השלמה מהרצאה קודמת - מ"ל רציף

משפט גבול המרכזי

$$E[X_n]=\mu$$
$$Var[X_n]=\sigma^2$$

X_n, X_m בעלי אותה התפלגות (רציפה או בדידה) ובלתי תלויים

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

$\boxed{\text{זוג משתנים}}$

מקרה: ניסוי בעל 2 תוצאות

הערה: ישנו מספר מצומצם יחסית של התפלגויות דו-ממדיות בעלי PDF שהוא ביטוי אנליטי (משתנים תלויים) בקורס שלנו נלמד התפלגות גאוסית בלבד

CDF (הגדרה 4.1):

$$F_{XY}(x,y)=p(X\leqslant x, Y\leqslant y) \tag{4.1}$$

וגם

PDF (הגדרה 4.2):

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{4.2}$$

קשר בין PDF ל-CDF (תכונה 4.1):

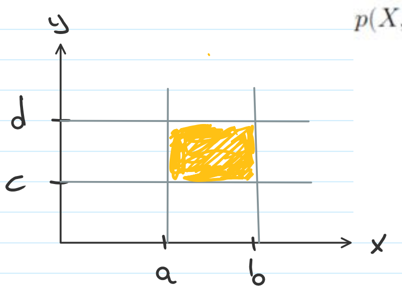
$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(s,p)\,dp\,ds \tag{4.3}$$

תכונות PDF (תכונה 4.2): תחום ערכים ו"סכום" ערכים

$$f_{XY}(x,y)\geqslant 0 \tag{א4.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1 \tag{ב4.4}$$

דוגמה 4.1: נתון מלבן $B=(a,b]\times(c,d]$. בהינתן $F_{XY}(x,y)$, חשב הסתברות $p(X,Y\in B)$.

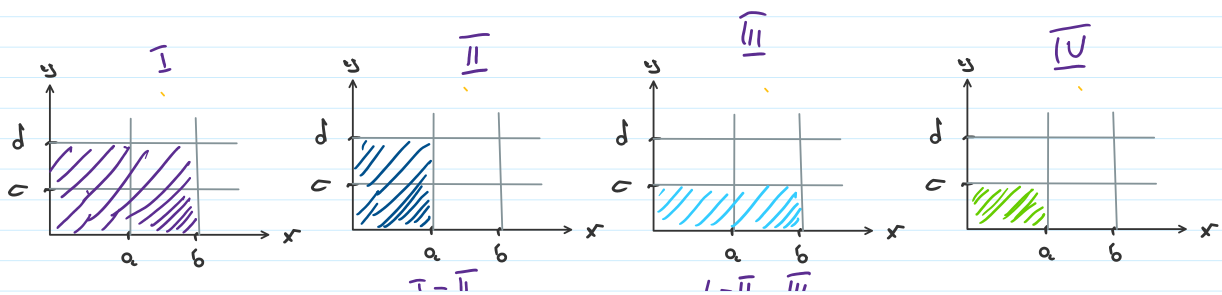


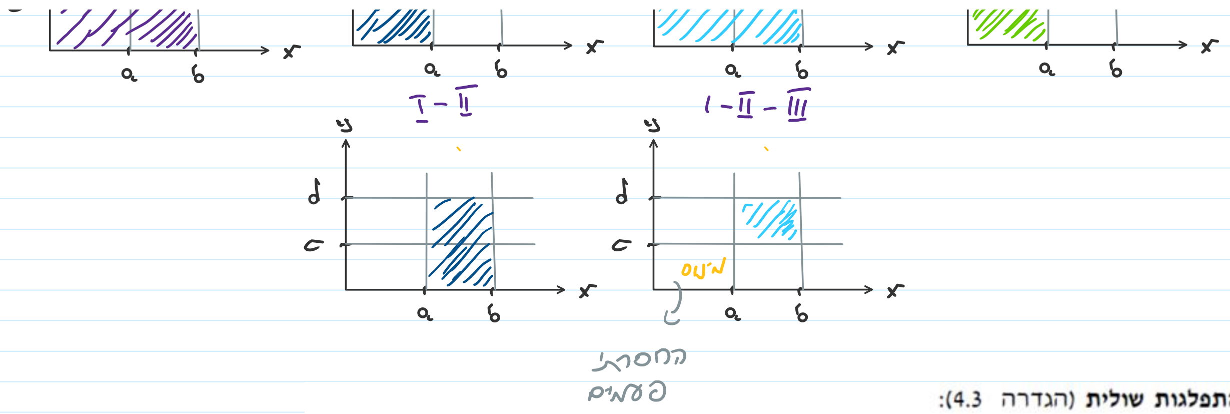
פתרון:

$$\begin{aligned} p(X,Y\in B) &= p(a<X\leqslant b, c<Y\leqslant d)\\ &= \underbrace{F_{XY}(b,d)}_{I}-\underbrace{F_{XY}(a,d)}_{II}-\underbrace{F_{XY}(b,c)}_{III}+\underbrace{F_{XY}(a,c)}_{IV}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_c^d\int_a^b}_{\text{מלבן } B} f_{xy}(s,p)dpds \rightarrow$$

מקרה: לכתוב ע"י ביטוי CDF בלבד





התפלגות שולית (הגדרה 4.3):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad \text{(א4.7)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx \qquad \text{(ב4.7)}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) \qquad \text{(ג4.7)}$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y) \qquad \text{(ד4.7)}$$

משתנים בלתי תלויים סטטיסטית (הגדרה 4.4): משתנים נקראים בלתי תלויים סטטיסטית אם ורק אם מתקיים

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{(א4.8)}$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \qquad \text{(ב4.8)}$$

התפלגות גאוסית דו-ממדית (משתנים גאוסיים במשותף)

הקדמה - משפט:

$\forall a_i \in \mathbb{R}$ $\quad a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_NX_N \sim N(\cdot)$ $\iff$

אם ורק אם הקשר המתקיים $X_1, \dots, X_N$ גאוסיים במשותף (יש להם התפלגות משותפת)

חישובי עזר לבניית התפלגות גאוסית משותפת:

נתון: $W_1 \sim N(0,1)$, $W_2 \sim N(0,1)$ בלתי תלויים $\Rightarrow$ $E[W_1] = E[W_2] = 0$, $Var[W_1] = Var[W_2] = 1$

חישוב הנדרש:

$$X_1 = \mu_1 + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2$$
$$X_2 = \mu_2 + \sigma_{21}W_1 + \sigma_{22}W_2$$

μ_i, σ_{ij} קבועים ממשיים

$\Rightarrow$ $E[X_1], Var[X_1], Cov[X_1,X_2], E[X_2], Var[X_2], \rho_{X_1X_2} = ?$

$$E[X_1] = E[\mu_1] + \sigma_{11}\cancelto{0}{E[W_1]} + \sigma_{12}\cancelto{0}{E[W_2]} = \mu_1$$

$$E[X_2] = \mu_2$$

תזכורת: עבור X,Y בלתי תלויים

$$\boxed{Var[aX+bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y]}$$

$$\mathrm{Var}[aX+bY]=a^2\,\mathrm{Var}[X]+b^2\,\mathrm{Var}[Y]$$

$$E[X_2]=\mu_2$$

$$\mathrm{Var}[X_1]=\sigma_{11}^2\,\mathrm{Var}[W_1]+\sigma_{12}^2\,\mathrm{Var}[W_2]=\underbrace{\sigma_1^2}_{\text{סימון}}=\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2$$

$$\mathrm{Var}[X_2]=\sigma_2^2=\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2$$

בהתאם למשפט:

$$\sigma_{11}W_1+\sigma_{12}W_2\sim N(\underbrace{\quad}_{\text{תוחלת}}\cdot\underbrace{\quad}_{\text{שונות}})$$

משפט $\Rightarrow$ $\underbrace{X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\qquad X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)}_{\text{התפלגויות שוליות של } X_1,X_2}$

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}{\sqrt{\underset{\sigma_1^2}{\mathrm{Var}[X_1]}\,\underset{\sigma_2^2}{\mathrm{Var}[X_2]}}}=?\qquad \mathrm{Cov}[X_1,X_2]=E[X_1X_2]-\overset{\mu_1}{E[X_1]}\,\overset{\mu_2}{E[X_2]}$$

$$E[X_1,X_2]=E\left[(\mu_1+\sigma_{11}W_1+\sigma_{12}W_2)(\mu_2+\sigma_{21}W_1+\sigma_{22}W_2)\right]$$

$$=E[\mu_1\mu_2+\mu_1\sigma_{21}W_1+\mu_1\sigma_{22}W_2$$
$$+\mu_2\sigma_{11}W_1+\sigma_{11}\sigma_{21}W_1^2+\sigma_{11}\sigma_{22}W_1W_2$$
$$+\mu_2\sigma_{12}W_2+\sigma_{12}\sigma_{21}W_1W_2+\sigma_{12}\sigma_{22}W_2^2]$$
$$=\mu_1\mu_2+\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22}$$

$$E[W_1]=E[W_2]=0$$
$$E[W_1W_2]=E[W_1]E[W_2]=0$$
$$\underset{=1}{\mathrm{Var}[W_1]}=E[W_1^2]-\cancel{E^2[W_1]}^{\,0}$$
$$\Rightarrow\ E[W_1^2]=1$$

$$\mathrm{Cov}[X_1,X_2]=\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22}$$

$$\rho_{X_1X_2}=\frac{\sigma_{11}\sigma_{21}+\sigma_{12}\sigma_{22}}{\sigma_1\sigma_2}\ \Rightarrow\ \mathrm{Cov}[X_1,X_2]=\rho\cdot\sigma_1\sigma_2$$

סיכום: התפלגות דו- ממדית $\boxed{\text{משותפת}}$ היא מהצורה:

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N\left(\underbrace{\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}}_{\substack{\text{תוחלת}\\(\text{וקטור})}},\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Covariance}\\(\text{מטריצה})}}\right)$$

הערה: כמובן, X_1, X_2 מתפלגים גאוסית (בנפרד)

כאשר **מטריצת covariance** (הגדרה 4.6): מטריצה מהצורה

$$C_{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}[X_1,X_1]&\mathrm{Cov}[X_1,X_2]\\\mathrm{Cov}[X_2,X_1]&\mathrm{Cov}[X_2,X_2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}[X_1]&\mathrm{Cov}[X_1,X_2]\\\mathrm{Cov}[X_1,X_2]&\mathrm{Var}[X_2]\end{bmatrix}$$

דוגמה:

נתונים זוג משתנים אקראיים, $X \sim N(0,\sigma^2), Y = 3X$.

(א) הראה שמשתנים X, Y הם גאוסיים במשותף.

(ב) מהי מטריצת covariance? מהי התפלגות המשותפת שלהם?

א.

משפט של קומבינציה לינארית

$$\underbrace{a_1X + a_2Y}_{\text{האם מתפלג גאוסי}} = a_1X + 3a_2X = \underbrace{(a_1+3a_2)}_{a}X \sim N\left(0, \underbrace{(a_1+3a_2)^2}_{a^2}\sigma^2\right)$$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_NX_N \xrightarrow{?} N(\cdot)$$

$$\boxed{Var[aX] = a^2 Var[X]}$$

ב. שים לב $E[X] = E[Y] = 0 \Rightarrow Var[X] = E[X^2] = \overset{\text{נתון}}{\sigma^2}$

$Var[Y] = E[Y^2]$

$Cov[X,Y] = E[XY]$

$$E[XY] = E[3X^2] = 3E[X^2] = \mathrm{Cov}[X,Y] = 3\sigma^2$$

$$E[Y^2] = 3^2E[X^2] = \mathrm{Var}[Y] = 9\sigma^2$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}[X_1,X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_2,X_1] & \mathrm{Cov}[X_2,X_2] \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

סיכום:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{\mathbf{X}}\right)$$

דוגמה: נתון: $X \sim N(0,1)$ $\quad E[X]=0 \quad Var[X]=1$

$W \Rightarrow p(W=1) = \frac{1}{2}$

$p(W=-1) = \frac{1}{2}$

X, W ב"ת

$Y = WX$

שאלה:

* התפלגות של Y ?
* $Cov[X,Y]$?
* האם גאוסיים במשותף ?

פתרון: $|X| = |Y|$ תלויים סטטיסטית

$Y \sim N(0,1)$ שימו סימן אקראי לא משנה את התפלגות גאוסית

חסרי קורלציה

$$Cov[X,Y] = E[XY] - \cancel{E[X]}^{0}E[Y]$$

$$= E[X^2W] = E[X^2]\cancel{E[W]}^{0} = 0$$

$E[W] = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$

$a=1$
$b=1$

$aX+bY \overset{?}{\sim} N$ ⇐ לא מפולג גאוסית

למה? לדוגמה, כי

$p(X+Y=0)=\frac{1}{2}$

מ"א רצ' $Z=X+Y$ $\quad p(Z=a)=0$

סיכום: זוג מ"א בלתי
התפלגות שולית גאוסית כל אחד
ללא התפלגות גאוסית משותפת

תכונות חשובות של משתנים גאוסיים במשותף

* קשר בין המשתנים:

בלתי - תלויים ⇐ חסרי קורלציה $\quad E[XY]=E[X]E[Y] \Rightarrow Cov=0$

משתנים גאוסיים במשותף

דו-כיווני

חסרי קורלציה ⇔ בלתי תלויים

★ **חיזוי לינארי** (הגדרה 4.10): עבור משתנים גאוסיים במשותף, החיזוי הלינארי הוא חיזוי אופטימלי (אין חיזוי יותר טוב ממנו).

באופן כללי, אין שום "הבטחה" שחיזוי לינארי הוא חיזוי הטוב
ביותר האפשרי — פרט למקרה מיוחד של מ"א גאוסיים במשותף

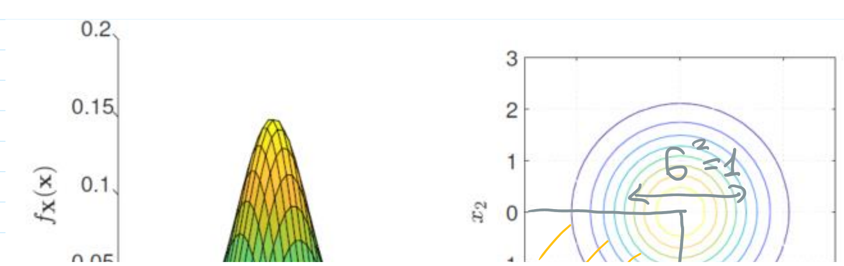
זוג משתנים גאוסיים במשותף PDF (הגדרה 4.8): ה-PDF המשותף של זוג משתנים גאוסיים X_1, X_2 נתון ע"י

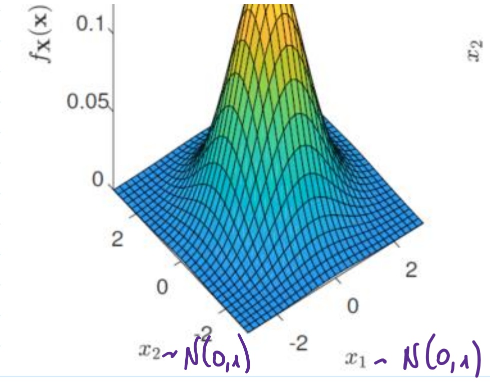
$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times \underbrace{\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}_{=C^2}\right) \tag{4.16}$$

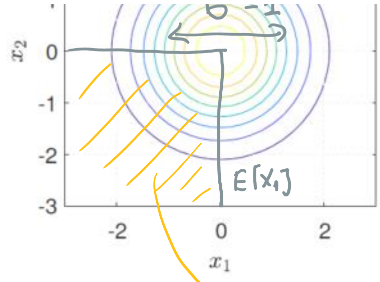
משוואה של אליפסה

$\rho=0$ משתנים חסרי קורלציה ⇐ הצורה היא מעגל

$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)$







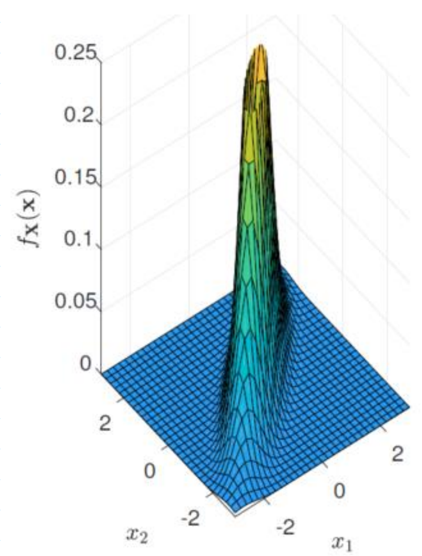
$F_{X_1 X_2}(0,0) = \frac{1}{4}$

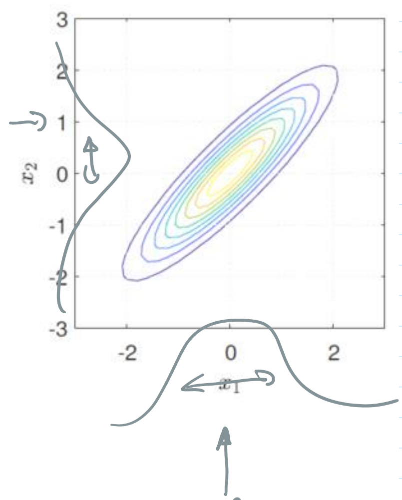
דוגמה לחישוב CDF בMatlab באופן מספרי.

תוחלת →
```
mu = [0; 0];
sigma1 = 1;
sigma2 = 1;
rho = 0;
```
מטריצת Cov →
```
Cv = [sigma1^2 rho*sigma1*sigma2; rho*sigma1
*sigma2 sigma2^2];
```
חישוב CDF →
```
mvncdf([0; 0],mu, Cv) % mvn = multivariate normal
```

משוואה של קו ישר - תלות לינארית מלאה $\rho = \pm 1$

$\rho = 0.9$





התפלגות שולית של X_1

דוגמה מספרית: נתונים X,Y

$$[X, Y]^T \sim N\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$p(X \le 3, Y \le 3) = ?$$

```
mu = [0; 1];
Cv = [7 3; 3 5];
mvncdf([3; 3],mu, Cv) % mvn = multivariate normal
```

תכונות של מטריצת Cov

* סימטריה :

$$C_{\mathbf{X}} = C_{\mathbf{X}}^T \quad \mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \mathrm{Cov}[X_j, X_i]$$

* משתנים חסרי קורלציה :

$$C_x = \begin{bmatrix} Var[X_1] & 0 \\ 0 & Var[X_2] \end{bmatrix} \leftarrow \mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0, \quad i \neq j$$