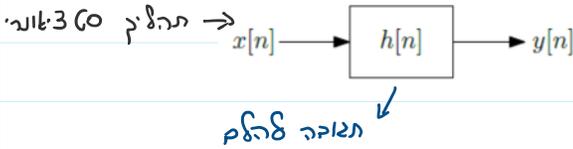


מערכת LTI במאן בזמן

מטרה: נתון את אקראי במובא המערכת

קונבולוציה:



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n]$$

* חישוב $E[y[n]]$, כאשר x הוא תהליך אקראי.

$$E[y[n]] = E\left[\sum_m h[m]x[m-n]\right] \quad \text{חישוב:}$$

$$= \sum_m h[m] E[x[m-n]] \rightarrow \text{קבוצה}$$

שני סדר סכימה: תוחלת \leftrightarrow קונבולוציה

$$= \mu_x \sum_m h[m]$$

$$= \mu_x H(0) \longleftrightarrow H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j2\pi fn}$$

העבר DC של המערכת

$x \sim N(0, \sigma^2)$

* חישוב $\text{Var}[y[n]]$, x - רעש לבן גאוס

הסקת - P_y

$$\text{Var}[y[n]] = \text{Var}\left[\sum_m h[m]x[m-n]\right]$$

חישוב: * התפלג של y גאוסית בלבד שטבה גאוסית

$$\text{Var}[aX + bY] = a^2\text{Var}[X] + b^2\text{Var}[Y] + 2ab\text{Cov}[X, Y]$$

עבור X, Y נלתי תלויים

* עבור רעש לבן x גאוסית x בלתי תלויים $m \neq n$

$$= \sum_m h^2[m] \text{Var}[x[m-n]] = \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_y[0]$$

$\text{קבוצה} = \sigma^2$

$$E[y[n]] = E[x] \sum_m h[m] = 0$$

* ע"כ חישוב σ^2

$$= \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_y[0]$$

הסקת הרעש במובא (הסקת הכניסה אנטופיה)

$$P_y = R_y[0] = C_y[0]$$

$$\text{Var}[x[n]] = C_x[0]$$

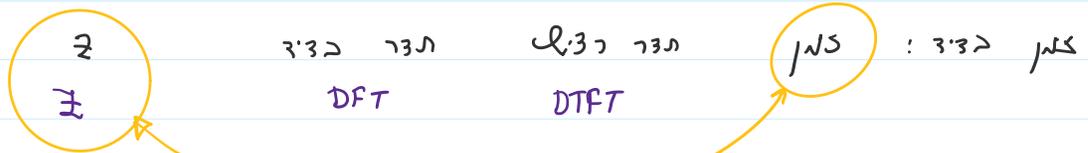
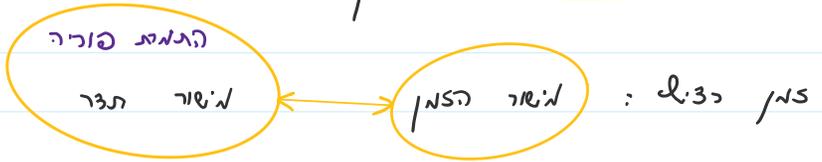
$$y[n] \sim N\left(0, \sigma^2 \sum_m h^2[m]\right)$$

כפי שמובא יהיה WSS

הערה 9.1! הניתוח של תוחלת ושונות לעיל מוגבל למערכות ליניאריות בלבד, אבל אינו מוגבל דווקא למערכות סיבתיות.

שאלו בניתוח מערכת במאן רצף/בדיד

Laplace התמרת
ליניאר S



התמרת Z (הגדרה 9.1): התמרת Z מוגדרת ע"י הקשר

LTI מערכת
פולנום מונה
פולנום לבנה

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

קונבולוציה (תכונה 9.3):

$$\mathcal{Z}\{h[n] * h[-n]\} = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)X(z)$$

שיקוף בזמן (תכונה 9.4):

צ' ציבוי: קטבים קטנים
שושים של פולנום לבנה

$$\mathcal{Z}\{h[-n]\} = H(z^{-1}) = H(1/z)$$

$$R_y[k] = R_x[k] * h[n] * h[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S_y(z) = S_x(z)H(z)H(z^{-1})$$

FIR ניתוח עבור מערכת

FIR (תכונה 9.6): מערכות עם תגובה סופית להלם באורך $N + 1$, בעלי התמרה מהצורה

$$(9.14) \quad H(z) = B(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}$$

בהתאם להגדרתם, מערכות FIR תמיד יציבות.

דוגמה 9.2: נתון תהליך אקראי

$$x[n] = \frac{1}{2}w[n] + \frac{1}{2}w[n-1],$$

כאשר $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוס.

□ הוכח, ש- $x[n]$ הוא סטציאונרי.

□ חשב $E[x[n]]$

□ חשב $R_x[k], P_x, S_x(f)$

□ חשב $\text{Var}[x[n]]$

□ מצא התפלגות של $x[n]$ והתפלגות משותפת של $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[n_1] \\ x[n_2] \end{bmatrix}$

תיאור ההצבה:

$$x[n] = h[n] * w[n], \quad h[n] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad z \neq 0$$

מצא התפלגות של $x[n]$ והתפלגות משותפת של $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[n_1] \\ x[n_2] \end{bmatrix}$

פתרון: $x[n]$ הוא סטציאונרי מאחר מהמערכת FIR תמיד יציבה.

$$E[x[n]] = E[w] \sum_n h[n] = 0$$

צדק ג: לטור \sum

$$\begin{aligned} S_x(z) &= S_w(z)H(z)H(z^{-1}) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1}\right) \quad |z| \neq 0, \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_x[k] &= R_w[k] * h[n] * h[-n] \\ &= \sigma^2 \delta[k] * \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} * \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \delta[k] + \frac{\sigma^2}{4} \delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4} \delta[k+1] = C_x[k] \end{aligned}$$

המשק - צדק א' - לטור הסמן

קונבולוציה
הי צאה 1
בקיים DSP

$$R_x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{S_x(z)\}$$

$$\begin{aligned} S_x(f) &= S_x(z = e^{j2\pi f}) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{4}e^{j2\pi f} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f} \right) = \frac{\sigma^2}{2} (1 + \cos(2\pi f)) \end{aligned}$$

DTFT היא לקחה פרוט: $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

צדק תשובה מספר

$$P_x = R_x[0] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$C_x[0] = \text{Var}[x[n]] = \sigma^2 \sum_m h^2[m]$$

חיסוק בשדה הקונצור

$$x[n] \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

התפלגות משותפת של $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[n_1] \\ x[n_2] \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} C_x[0] &= \text{Cov}[x[n_1], x[n_1]] = \text{Var}[x[n_1]] \\ C_x[k] &= \text{Cov}[x[n], x[n+k]] \end{aligned}$$

Covariance

$$\mathbf{X} \sim N(\mu_x, C_x)$$

$$\mu_x = \begin{bmatrix} E[x[n_1]] \\ E[x[n_2]] \end{bmatrix} \leftarrow E[x[n_1]] = E[x[n_2]] = 0$$

$$C_x = \begin{bmatrix} C_x[0] & C_x[k] \\ C_x[k] & C_x[0] \end{bmatrix} \quad k = |n_1 - n_2|$$

כצאה למטה

בהתאם לחישוב $C_x[k]$, במקרה של $k \geq 2$, הערכים של $x[n_1], x[n_2]$ הם בלתי תלויים, אורטוגונליים וחסרי קורלציה.

$$\begin{aligned} C_x[0] &= \frac{\sigma^2}{2} \\ C_x[1] &= \frac{\sigma^2}{4} \\ C_x[2] &= 0 \end{aligned}$$

IIR (תכונה 9.7): מערכות עם תגובה אינסופית להלם, בעלי התמרה מהצורה

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

תאבה
אינסופית
סולם

$$X(z) = az^{-1}X(z) + W(z)$$

דוגמה 9.4: נתון תהליך אקראי מהצורה

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \xrightarrow{\mathcal{Z}} h[n] = a^n u[n] \quad x[n] = ax[n-1] + w[n]$$

כאשר $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוס.

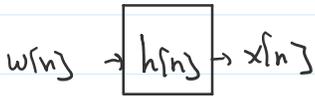
קובץ

כאשר $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוס.

מהו תנאי לתהליך סטציונרי? $\leftarrow |a| < 1$ תנאי יציבות

חשב $E[x[n]]$

חשב $R_x[k]$



פתרון:
תוחלת

מתבסס על תכונת WSS של $x[n]$

$$E[x[n]] = aE[x[n-1]] + E[w[n]] \stackrel{0}{\rightarrow}$$

קבוע בזמן $\mu_x =$

$$\mu_x = a\mu_x \quad \mu_x(1-a) = 0 \quad |a| < 1$$

$$\mu_x = 0$$

משוואת הפרשים \rightarrow לשוואת הפרשים בתחילת הריאה

$$E[x[n]] = \sum_m h[m] w[n-m] \rightarrow 0$$

דרך א' - מישור הזמן - תשובה ס"פ הנצרה

$$R_x[k] = R_w[k] * h[n] * h[-n]$$

$$= \sigma^2 \delta[k] * (a^n u[n]) * (a^{-n} u[-n])$$

הפתרון בדרך זו נוח עבור מקרים מאוד פשוטים של $h[n] * h[-n]$ בלבד.

דרך ב' - משוואת בהפרשים

מכפילים את האות ב- $x[n-k]$ ומחשבים תוחלת

$$x[n]x[n-k] = ax[n-1]x[n-k] + w[n]x[n-k]$$

$$E[x[n]x[n-k]] = E[ax[n-1]x[n-k]] + E[w[n]x[n-k]]$$

$R_x[k-1] = aR_x[k-2]$

$$\leftarrow R_x[k] \quad \rightarrow aR_x[k-1] \quad E[w[n]]E[x[n-k]]$$

$$= a^2 R_x[k-2]$$

? $R_x[k] = aR_x[k-1] = a^2 R_x[k-2] = a^3 R_x[k-3] = \dots$

ס'כום: $R_x[k] = a^k R_x[0] \quad k \geq 0$

$R_x[0] = C_x[0] = \text{Var}[x[t]] = P_x \quad \text{?}$

$$= \text{Var}[w[t] \sum h^2[m]]$$

$$= \sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty} (a^2)^m = \sigma^2 \frac{1}{1-a^2}$$

$h^2[m] = (a^m)^2 u[m]$
 $= (a^2)^m u[m]$

סכום סדרה הנגזרת אינסופית

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1$$

$r = a^2$

$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$r = a^2$$

10 40

$$\text{ס'כום} : R_x[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k \quad k \geq 0$$

$$R_x[k] = R_x[-k] \Rightarrow R_x[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k \quad \Rightarrow P_y = R_x[0] = R_x[0] = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$$

צריך לקיים תכונת סימטריה של R_x

צריך ל: הגרין ע"י הנומה ז

$$S_x(z) = S_w(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az}$$

$$\left| \frac{1}{a} \right| > |z| > |a|$$

הנומה של סיבתי

$$= \sigma^2 \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1-az}$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{A_1 z}{z-a} + \frac{A_2 z}{1-az} \right] \Rightarrow A_1 z - a A_1 z^2 + A_2 z^2 - a A_2 z = z$$

$$\begin{cases} (A_2 - a A_1) z^2 = 0 \\ (A_1 - a A_2) z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1-a^2} \\ A_2 = \frac{a}{1-a^2} \end{cases}$$

שניס חלקים

$$= \frac{\sigma^2}{1-a^2} \left[\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} \right]$$

מאחר ו- $H(z)$ הוא סיבתי, $H(z^{-1})$ הוא אנטי-סיבתי. לכן, ניתן לפשט את החישוב עבור קוטב סיבתי בלבד.

כמובן, ניתן גם לעשות חישוב של חלק אנטי-סיבתי ישירות,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ -\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} \quad \left| \frac{1}{a} \right| > |z| \right\} = \left(\frac{1}{a} \right)^{-n} u[-n-1] = a^n u[-n-1].$$

לשק סגורה

$$R_x[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1-az^{-1}} \right\} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k u[k]$$

לשק סגורה של עשירה קובצת

$$R_x[k] = R_x[-k] \Rightarrow R_x[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k$$