרי קורלציה $X, Y$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \underbrace{\cancel{E[X]}}_{0}E[Y] = E[X^2W] = \underbrace{E[X^2]}_{=1} \cdot \underbrace{\cancel{E[W]}}_{E[W]=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

□ תלויים, $|X| = |Y|$.

$\left.\begin{matrix} X \\ W \end{matrix}\right\}$ בלתי-תלויים

□ אינם בעלי התפלגות גאוסית משותפת. מצב של $p(X + Y = 0) = \frac{1}{2}$ לא יכול לקרות עבור התפלגות רציפה (בוודאי גם גאוסית).
"רגילה"

$Y = WX$

$p(X + WX = 0) = p(X(W+1) = 0) = \frac{1}{2}$

$W + 1 \Rightarrow p(W+1) = 0, \frac{1}{2}$ עם הסתברות
$2, \frac{1}{2}$

תכונות של משתנים גאוסיים במשותף

**חיזוי לינארי** (הגדרה 4.9): עבור משתנים גאוסיים במשותף, החיזוי לינארי הוא חיזוי אופטימלי (אין חיזוי יותר טוב ממנו).

**זוג משתנים גאוסיים במשותף PDF** (הגדרה 4.10): ה-PDF המשותף של זוג משתנים גאוסיים

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$$

נתון ע"י

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \times \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right) \tag{4.21}$$

**צורת ה-PDF** (תכונה 4.7): ניתן לשים לב, שביטוי בתוך $\exp()$ הוא אליפסה מהצורה

$$\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right] = c^2 \tag{4.22}$$

עבור מקרי קצה

- $\rho = 0$ המשתנים הם חסרי קורלציה, והצורה היא צורת מעגל.
- $\rho = \pm 1$ קשר לינארי, והצורה היא קו ישר.

דוגמאות מספריות:

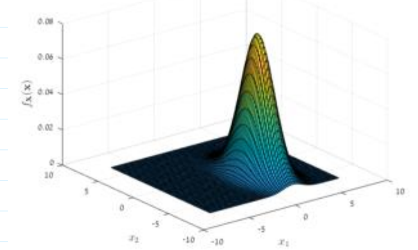
$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 4\rho \\ 4\rho & 4 \end{bmatrix}$$

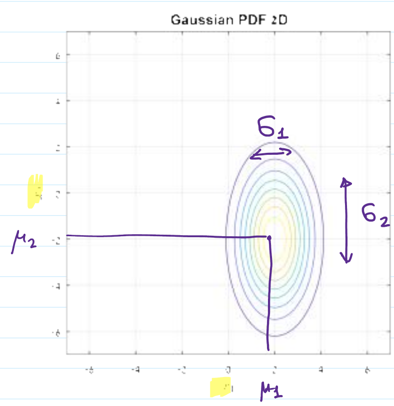
$\sigma_1^2 = 1^2$

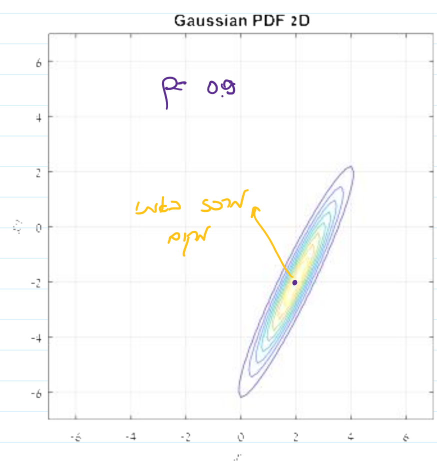
$\sigma_2^2 = 2^2$

$\rho = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0.95$

$\rho = 0$





* התפלגות שולית של $X_1, X_2$

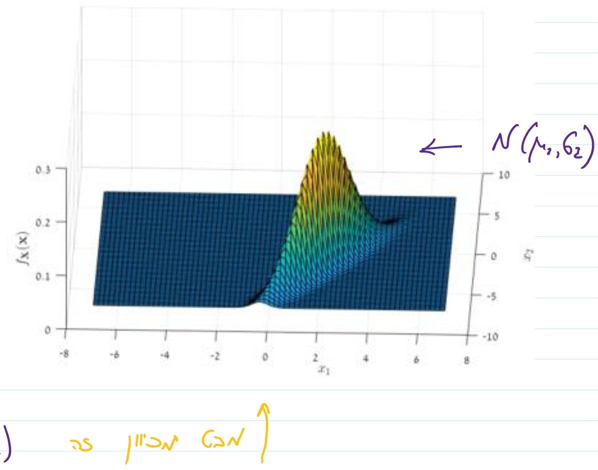
$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

בלתי תלויים במקדם $\rho$!

* ככל ש-$\rho$ גודל/קטן מ-0,

הגאוסה מקבלת סיבוב
ונהיית צרה יותר.




CDF

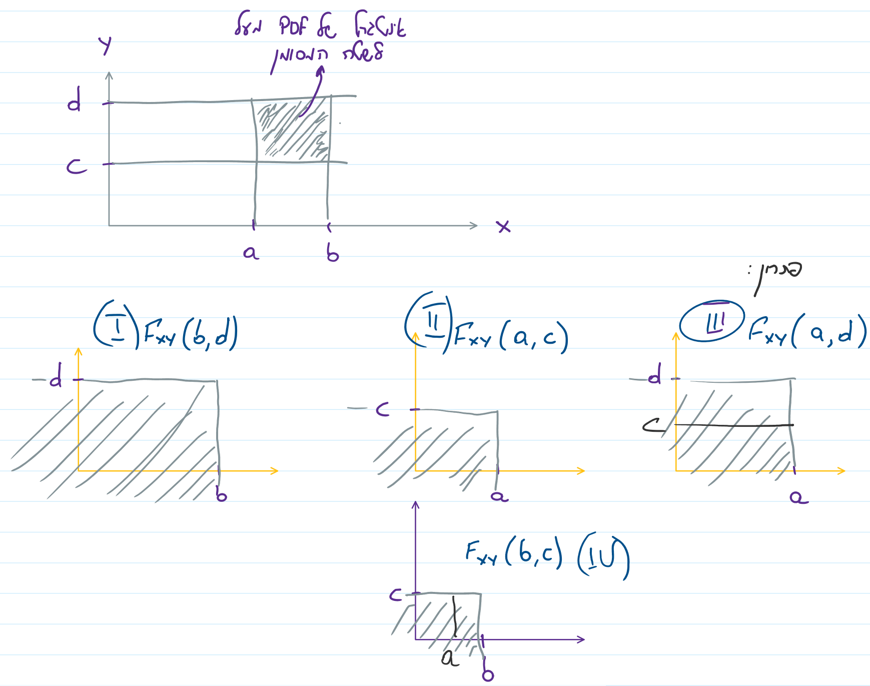
**קשר בין PDF ל-CDF** (תכונה 4.1):

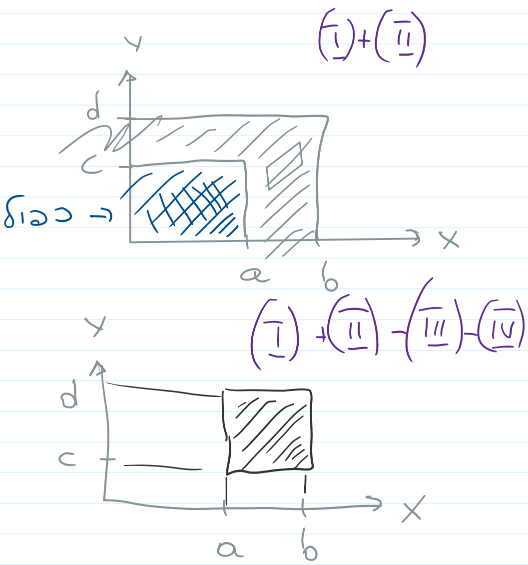
תזכורת:

$$F_{XY}(x,y) = p(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(s,p)\,dp\,ds$$

דוגמה: חשב $p(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$ בהינתן $\boxed{F_{XY}(x,y)}$ CDF




$$p(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F_{XY}(b,d) - F_{XY}(a,d) - F_{XY}(b,c) + F_{XY}(a,c)$$

התפלגות גאוסית ב-13 ממדים.

ניתן לחשוב מספר בלבד (דיק Matlab)

פרמטרים
של התפלגות

```
mu1 = 0;
mu2 = 0;
sigma1 = 1;
sigma2 = 2;
rho = 0.5;
mu = [mu1; mu2];
Cv = [sigma1^2 rho*sigma1*sigma2; ...
    rho*sigma1*sigma2 sigma2^2];
```

$F_{XY}(a,b)$

```
a = 0;
b = 0;
% F(a,b)
mvncdf([a; b],mu, Cv) % mvn = multivariate normal
```

← ערך המספר.