הרצאה 11 - בוקר

יום ראשון 03 ינואר 2021 13:10

מערכות LTI בזמן בדיד

מטרה: ניתוח את אקראי במוצא המערכת

קונבולוציה:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

תהליך סטוכסטי ←

תגובה להלם

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n]$$

* חישוב $E[y[n]]$, כאשר $x[n]$ היא תהליך אקראי.

חישוב:

$$E[\mathbf{y}[n]] = \underbrace{E\left[\sum_m h[m]\mathbf{x}[m-n]\right]}_{y[n] \text{ ע"פ הגדרה}}$$

$$= \sum_m h[m] \boxed{E[\mathbf{x}[m-n]]} \rightarrow \text{קבועה}$$

שינוי סדר סכימה: תוחלת ↔ קונבולוציה

$$= \mu_{\mathbf{x}} \sum_m h[m]$$

$$= \mu_{\mathbf{x}} \underbrace{H(0)}_{\text{הגבר DC של מערכת}} \longleftrightarrow H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j2\pi fn}$$

* חישוב $Var[y[n]]$, $x[n]$ - רעש לבן גאוסי.

הספק - P_y

$x[n] \sim N(0, \sigma^2)$

חישוב: ⊛ התפלגות של $y[n]$ גאוסית בגלל שמסנן גאוסי.

$$\mathrm{Var}[\mathbf{y}[n]] = \mathrm{Var}\left[\sum_m h[m]\mathbf{x}[m-n]\right]$$

עבור X,Y בלתי תלויים

$$\boxed{\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2\mathrm{Var}[X] + b^2\mathrm{Var}[Y]} + (\dots)\mathrm{Cov}(X,Y)$$

* עבור רעש לבן $x[m], x[n]$ בלתי תלויים ($m \neq n$)

$$= \sum_m h^2[m] \boxed{\mathrm{Var}[\mathbf{x}[m-n]]}$$

$= \text{קבוע בזמן} = \sigma^2$

$$= \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_{\mathbf{y}}[0]$$

$$\boxed{\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = C_{\mathbf{x}}[0]}$$

$$E[\mathbf{y}[n]] = \cancel{E[\mathbf{x}]}\sum_m h[m] = 0$$

ע"פ חישוב ⊛ לעיל

הספק הרעש במוצא (הספק הכניסה אנרגיה)

$$P_{\mathbf{y}} = R_{\mathbf{y}}[0] = C_{\mathbf{y}}[0] \quad ⊛$$

$$\mathbf{y}[n] \sim N\left(0, \sigma^2 \sum_m h^2[m]\right) \quad ⊛$$

כדי שמוצא יהיה WSS

הערה 9.1 ! הניתוח של תוחלת ושונות לעיל מוגבל למערכות יציבות בלבד, אבל אינו מוגבל דווקא למערכות סיבתיות.

שוני בניתות מערכת בזמן רציף/בדיד

זמן רציף: מישור הזמן ⟷ מישור תדר (התמרת פוריה) | מישור S (התמרת Laplace)

זמן בדיד: זמן | תדר רציף DTFT | תדר בדיד DFT | Z

התמרת Z (הגדרה 9.1): התמרת Z מוגדרת ע"י הקשר

$$H(z)=\mathscr{Z}\left\{h[n]\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}.$$

LTI מערכת

$$H(z)=\mathscr{Z}\left\{h[n]\right\}=\frac{B(z)}{A(z)}.$$

פולינום מונה

פולינום מכנה

קונבולוציה (תכונה 9.3):

$$y[n]=x[n]*h[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}Y(z)=H(z)X(z)$$

$$\mathscr{Z}\left\{h[n]*h[-n]\right\}=\frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}$$

שיקוף בזמן (תכונה 9.4):

$$\mathscr{Z}\left\{h[-n]\right\}=H\left(z^{-1}\right)=H\left(1/z\right)$$

יציבות: קטבים קטנים מאחד

שורשים של פולינום מכנה

חישוב הנדסי:

$$R_{\mathbf{y}}[k]=R_{\mathbf{x}}[k]*h[n]*h[-n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}S_{\mathbf{y}}(z)=S_{\mathbf{x}}(z)H(z)H(z^{-1})$$

ניתות עבור מערכת FIR

FIR (תכונה 9.6): מערכות עם תגובה סופית להלם באורך $N+1$, בעלי התמרה מהצורה

$$H(z)=B(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Nz^{-N}\tag{9.14}$$

בהתאם להגדרתם, מערכות FIR תמיד יציבות.

דוגמה 9.2: נתון תהליך אקראי

$$\mathbf{x}[n]=\frac{1}{2}\mathbf{w}[n]+\frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1],$$

תיאור המערכת:

$$\mathbf{x}[n]=h[n]*\mathbf{w}[n],\quad h[n]=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$

$$H(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1},\quad z\neq 0$$

כאשר $\mathbf{w}[n]\sim N(0,\sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.

- ☐ הוכח, ש-$\mathbf{x}[n]$ הוא סטציאונרי.
- ☐ חשב $E\left[\mathbf{x}[n]\right]$.
- ☐ חשב $R_{\mathbf{x}}[k],P_{\mathbf{x}},S_{\mathbf{x}}(f)$.
- ☐ חשב $\mathrm{Var}\left[\mathbf{x}[n]\right]$.
- ☐ מצא התפלגות של $\mathbf{x}[n]$ והתפלגות משותפת של $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}[n_1]\\ \mathbf{x}[n_2]\end{bmatrix}$.

☐ מצא התפלגות של $\mathbf{x}[n]$ והתפלגות משותפת של $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n_1] \\ \mathbf{x}[n_2] \end{bmatrix}$.

פתרון: ○ $\mathbf{x}[n]$ הוא סטציאונרי מאחר מהמערכת FIR תמיד יציבה.

$$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = E\left[\mathbf{w}\right] \sum_n h[n] = 0$$

המשך - דרך א' - מישור הזמן

$$R_{\mathbf{x}}[k] = \boxed{R_{\mathbf{w}}[k]} * h[n] * h[-n]$$
$$= \boxed{\sigma^2\delta[k]} * \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} * \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \sigma^2\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1] = C_{\mathbf{x}}[k]$$

n=0 n=0

קונבולוציה

הרצאה 1

בקורס DSP

דרך ב': מישור Z

$$S_{\mathbf{x}}(z) = S_{\mathbf{w}}(z)H(z)H(z^{-1})$$
$$= \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)$$
$$= \sigma^2\left(\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1}\right) \qquad |z| \neq 0, \infty$$
$$R_{\mathbf{x}}[k] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{S_{\mathbf{x}}(z)\right\}$$

DTFT הוא מקרה פרטי של תמרת Z:

$$S_{\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{x}}(z = e^{j2\pi f})$$
$$= \sigma^2\left(\frac{1}{4}e^{j2\pi f} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f}\right) = \frac{\sigma^2}{2}\left(1 + \cos(2\pi f)\right)$$

דרך חישוב נוספת

* הספק: $\boxed{P_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{x}}[0]}$ (הגדרה) $= \frac{\sigma^2}{2}$

$$\mathbf{x}[n] \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

0 בגלל תוחלת $= C_{\mathbf{x}}[0] = \mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = \sigma^2 \sum_m h^2[m]$

חישוב בשיטה הקודמת

התפלגות משותפת של $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n_1] \\ \mathbf{x}[n_2] \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{X} \sim N\left(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}}\right)$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] \\ E\left[\mathbf{x}[n_2]\right] \end{bmatrix} \quad \leftarrow E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] = E\left[\mathbf{x}[n_2]\right] = 0$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}[0] & C_{\mathbf{x}}[k] \\ C_{\mathbf{x}}[k] & C_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \qquad k = |n_1 - n_2|$$

$C_x[0] = \mathrm{Cov}[x[n_1], x[n_1]] = \mathrm{Var}[x[n_1]]$

$C_x[k] = \mathrm{Cov}[x[n], x[n+k]]$

מטריצת Covariance

בדוגמה למעלה:

בהתאם לחישוב $C_{\mathbf{x}}[k]$, במקרה של $k \geqslant 2$, הערכים של $\mathbf{x}[n_1], \mathbf{x}[n_2]$ הם בלתי תלויים, אורטוגונליים וחסרי קורלציה.

$C_x[k] = 0 \quad k \geq 2 \rightarrow$

$C_x[0] = \frac{\sigma^2}{2}$

$C_x[\pm 1] = \frac{\sigma^2}{4}$

$C_x[2] = 0$

3

IIR (תכונה 9.7): מערכות עם תגובה אינסופית להלם, בעלי התמרה מהצורה

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

תגובה אינסופית להלם

דוגמה 9.4: נתון תהליך אקראי מהצורה

$$\mathbf{x}[n] = a\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n],$$

כאשר $\mathbf{w}[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.

$$X(z) = az^{-1}X(z) + W(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > \underbrace{|a|}_{\text{קוטב}} \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} h[n] = a^n u[n]$$

קוטב

כאשר $\mathbf{w}[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.

- ☐ מהו תנאי לתהליך סטציונרי? ← $|a|<1$ תנאי ליציבות
- ☐ חשב $E[\mathbf{x}[n]]$.
- ☐ חשב $R_{\mathbf{x}}[k]$.

$w[n] \to \boxed{h[n]} \to x[n]$

פתרון:

תוחלת

מתבסס על תכונת WSS של $\mathbf{x}[n]$ — קבוע בזמן $\mu_x =$

משוואת הפרשים ←

$$\underbrace{E[\mathbf{x}[n]]}_{\mu_x} = a\underbrace{E[\mathbf{x}[n-1]]}_{\mu_x} + \cancel{E[\mathbf{w}[n]]}^{0}$$

$$\mu_{\mathbf{x}} = a\mu_{\mathbf{x}} \qquad \mu_x(1-a)=0 \quad \text{נתון}$$

$$\mu_{\mathbf{x}} = 0$$

בהתמלה הרצאה

$$E[x[n]] = \cancel{\mu_w}^{0} \sum_m h[m] \to 0$$

☐ דרך א' - מישור הזמן - חישוב ע"פ הגדרה

$$R_{\mathbf{x}}[k] = R_w[k] * h[n] * h[-n]$$
$$= \sigma^2\delta[k] * (a^n u[n]) * \left(a^{-n}u[-n]\right)$$

הפתרון בדרך זו נוח עבור מקרים מאוד פשוטים של $h[n] * h[-n]$ בלבד.

☐ דרך ב' - משוואת בהפרשים

מכפילים את האות ב-$\mathbf{x}[n-k]$ ומחשבים תוחלת

$$\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-k] = a\mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}[n-k] + \mathbf{w}[n]\mathbf{x}[n-k]$$
$$\underbrace{E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-k]]}_{R_x[k]} = \underbrace{E[a\mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}[n-k]]}_{aR_x[k-1]} + \underbrace{E[\mathbf{w}[n]\mathbf{x}[n-k]]}_{\cancel{E[w]}E[x]}$$

$$R_x[k-1] = aR_x[k-2]$$

$$aR_x[k-1] = a\,aR_x[k-2] = a^2R_x[k-2]$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = aR_{\mathbf{x}}[k-1] = a^2R_{\mathbf{x}}[k-2] = a^3R_{\mathbf{x}}[k-3] = \cdots$$

?

סיכום: $R_{\mathbf{x}}[k] = a^k \underbrace{R_{\mathbf{x}}[0]}_{?} \quad k \geqslant 0$

$$R_{\mathbf{x}}[0] = C_{\mathbf{x}}[0] = \mathrm{Var}[\mathbf{x}[t]] = P_x$$
$$= \mathrm{Var}[\mathbf{w}[t]] \sum_m h^2[m]$$

$= ?$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(a^2\right)^n = \sigma^2 \frac{1}{1-a^2}$$

$h^2[m] = (a^n)^2 u[n]$
$= (a^2)^n u[n]$

סכום סדרה הנדסית אינסופית

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad |r| < 1$$

$r = a^2$

מדרגה בדידה $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$\nu = a^2$ 10 אלס

סיכום : $R_{\mathbf{x}}[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k \quad k \geqslant 0$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[-k] \Rightarrow R_{\mathbf{x}}[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k$$

$\Rightarrow P_Y = K_X[0] = R_X[0] = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$

צריך לקיים תכונת סימטריה של $R_X[k]$

דרך 3 : פתרון ע"י התמרת Z

$$S_{\mathbf{x}}(z) = S_{\mathbf{w}}(z) H(z) H(z^{-1})$$
$$= \sigma^2 \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az} \qquad \left|\frac{1}{a}\right| > |z| > |a|$$

התמרה לא סיבתית

$$= \sigma^2 \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1-az}$$
$$= \sigma^2 \left[\frac{A_1 z}{z-a} + \frac{A_2 z}{1-az}\right] \Rightarrow A_1 z - aA_1 z^2 + A_2 z^2 - aA_2 z = z$$
$$\begin{cases} (A_2 - aA_1) z^2 = 0 \\ (A_1 - aA_2) z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1-a^2} \\ A_2 = \frac{a}{1-a^2} \end{cases}$$

שברים חלקיים

$$= \frac{\sigma^2}{1-a^2} \left[\underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}}_{\text{סיבתי}} - \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}}_{\text{אנטי-סיבתי}}\right]$$

מאחר ו-$H(z)$ הוא סיבתי, $H\left(z^{-1}\right)$ הוא אנטי-סיבתי. לכן, ניתן לפשט את החישוב עבור קוטב סיבתי בלבד.

$$\underset{k \geqslant 0}{R_{\mathbf{x}}[k]} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} \mathscr{Z}^{-1} \left\{\frac{1}{1-az^{-1}}\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k u[k]$$

כמובן, ניתן גם לעשות חישוב של חלק אנטי-סיבתי ישירות,

משיק טבלה

$$\mathscr{Z}^{-1} \left\{ -\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} \qquad \left|\frac{1}{a}\right| > |z| \right\} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} u[-n-1] = a^n u[-n-1].$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[-k] \Rightarrow R_{\mathbf{x}}[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k$$

"טריק" זה לשיטה קודמת