הרצאה 2 - בוקר
יום ראשון 25 אוקטובר 2020 13:00

תוכנית להיום:
- התפלגות משותפת
- " שולית
- תוחלת ושונות
- קשר בין משתנים
- חיזוי

זוג משתנים אקראיים / משתנה אקראי דו ממדי

מטרה: לתאר ניסוי אקראי עם 2 תוצאות

דוגמאות:

* גובה ומשקל
* זריקת זוג קוביות/מטבעות
* מתח וזרם של רכיב:

דוגמה: זוג מטבעות "לא הוגנות" = 2 ניסויים בעלי התפלגות Bernoulli

$$X \sim Ber(p_1) \qquad Y \sim Ber(p_2) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p(X=0)=1-p_1 \\ p(X=1)=p_1 \end{array}} \qquad p_1=\frac{1}{3} \quad p_2=\frac{1}{2}$$

ישנם סה"כ 4 אפשרויות:

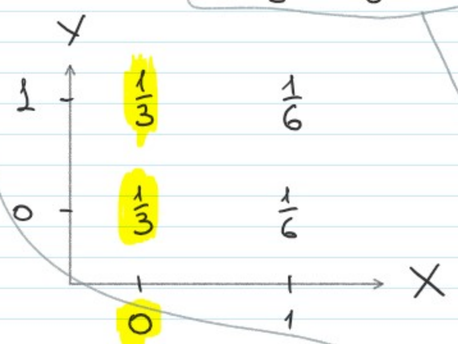
#1 $p(X=0,Y=0)=(1-p_1)\cdot(1-p_2)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

#2 $p(X=0,Y=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=(1-p_1)\cdot p_2$

#3 $p(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \quad p_1(1-p_2)$

#4 $p(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \quad p_1\cdot p_2$

תכונה חשובה: סה"כ ההסתברויות $= \boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1}$



שאלה: איך מגיעים מתוך הטבלה ----
חזרה להתפלגויות של X, Y בנפרד?

ניסוח אחר לשאלה:

$$p\left[X=0,\ Y=\text{כל דבר אפשר}\right]=$$
$$=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=1-p_1$$

$$p\left[X=1,\ Y=\text{כל דבר אפשרי}\right]=$$
$$=p\{X=1,Y=0\}+p\{X=1,Y=1\}$$

$X\in\{0,1\}$
$Y\in\{0,1\}$ $\quad P_{XY}\{0,0\}=P\{X=0,Y=0\}$

תכונות:

$$0\le P_{XY}\{j,k\}\le 1$$
$$\sum^{1}\sum^{1} P_{XY}\{j,k\}=1$$

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p_{XY}[j,k]=1$$

$$= p[X=1, Y=0] + p[X=1, Y=1]$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}=p_1$$

נתון מ"א X; $X\in\{x_1,\dots,x_j,\dots\}$

Y: $Y\in\{y_1,\dots,y_k,\dots\}$

הגדרה: PDF משותף

$$P_{XY}[x_j,y_k]=P[X=x_j, Y=y_k]$$

תכונות:

$$0\le P_{XY}[x_j,y_k]\le 1$$

$$\sum_{j,k} P_{XY}[x_j,y_k]=1$$

CDF משותף / Joint-CDF

הגדרה: $F_{XY}(x,y)=p(X\leqslant x, Y\leqslant y)$

$x,y\in\mathbb{R}$

הגדרה לדוגמה:

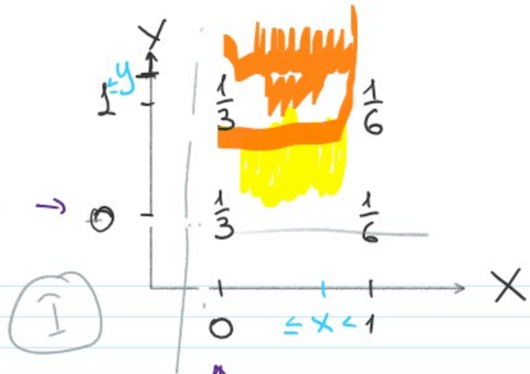
I: $F_{XY}(\underbrace{-1}_{\text{מספר ממשי}},-1)=0$

$F_{XY}(x,y)=0$ $\quad x<0, y<0$

$\underbrace{x<0}, y>0$ 0 כי.

$x>0, y<0$

הסתברויות מהדוגמה



תוצאה הכי "קצה"

II. $0\le x<1$, $0\le y<1$

מה שיש בתוך האיזור

$F_{XY}(x,y)=\frac{1}{3}$

מתוך תוצאות ניסוי אפשריות זה רק תוצאה $X=0, Y=0$ שהסתברותה $\frac{1}{3}$ (ראה להלן)

III. $0\le x<1$, $1\le y$

תוצאות הניסוי באיזור

$x=0, y=0$
$x=0, y=1$

תזכורת: השאלה היא על הסתברות של $Y\le y$

לדוגמה $Y\le 5=y$

$1\le 5$

IV. $1\le x$, $1\le y$ $\quad F_{XY}(x,y)=1$

כל תוצאות ניסוי.

$Y \le 5 = y$ סגורות
$1 \le 5$

$$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

IV. $1 \le x$, $1 \le y$ $F_{XY}(x,y) = 1$
כל תוצאות ניסוי אפשריות בפנים

V. $0 \le y < 1$, $1 \le x$

$$F_{XY}(x,y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2.2.1 התפלגות שולית

מעבר מהתפלגות משותפת לזוג התפלגויות בלתי תלויות
ניסוי אחד עם 2 תוצאות ⇐ זוג ניסויים נפרדים

> **מטרה** לקבל/לאפיין התפלגות של כל אחד מהמשתנים בנפרד, מתוך התפלגות משותפת.

התפלגות שולית (הגדרה 2.4):

$$p_X[x_k] = \sum_j p_{XY}[x_k, y_j] \quad \text{(א2.7)}$$

סכימה על כל ערכי Y אפשריים

$$p_Y[y_j] = \sum_k p_{XY}[x_k, y_j] \quad \text{(ב2.7)}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) \quad \text{(ג2.7)}$$

כל ערך של Y

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) \quad \text{(ד2.7)}$$

הערה: התפלגות משותפת ⇐ התפלגות שולית

התפלגות שולית ⇍ התפלגות משותפת (פרט למקרה של X,Y בלתי תלויים)

משתנים בלתי תלויים סטטיסטית (הגדרה 2.10): משתנים נקראים בלתי תלויים סטטיסטית אם ורק אם מתקיים
⟺

$$p_{XY}[x_k, y_j] = p_X[x_k]p_Y[y_j] \quad \text{(א2.25)}$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{(ב2.25)}$$

מספיק לבדוק אחד התנאים

$$P[X = x_k, Y = y_j] = P[X = x_k] \cdot P[Y = y_j]$$

תוחלת ושונות

תוחלת של הת'. B

$$E[g(X,Y)] = \sum_{k,j} g(x_k, y_j) P_{XY}[x_k, y_j]$$

הסתברות ערכים ... ערכים

תוחלת של הנ׳ B.

$E[X]=p_1$

$E[Y]=p_2$

$E[g(X,Y)] = \sum_{k,j} g(x_k,y_j) P_{XY}[x_k,y_j]$

דוגמה:

$$E[X+Y] = \sum_k \sum_j \underbrace{(x_k + y_j)}_{\text{ערכים}} \underbrace{P_{XY}[x_k,y_j]}_{\text{הסתברות לערכים אלה}}$$

נ״ס → $X \sim Ber(p_1)$, $Y \sim Ber(p_2)$

מחלת הרצאה

$P_X[x_k] P_Y[y_j]$ ← במקרה של ניסויים בלתי תלויים

$$\sum_k \sum_j x_k P_{XY}[x_k,y_j]$$

$$= \sum_k x_k \sum_j P_{XY}[x_k,y_j]$$

$P_X[x_k]$ - התפלגות שולית לפי הגדרה

$$= \underbrace{\sum_k x_k P_X[x_k]}_{E[X]} + \underbrace{\sum_j y_j P_Y[y_j]}_{E[Y]}$$

$$= 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot P[X=1] + 0 \cdot P[Y=0] + 1 \cdot P[Y=1]$$

$$= p_1 + p_2$$

סיכום: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

הוכחה:

Example 7.10 – Expected value of a sum of random variables

If $Z = g(X,Y) = X+Y$, then

$$\begin{aligned} E_{X,Y}[X+Y] &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{X,Y}[x_i,y_j] \\ &= \sum_i \sum_j x_i p_{X,Y}[x_i,y_j] + \sum_i \sum_j y_j p_{X,Y}[x_i,y_j] \\ &= \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{X,Y}[x_i,y_j]}_{p_X[x_i]} + \sum_j y_j \underbrace{\sum_i p_{X,Y}[x_i,y_j]}_{p_Y[y_j]} \quad \text{(from (7.6))} \\ &= E_X[X] + E_Y[Y] \quad \text{(definition of expected value).} \end{aligned}$$

תוחלת היא פעולה לינארית

* מקרים בהם ניתן לפשט את חישוב התוחלת: ?

כיבוד

$E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$

* **תכונות של משתנים בלי תלויים** (תכונה 2.4):

כפל ← רק עבור מ״מ בלתי תלויים

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

שונות

שאלה: חשב $Var[X+Y]$

תזכורת: מרחק ריבועי ממוצע מהתוחלת

$$Var[Z] = E[(Z - E[Z])^2]$$

$$Z = X+Y$$

$$= E[Z^2] - E^2[Z]$$

$$= E[(X+Y - E[X+Y])^2]$$

$$= E[(\underbrace{X - E[X]}_{a} + \underbrace{Y - E[Y]}_{b})^2]$$

$(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$

$$Z = X + Y$$

$$= E[Z^2] - E^2[Z]$$

$$= E\Big[\big(\underbrace{X - E[X]}_{a} + \underbrace{Y - E[Y]}_{b}\big)^2\Big]$$

$$= \underbrace{E\big[(X - E[X])^2\big]}_{Var[X]} + \underbrace{E\big[(Y - E[Y])^2\big]}_{Var[Y]}$$

$$+ 2\underbrace{E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big]}_{Cov[X,Y]}$$

Cov[X,Y] שונות משותפת Covariance — מדד לקשר לינארי בין המשתנים (סוג של)

הגדרה:

$$Cov[X,Y] = E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])\big]$$

$$= E[XY] - \underbrace{E[X]E[Y]}$$

מספיק שאחד מהם $= 0$

$$\Rightarrow Cov[X,Y] = E[XY]$$

הוכחה: פתיחת סוגריים

$$E[\underbrace{XY}_{1} - \underbrace{XE[Y]}_{2} \cancel{\underbrace{-YE[X]}_{3}} + \cancel{\underbrace{E[X]E[Y]}_{4}}]$$

$$1 = E[XY]$$

$$2 = E[XE[Y]] = \underbrace{E[Y]}_{\text{קבוע}}E[X]$$

$$3 = E[YE[X]] = E[X]E[Y]$$

4 = ללא שינוי

מ.ש.ל ✓

לסיכום:

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

הערה ל-2.

$E[Y] = b =$ קבוע

$$\Rightarrow E[bX] = bE[X]$$

$$= E[Y]E[X]$$

תכונות:

$$\mathrm{Cov}[X,X] = Var[X]$$

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Cov}[Y,X]$$

$$\mathrm{Cov}[X,a] = 0$$

$$\mathrm{Cov}[aX,bY] = ab\,\mathrm{Cov}[X,Y]$$

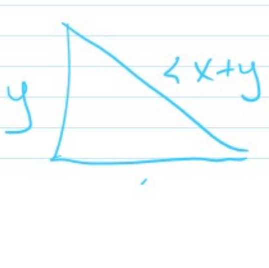
$$Var[a + X] = Var[X]$$

אותו עקרון

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Cov}[X+a, Y+b]$$

$$\mathrm{Var}[X \pm Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \pm 2\,\mathrm{Cov}[X,Y]$$

$$|E[XY]| \leqslant \sqrt{E[X^2]\,E[Y^2]}$$ Cauchy-Schwatz



שונות משותפת מנורמלת

מקדם קורלציה (הגדרה 2.6): מקדם קורלציה, ידוע גם בשם Pearson product-moment correlation coefficient נתון ע"י שונות משותפת מנורמלת

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}}, \tag{2.10}$$

$|\rho_{XY}| \leq 1$

קשרים חשובים בין המשתנים

קשר בין אורתוגונליות לחוסר קורלציה: בריצמן

$E[X]$ או $E[Y]=0$

(2.27)

$\Rightarrow \mathrm{Cov}[XY] = E[XY]$

$\Updownarrow$

(2.28) אם $E[X]=0$ או $E[Y]=0$

וגם חסרי קורלציה

$\Updownarrow$

X,Y גם אורתוגונליים

אורטוגונליים (הגדרה 2.11): עבור X,Y אורטוגונליים מתקיים

$$E[XY] = 0$$

חוסרי קורלציה (הגדרה 2.12): עבור X,Y חוסרי קורלציה מתקיים

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \rho_{XY} = 0$$

קיימת לצד גם בלתי-תלויים סטטיסטית

קשר בין אי תלות לחוסר קורלציה (הגדרה 2.13): כאשר X,Y הם בלתי תלויים, הם גם חוסרי קורלציה.

חוץ מ-

הערה 2.1! בלתי תלויים $\Leftarrow$ חסרי קורלציה - החץ הוא רק בכיוון אחד (בפרט למקרה פרטי של התפלגות גאוסית, בהמשך).