חיזוי לינארי

מטרה: חיזוי ערך עתידי של תהליך אקראי WSS, בהתבסס על דגימות ההווה והעבר.

10.1 הקדמה

נתון תהליך $\mathrm{x}[n]$ שהינו בעל מאפיינים הבאים:

- WSS
- בעלת תוחלת $\mu_{\mathrm{x}} = 0$
- $R_{\mathrm{x}}[k]$ ידוע

חיזוי לינארי (הגדרה 10.1): נדרש חיזוי לינארי של התהליך עבור הזמן הבא, $\overset{\text{עתיד}}{n+1}$ החיזוי נעשה מתוך דגימות קודמות (דגימות העבר), $\underset{\text{הווה}}{n}, \underbrace{n-1, n-2, \ldots}_{\text{עבר}}$ החיזוי הוא מהצורה

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{x}}[n+1] &= a_0\mathrm{x}[n] + a_1\mathrm{x}[n-1] + \ldots + a_N\mathrm{x}[n-N] \\ &= \sum_{m=0}^{N} a_m \mathrm{x}[n-m]\end{aligned} \tag{10.1}$$

ניתן לרשום את החיזוי גם בצורה של

$$\hat{\mathrm{x}}[n+1] = h[n] * \left\{\mathrm{x}[n], \ldots, \mathrm{x}[n-N+1]\right\} \longleftarrow h[n] = \left\{a_0, a_1, \ldots, a_N\right\} \tag{10.2}$$

מטרה: לחשב ערכים של $\left\{a_0, a_1, \ldots, a_N\right\}$ עבור החיזוי.

10.2 חיזוי לינארי - משוואות Wiener-Hopf

משוואות Wiener-Hopf (הגדרה 10.2): ניתן להגדיר את הקשר בין הדגימות ע"י

$$R_{\mathrm{x}}[k+1] = a_0 R_{\mathrm{x}}[k] + a_1 R_{\mathrm{x}}[k-1] + \ldots + a_N R_{\mathrm{x}}[k-N] = \sum_{k=0}^{N} a_k R_{\mathrm{x}}[k]. \tag{10.3}$$

הוכחה. ניתן לקחת את המשוואת חיזוי לינארי (10.1), להכפיל אותה ב-$\mathrm{x}[n-k]$ ולחשב תוחלת, תוך שימוש בתכונת הסימטריה (תכונה 6.6) מהצורה $R_{\mathrm{x}}[-k] = R_{\mathrm{x}}[k]$, באופן הבא:

$$\hat{\mathrm{x}}[n+1] = a_0\mathrm{x}[n] + a_1\mathrm{x}[n-1] + \ldots + a_N\mathrm{x}[n-N]$$

1) הכפלה ב $x[n-k]$

$$\mathrm{x}[n+1]\mathrm{x}[n-k] = a_0\mathrm{x}[n]\mathrm{x}[n-k] + \ldots + a_N\mathrm{x}[n-N]\mathrm{x}[n-k]$$

2) תוחלת

$$\underbrace{E\left[\mathrm{x}[n+1]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k+1]} = a_0 \underbrace{E\left[\mathrm{x}[n]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k]} + \ldots + a_N \underbrace{E\left[\mathrm{x}[n-N]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k-N]} \tag{10.4}$$

חישוב מקדמי החיזוי (הגדרה 10.3): את מקדמי החיזוי ניתן לחשב באופן הבא:

- **דרך א':** מקרה פרטי של משוואה (10.3), שניתן לרשום באופן הבא:

$N+1$ משוואות
$N+1$ נעלמים

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow R_{\mathrm{x}}[1] = a_0R_{\mathrm{x}}[0] + a_1R_{\mathrm{x}}[1] + \cdots + a_NR_{\mathrm{x}}[N] \\ k=1 &\rightarrow R_{\mathrm{x}}[2] = a_0R_{\mathrm{x}}[1] + a_1R_{\mathrm{x}}[0] + \cdots + a_NR_{\mathrm{x}}[N-1] \\ &\cdots \\ k=N &\rightarrow R_{\mathrm{x}}[N+1] = a_0R_{\mathrm{x}}[N] + a_1R_{\mathrm{x}}[N-1] + \cdots + a_NR_{\mathrm{x}}[0]\end{aligned} \tag{10.5}$$

חישוב מקדמי החיזוי (הגדרה 10.3): את מקדמי החיזוי ניתן לחשב באופן הבא:

- **דרך א':** מקרה פרטי של משוואה (10.3), שניתן לרשום באופן הבא:

משוואות $N+1$

נעלמים $N+1$

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow R_{\mathbf{x}}[1]=a_0R_{\mathbf{x}}[0]+a_1R_{\mathbf{x}}[1]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[N] \\ k=1 &\rightarrow R_{\mathbf{x}}[2]=a_0R_{\mathbf{x}}[1]+a_1R_{\mathbf{x}}[0]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[N-1] \\ &\cdots \\ k=N &\rightarrow R_{\mathbf{x}}[N+1]=a_0R_{\mathbf{x}}[N]+a_1R_{\mathbf{x}}[N-1]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[0] \end{aligned} \tag{10.5}$$

- **דרך ב':** חישוב שגיאת חיזוי מינימלית במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית:

1. חישוב שגיאת חיזוי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית מהצורה

$$\begin{aligned} mse &= E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-\hat{\mathbf{x}}[n+1]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right)^2\right] \end{aligned} \tag{10.6}$$

2. חישוב הערכים של $\left\{a_0,a_1,\ldots,a_N\right\}$, עבור שגיאה היא מינימלית ניתן לבצע ע"י הגזירה, תוך שימוש בכלל השרשרת (שימוש בנגזרת פנימית),

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

המינימום מתקבל ע"י פתרון מערכת משוואות

נגזרת פנימית

$$\frac{\partial}{\partial a_0}mse=E\left[2\left\{\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right\}\mathbf{x}[n]\right]=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{E\left[\mathbf{x}[n+1]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[1]}-a_0\underbrace{E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[0]}-\cdots-a_N\underbrace{E\left[\mathbf{x}[n-N]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[N]}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}mse=E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right)\mathbf{x}[n-1]\right]=0$$

$$\Rightarrow R_{\mathbf{x}}[2]-a_0R_{\mathbf{x}}[1]-a_1R_{\mathbf{x}}[0]-\cdots-a_NR_{\mathbf{x}}[N-1]=0$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_N}mse=E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right)\mathbf{x}[n-N]\right]=0$$

- **סיכום:** ניתן למצוא את המקדמים a_m ע"י הפתרון של מערכת של $N+1$ משוואות לינארית עם $N+1$ נעלמים.

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[2] & \cdots & R_{\mathbf{x}}[N] \\ R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] & & R_{\mathbf{x}}[N-1] \\ R_{\mathbf{x}}[2] & R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] & & R_{\mathbf{x}}[N-2] \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ R_{\mathbf{x}}[N-1] & R_{\mathbf{x}}[N-2] & R_{\mathbf{x}}[N-3] & \cdots & R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[N] & R_{\mathbf{x}}[N-1] & R_{\mathbf{x}}[N-2] & \cdots & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[2] \\ R_{\mathbf{x}}[3] \\ \vdots \\ R_{\mathbf{x}}[N] \\ R_{\mathbf{x}}[N+1] \end{bmatrix}, \tag{10.7}$$

שגיאת חיזוי - שגיאה ממוצעת (תכונה 10.1): (ראה גם תכונה 2.9)

$$E\left[\mathrm{x}[n+1]-\hat{\mathrm{x}}[n+1]\right]=0 \tag{10.8}$$

שגיאת חיזוי - שגיאה ריבועית ממוצעת (תכונה 10.2): שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית של החיזוי נתונה ע"י

$$mse=E\left[\left(\mathrm{x}[n+1]-\hat{\mathrm{x}}[n+1]\right)^2\right]=R_{\mathrm{x}}[0]-\sum_{k=0}^{N}a_kR_{\mathrm{x}}[k+1] \tag{10.9}$$

תובנות החשובות:

- בהתאם לקשר $R_{\mathrm{x}}[0]>R_{\mathrm{x}}[k]$ (תכונה 6.7), הגדלת N עשויה להביא לשיפור קטן מאוד בחיזוי עבור ערכים קטנים יחסית של $R_{\mathrm{x}}[k]$.
- עבור ערכי $R_{\mathrm{x}}[k]=0,\ k>k_0$ הגדלת N לא תשפר את החיזוי בכלל.

הערה 10.1 ! הפתרון של משוואות Wiener-Hopf הוא חיזוי לינארי אופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (בדומה לפרק 2.3).

הערה 10.2 ! עבור תהליכים גאוסיים, הפתרון של משוואות Wiener-Hopf הוא חיזוי אופטימלי (אין דרך לחיזוי טוב יותר).

הערה 10.3 ! הפתרון היעיל של המערכת משוואות הלוקח בחשבון את הסימטריה המובנת נקרא אלגוריתם Levinson-Durbin.

הערה 10.4 ! שם נוספת לערכי a_m הוא linear prediction coefficients (LPC).

דוגמה 10.1: נתון תהליך אקראי $\mathrm{x}[n]=\cos\left(2\pi f_0 n+\theta\right)$, כאשר $\theta\sim U\left[0,2\pi\right]$ ו-f_0 ידוע.

בנוסף, ידוע (ראה דוגמא 5.2), שתוחלת ופונקציית אוטו-קרלציה של התהליך נתונים ע"י

$$\begin{aligned}
E[\mathrm{x}[n]]&=0\\
R_{\mathrm{x}}[k]&=\cos(2\pi f_0 k)=C_{\mathrm{x}}[k]\\
R_{\mathrm{x}}[0]&=1\\
R_{\mathrm{x}}[1]&=\cos(2\pi f_0)\\
R_{\mathrm{x}}[2]&=\cos(4\pi f_0)
\end{aligned}$$

* צפי לחיזוי מושלם ע"י 2 נקודות!

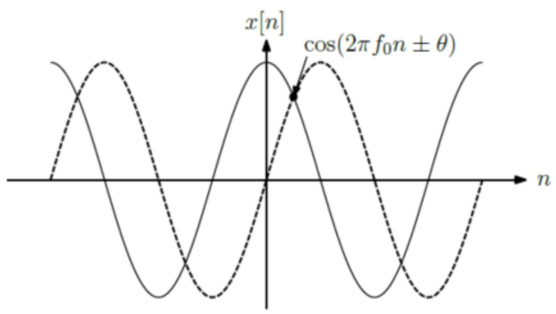
נדרש לעשות חיזוי לינארי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (MMSE) עבור התהליך מהצורה

- $\hat{\mathrm{x}}[n+1]=a\mathrm{x}[n]+b\mathrm{x}[n-1]$

$$\begin{bmatrix}R_{\mathrm{x}}[0] & R_{\mathrm{x}}[1]\\ R_{\mathrm{x}}[1] & R_{\mathrm{x}}[0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{\mathrm{x}}[1]\\ R_{\mathrm{x}}[2]\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \cos(2\pi f_0)\\ \cos(2\pi f_0) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(2\pi f_0)\\ \cos(4\pi f_0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos(2\pi f_0)\\ -1\end{bmatrix}$$



איור 10.1: אי וודאות לגבי הפאזה בחיזוי מנקודה אחת בלבד.

mse_{min} =

$$\begin{aligned}
&=1-2\cos(2\pi f_0)\cos(2\pi f_0)+\cos(4\pi f_0)\\
&=\underbrace{1-2\cos^2(2\pi f_0)}_{-\cos(4\pi f_0)}+\cos(4\pi f_0)=0
\end{aligned}$$

סיכום: משוואת הפרשים לחיזוי

$mse_{min} =$

$$= 1 - 2\cos(2\pi f_0)\cos(2\pi f_0) + \cos(4\pi f_0)$$

$$= \underbrace{1 - 2\cos^2(2\pi f_0)}_{-\cos(4\pi f_0)} + \cos(4\pi f_0) = 0$$

סיכום: משוואת הפרשים לחיזוי

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = \underbrace{2\cos(2\pi f_0)}_{a}\mathbf{x}[n] + \underbrace{(-1)}_{b}\mathbf{x}[n-1]$$