חיזוי לינארי

מטרה: חיזוי ערך עתידי של תהליך אקראי WSS, בהתבסס על דגימות הווה והעבר.

10.1 הקדמה

נתון תהליך $\mathrm{x}[n]$ שהינו בעל מאפיינים הבאים:

- WSS
- בעלת תוחלת $\mu_{\mathrm{x}} = 0$ (תמיד ניתן להחסיר תוחלת במידת הצורך להוסיף)
- $R_{\mathrm{x}}[k]$ ידוע

חיזוי לינארי (הגדרה 10.1): נדרש חיזוי לינארי של התהליך עבור הזמן הבא, $n+1$. החיזוי נעשה מתוך דגימות קודמות (דגימות העבר), $n, n-1, n-2, \ldots$. החיזוי הוא מהצורה

חיצוני הווה עבר

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{x}}[n+1] &= a_0 \mathrm{x}[n] + a_1 \mathrm{x}[n-1] + \ldots + a_N \mathrm{x}[n-N] \\ &= \sum_{m=0}^{N} a_m \mathrm{x}[n-m] \end{aligned} \tag{10.1}$$

ניתן לרשום את החיזוי גם בצורה של

$$\hat{\mathrm{x}}[n+1] = h[n] * \left\{\mathrm{x}[n], \ldots, \mathrm{x}[n-N+1]\right\} \longleftarrow h[n] = \left\{a_0, a_1, \ldots, a_N\right\} \tag{10.2}$$

מטרה: לחשב ערכים של $\left\{a_0, a_1, \ldots, a_N\right\}$ עבור החיזוי.

שיטה:

משוואות Wiener-Hopf (הגדרה 10.2): ניתן להגדיר את הקשר בין הדגימות ע"י

ידוע $R_{\mathrm{x}}[k]$ $\longrightarrow$

$$R_{\mathrm{x}}[k+1] = a_0 R_{\mathrm{x}}[k] + a_1 R_{\mathrm{x}}[k-1] + \ldots + a_N R_{\mathrm{x}}[k-N] = \sum_{k=0}^{N} a_k R_{\mathrm{x}}[k]. \tag{10.3}$$

הוכחה:

* נשתמש בקשר $R_{\mathrm{x}}[-k] = R_{\mathrm{x}}[k]$

* $\hat{\mathrm{x}}[n+1] = a_0 \mathrm{x}[n] + a_1 \mathrm{x}[n-1] + \ldots + a_N \mathrm{x}[n-N]$ $\rightarrow$ נכפול ב $x[n-k]$ ונחשב תוחלת

$$\underbrace{E\left[\mathrm{x}[n+1]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k+1]} = a_0 \underbrace{E\left[\mathrm{x}[n]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k] = R_x[-k]} + \ldots + a_N \underbrace{E\left[\mathrm{x}[n-N]\mathrm{x}[n-k]\right]}_{R_{\mathrm{x}}[k-N] = R_x[N-k]}$$

חישוב מקדמי החיזוי (משוואות Wiener-Hopf)

N+1 משוואות

N+1 נעלמים

$K=0,\dots,N \rightarrow$ סה"כ N+1 ערכים

$$k=0 \rightarrow R_{\mathbf{x}}[1]=a_0R_{\mathbf{x}}[0]+a_1R_{\mathbf{x}}[1]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[N]$$
$$k=1 \rightarrow R_{\mathbf{x}}[2]=a_0R_{\mathbf{x}}[1]+a_1R_{\mathbf{x}}[0]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[N-1]$$
$$\cdots$$
$$k=N \rightarrow R_{\mathbf{x}}[N+1]=a_0R_{\mathbf{x}}[N]+a_1R_{\mathbf{x}}[N-1]+\cdots+a_NR_{\mathbf{x}}[0]$$

נוהגים לרשום:

$$R_{\mathbf{x}}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{N-1}\\a_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{\mathbf{x}}[1]\\R_{\mathbf{x}}[2]\\\vdots\\R_{\mathbf{x}}[N]\\R_{\mathbf{x}}[N+1]\end{bmatrix}\qquad R_{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}R_{\mathbf{x}}[0]&R_{\mathbf{x}}[1]&R_{\mathbf{x}}[2]&\cdots&R_{\mathbf{x}}[N]\\R_{\mathbf{x}}[1]&R_{\mathbf{x}}[0]&R_{\mathbf{x}}[1]&&R_{\mathbf{x}}[N-1]\\R_{\mathbf{x}}[2]&R_{\mathbf{x}}[1]&R_{\mathbf{x}}[0]&&R_{\mathbf{x}}[N-2]\\\vdots&\vdots&&\ddots&\\R_{\mathbf{x}}[N-1]&R_{\mathbf{x}}[N-2]&R_{\mathbf{x}}[N-3]&\cdots&R_{\mathbf{x}}[1]\\R_{\mathbf{x}}[N]&R_{\mathbf{x}}[N-1]&R_{\mathbf{x}}[N-2]&\cdots&R_{\mathbf{x}}[0]\end{bmatrix}$$

מטריצת auto-covariance

מציאת מקדמים בדרך ב' - חיזוי לינארי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית

1. חישוב שגיאת חיזוי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית מהצורה

$$mse=E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-\hat{\mathbf{x}}[n+1]\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left(\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right)^2\right]$$

2. חישוב הערכים של $\left\{a_0,a_1,\ldots,a_N\right\}$, עבור שגיאה היא מינימלית ניתן לבצע ע"י הגזירה, תוך שימוש בכלל השרשרת, $\left[f\left(g(x)\right)\right]'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$,

נגזרת הפנימי

$$\frac{\partial}{\partial a_1}mse=E\left[2\left\{\mathbf{x}[n+1]-a_0\mathbf{x}[n]-a_1\mathbf{x}[n-1]-\ldots-a_N\mathbf{x}[n-N]\right\}\mathbf{x}[n]\right]=0$$
$$\Rightarrow \underbrace{E\left[\mathbf{x}[n+1]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[1]}-a_0\underbrace{E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[0]}-\cdots-a_N\underbrace{E\left[\mathbf{x}[n-N]\mathbf{x}[n]\right]}_{R_{\mathbf{x}}[N]}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2}mse = E\left[\left(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{x}[n] - a_1\mathbf{x}[n-1] - \ldots - a_N\mathbf{x}[n-N]\right)\mathbf{x}[n-1]\right] = 0$$

$$\Rightarrow R_{\mathbf{x}}[2] - a_0R_{\mathbf{x}}[1] - a_1R_{\mathbf{x}}[0] - \cdots - a_NR_{\mathbf{x}}[N-1] = 0$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_N}mse = E\left[\left(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{x}[n] - a_1\mathbf{x}[n-1] - \ldots - a_N\mathbf{x}[n-N]\right)\mathbf{x}[n-N]\right] = 0$$

סיכום: מערכת משוואות זהה לדרך הקודמת

עבור אמת מעשיים
$\boxed{R_x[0] > R_x[k]}$

שגיאת חיזוי (תכונה 10.1): שגיאה ריבועית ממוצעת של החיזוי נתונה ע"י

$$mse = E\left[\left(\mathbf{x}[n+1] - \hat{\mathbf{x}}[n+1]\right)^2\right] = R_{\mathbf{x}}[0] - \sum_{k=0}^{N} a_kR_{\mathbf{x}}[k+1] \qquad (10.10)$$

* ככל ש-$R_x[k]$ גדול יותר אצל עם k, כך החיזוי יותר טוב - כמובן עבור מספיק מקדמים

שגיאת חיזוי - שגיאה ממוצעת (תכונה 10.2): (ראה גם תכונה 2.9)

$$E\left[\mathbf{x}[n+1] - \hat{\mathbf{x}}[n+1]\right] = 0 \qquad (10.11)$$

* עבור ערכים $R_x[k]$ קטנים, התרומה של תוספת של מקדמי a פוחתת

אין מה להוסיף מקדמים, אם זה לא מביא שיפור בחיזוי

* עבור תהליכים גאוסיים, החיזוי הוא אופטימלי.

* שם נוסף למקדמי a: linear prediction coefficients (LPC)

דוגמה מספרית: נתון

$$\mathbf{x}[n] = \cos\left(2\pi f_0 n + \theta\right) \qquad \theta \sim U\left[0, 2\pi\right]$$

f_0 - תדר ידוע

$$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = 0$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = \cos(2\pi f_0 k) = C_{\mathbf{x}}[k]$$

$$R_{\mathbf{x}}[0] = 1$$

$$R_{\mathbf{x}}[1] = \cos(2\pi f_0)$$

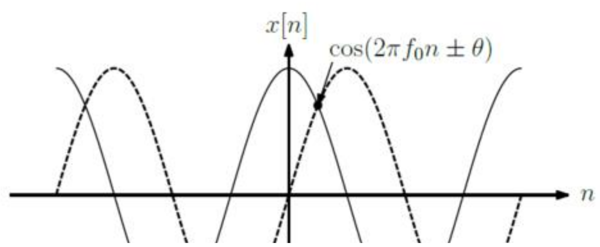
$$R_{\mathbf{x}}[2] = \cos(4\pi f_0)$$

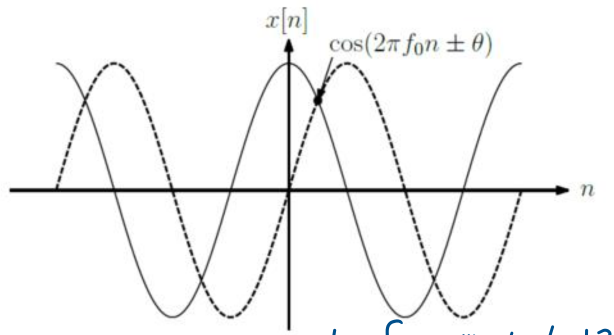
הערה: חישוב תוחלות מבסס על ערכי $-\infty < n < \infty$ בפועל, תמיד מדובר בזמן סופי

נדרש לחשב a,b

- $\overbrace{\hat{\mathbf{x}}[n+1]}^{\text{חיזוי}} = a\underbrace{\mathbf{x}[n]}_{\text{הווה}}$.
- $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a\mathbf{x}[n] + \underbrace{b\mathbf{x}[n-1]}_{\text{עבר}}$.

חיזוי לינארי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית





☐ $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a\underbrace{\mathbf{x}[n]}_{\text{הווה}}.$

☐ $\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a\mathbf{x}[n] + b\underbrace{\mathbf{x}[n-1]}_{\text{עבר}}.$

חיזוי לינארי במובן שגיאה ריבועית ~~מינימלית~~ ממוצעת

הערה: * בחיזוי מתוך נקודה אחת בלבד, לא ניתן לחזות במדויק בגלל דו משמעות של פאזה

* חיזוי ע"י 2 נקודות - מצובה, ש החיזוי יהיה מושלם → ניתן לחשב במדויק את ערך של θ.

פתרון:

* חיזוי על סמך הווה בלבד → ערך a

$$R_{\mathbf{x}}[0]a = R_{\mathbf{x}}[1] \Rightarrow a = \frac{R_{\mathbf{x}}[1]}{R_{\mathbf{x}}[0]}$$

$$mse_{min} = R_{\mathbf{x}}[0] - aR_{\mathbf{x}}[1] = R_{\mathbf{x}}[0] - \frac{R_{\mathbf{x}}[1]}{R_{\mathbf{x}}[0]}R_{\mathbf{x}}[1]$$
$$= 1 - \cos^2(2\pi f_0) = \sin^2(2\pi f_0)$$

* חיזוי ע"פ a,b

הגדרה עבור $N=1$

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[2] \end{bmatrix}$$

הצבה

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi f_0) \\ \cos(2\pi f_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_0) \\ \cos(4\pi f_0) \end{bmatrix}$$

$a + \cos(2\pi f_0)\, b = \cos(2\pi f_0)$

$\cos(2\pi f_0)\, a + b = \cos(4\pi f_0)$

פתרון מערכת משוואות

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(2\pi f_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$mse_{min} = R_{\mathbf{x}}[0] - aR_{\mathbf{x}}[1] - bR_{\mathbf{x}}[2]$$
$$= 1 - 2\cos(2\pi f_0)\cos(2\pi f_0) + \cos(4\pi f_0)$$
$$= \underbrace{1 - 2\cos^2(2\pi f_0)}_{-\cos(4\pi f_0)} + \cos(4\pi f_0) = 0$$

סיכום: חיזוי המתקבל $\hat{x}[n+1] = 2\cos(2\pi f_0)\, x[n] + (-1)\, x[n-1]$