מערכות LTI בזמן בדיד

תכונות:

כניסה, תגובה להלם, מוצא

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n]$$

x

* תהליך WSS העובר דרך מערכת LTI יוצר ⇐ מוצא היא WSS וכניסה ומוצא הם Joint-WSS

תוחלת

תוחלת (מקבלה של תכונה 8.2) (תכונה 9.1): תוחלת תהליך WSS במוצא המערכת נתון ע"י

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{x}[n] * h[n] = \sum_m h[m]\mathbf{x}[m-n]$$

לפי הגדרה →

$$E[\mathbf{y}[n]] = E\left[\sum_m h[m]\mathbf{x}[m-n]\right]$$

שינוי סדר סכימה: קונבולוציה, תוחלת →

$$= \sum_m h[m]\underbrace{E[\mathbf{x}[m-n]]}_{\text{קבוע בזמן } \mu_x}$$

$$= \mu_{\mathbf{x}} \sum_m h[m]$$

שונות

דוגמה 9.1: האות בכניסה $\mathbf{x}[n] \sim N(0,\sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי (WGN). חשב: 1 שונות אות מוצא $\mathrm{Var}[\mathbf{y}[n]]$, 2 הספק $P_{\mathbf{y}}$.

1

הגדרה →

$$\mathrm{Var}[\mathbf{y}[n]] = \mathrm{Var}\left[\sum_m h[m]\mathbf{x}[m-n]\right]$$

1 שינוי סדר הסכימה
2 →
3 דגימות של רעש לבן הם בלתי-תלויים גאוסי

$$= \sum_m h^2[m]\underbrace{\mathrm{Var}[\mathbf{x}[m-n]]}_{\text{קבוע בזמן } \sigma^2}$$

עבור X, Y בלתי תלויים

$$\boxed{\mathrm{Var}[aX+bY] = a^2\,\mathrm{Var}[X] + b^2\,\mathrm{Var}[Y]}$$

$$= \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_{\mathbf{y}}[0] \quad \leftarrow \quad \boxed{\mathrm{Var}[\mathbf{x}[n]] = C_{\mathbf{x}}[0]}$$

2

$$P_{\mathbf{y}} = R_{\mathbf{y}}[0] = C_y[0]$$

$E[x[n]] = 0$ ↑

סיכום:

$$\mathbf{y}[n] \sim N\left(0, \sigma^2 \underbrace{\sum_m h^2[m]}\right)$$

הגדלת שונות בגלל מעבר דרך מערכת

הגדלת שונות
בגלל מעבר דרך מערכת

ניתוח במישור התדר

בזמן רציף: קונבולוציה בזמן היא מכפלה בתדר וגם במישור S (Laplace)

לא נוח

בזמן בדיד: DTFT Z

לא נוח

התכונות של זמן בדיד ורציף מאוד דומות:

$$R_{\mathbf{xy}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k] * h[k] \quad S_{\mathbf{xy}}(f) = S_{\mathbf{x}}(f)H(f) \quad S_{\mathbf{xy}}(z) = S_{\mathbf{x}}(z)H(z)$$

מקבילה של צפיפות הספק ספקטראלית

$$S_{\mathbf{x}}(z) = \mathscr{Z}\left\{R_{\mathbf{x}}[n]\right\}$$

התמרת Z (הגדרה 9.1): התמרת Z מוגדרת ע"י הקשר

$$H(z) = \mathscr{Z}\left\{h[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

שיקוף בזמן (תכונה 9.4):

$$\mathscr{Z}\left\{h[-n]\right\} = H\left(z^{-1}\right) = H\left(1/z\right) \tag{9.7}$$

פונקציית תמסורת של מערכת LTI (הגדרה 9.2): פונקציית תמסורת של מערכת נתונה ע"י

$$H(z) = \mathscr{Z}\left\{h[n]\right\} = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{9.8}$$

בפרט, מתקיים

$$\mathscr{Z}\left\{h[n] * h[-n]\right\} = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}. \tag{9.9}$$

$$R_y[k] * h[n] * h[-n] = R_{\mathbf{y}}[k] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} S_{\mathbf{y}}(z) = S_{\mathbf{x}}(z)H(z)H(z^{-1})$$

יציבות (תכונה 9.5): עבור מערכת יציבה וסיבתית, השורשים של $A(z)$ הינם בתוך מעגל יחידה.

FIR (תכונה 9.6): מערכות עם תגובה סופית להלם באורך $N+1$, בעלי התמרה מהצורה

$$H(z) = B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N} \tag{9.11}$$

בהתאם להגדרתם, מערכות FIR תמיד יציבות.

$(A(z)=1)$

בהתאם להגדרתם, מערכות FIR תמיד יציבות.

$(A(z)=1)$

דוגמה:

$$\mathrm{x}[n]=\frac{1}{2}\mathrm{w}[n]+\frac{1}{2}\mathrm{w}[n-1],$$

(חזרה של דוגמה מהעבר ע"פ תכונות של מערכת)

כאשר $\mathrm{w}[n]\sim N(0,\sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.

- □ הוכח, ש-$\mathrm{x}[n]$ הוא סטציאונרי.
- □ חשב $R_\mathrm{x}[k],P_\mathrm{x},S_\mathrm{x}(f)$.
- □ חשב $E\left[\mathrm{x}[n]\right],\mathrm{Var}\left[\mathrm{x}[n]\right]$.
- □ מצא התפלגות של $\mathrm{x}[n]$ והתפלגות משותפת של $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}\mathrm{x}[n_1]\\ \mathrm{x}[n_2]\end{bmatrix}$

$$\mathrm{x}[n]=h[n]*\mathrm{w}[n],\quad h[n]=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$

$$H(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1},\quad z\neq 0$$

פתרון:

- ○ $\mathrm{x}[n]$ הוא סטציאונרי מאחר מהמערכת FIR תמיד יציבה.
- ○ דרך א' - חישוב קונבולוציה במישור הזמן

$$\boxed{R_\mathrm{y}(\tau)=R_\mathrm{x}(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)}$$

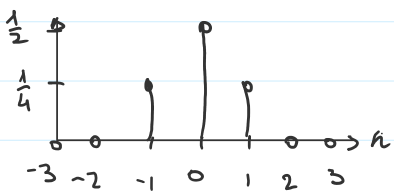
$$R_\mathrm{x}[k]=\underbrace{R_\mathrm{w}[k]}_{\sigma^2\delta[k]}*\underbrace{\left(h[n]*h[-n]\right)}_{\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}*\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}=h[n]*h[-n]}=R_\mathrm{w}[k]*\left(\sum_{n=0}^{N-1}h[n]h[n+k]\right)$$

$n=0$ $n=0$ $n=0$

רישום שונה של אותה תוצאה

$$=\sigma^2\delta[k]*\left\{\frac{1}{4},\underset{\uparrow}{\frac{1}{2}},\frac{1}{4}\right\}=\sigma^2\left\{\frac{1}{4},\underset{\uparrow}{\frac{1}{2}},\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\delta[k]+\frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1]+\frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$$



* דרך ב'

$$S_\mathrm{x}(z)=S_\mathrm{w}(z)H(z)H(z^{-1})$$

$\mathcal{Z}\{\delta[n]\}=1,$ σ^2

$$=\sigma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\quad z\neq 0,\infty$$

$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\}=z^{-n_0}X(z)$

תוצאה זהה לדרך א' $\rightarrow$ $R_\mathrm{x}[k]=\mathcal{Z}^{-1}\left\{S_\mathrm{x}(z)\right\}$

DTFT $\quad S_\mathrm{x}(f)=S_\mathrm{x}(z=e^{j2\pi f})$

DTFT $$S_{\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{x}}(z = e^{j2\pi f})$$
$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{4} e^{j2\pi f} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi f} \right) = \frac{\sigma^2}{2} \left(1 + \cos(2\pi f) \right)$$

* המשך הפתרון (דרכים מאתגרת)

1. הצבה של 0 בתוך $R_x[k]$
2. חישוב שונות כמו בדוגמה לעיל

$$P_{\mathbf{x}} = \mathrm{Var}\left[\mathbf{x}[n]\right] = C_{\mathbf{x}}[0] = R_{\mathbf{x}}[0] = \sigma^2 \sum_m h^2[m] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$E\left[\mathbf{x}[n]\right] = E\left[\mathbf{w}\right] \sum h[n] = 0$$

$$\mathbf{x}[n] \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

* התפלגות משותפת של זוג דגימות:

$$\mathbf{X} \sim N\left(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}}\right)$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] \\ E\left[\mathbf{x}[n_2]\right] \end{bmatrix} \leftarrow E\left[\mathbf{x}[n_1]\right] = E\left[\mathbf{x}[n_2]\right] = 0$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}[0] & C_{\mathbf{x}}[k] \\ C_{\mathbf{x}}[k] & C_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \quad k = |n_1 - n_2|$$

זהה לחישוב מקביל בזמן רציף בהרצאה הקודמת

בהתאם לחישוב $C_{\mathbf{x}}[k]$, במקרה של $k \geqslant 2$, הערכים של $\mathbf{x}[n_1], \mathbf{x}[n_2]$ הם בלתי תלויים, אורטוגונליים וחסרי קורלציה.

IIR (תכונה 9.7): מערכות עם תגובה אינסופית להלם, בעלי התמרה מהצורה

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

דוגמה 9.4: נתון תהליך אקראי מהצורה

$$\mathbf{x}[n] = a\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n],$$

כאשר $\mathbf{w}[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוסי.
מהו תנאי לתהליך סטציונרי? חשב $R_{\mathbf{x}}[k]$.
חשב תוחלת $E[x[n]]$

ניתוח מקדים:

$$X(z) = az^{-1}X(z) + W(z)$$
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} h[n] = a^n u[n]$$

פתרון: תנאי לס"ס ← מערכת יציבה ⇐ $|a| < 1$ (קוטב $1 - \frac{a}{z} = 0 \Rightarrow z = a$) *

* $$\underbrace{E[x[n]]}_{\text{קבוע בזמן}} = a\underbrace{E[x[n-1]]}_{\text{קבוע בזמן}} + E[\cancel{w[n]}]^{\,0}$$

קבוע בזמן   קבוע בזמן

$$\overbrace{\mu_x} = a\overbrace{\mu_x} \Rightarrow \mu_x = 0$$

□ דרך א' - מישור הזמן

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}[k] &= R_{\mathbf{w}}[k] * h[n] * h[-n] \\ &= \sigma^2\delta[k] * \left(a^n u[n]\right) * \left(a^{-n}u[-n]\right) \end{aligned}$$

הפתרון בדרך זו נוח עבור מקרים מאוד פשוטים של $h[n] * h[-n]$ בלבד.

□ דרך ב' - משוואת בהפרשים (בדומה לדוגמה 6.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-k] &= a\mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}[n-k] + \mathbf{w}[n]\mathbf{x}[n-k] \\ E\left[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-k]\right] &= E\left[a\mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}[n-k]\right] + E\left[\mathbf{w}[n]\mathbf{x}[n-k]\right] \\ R_{\mathbf{x}}[k] &= aR_{\mathbf{x}}[k-1] + \cancel{E\left[\mathbf{w}[n]\right]}E\left[\mathbf{x}[n-k]\right] \\ &\cdots \end{aligned}$$

גם בדרך זאת, הפתרון הוא לא ממש נוח.

* דרך ג'

$$S_{\mathbf{x}}(z) = S_{\mathbf{w}}(z)H(z)H(z^{-1}) \leftarrow \text{לפי ההגדרה}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sigma^2\frac{1}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1}{1-az} \qquad \left|\frac{1}{a}\right| > |z| > |a| \\ &= \sigma^2\frac{z}{z-a}\cdot\frac{1}{1-az} \end{aligned}\right] \text{הצבה}$$

$$= \sigma^2\left[\frac{A_1 z}{z-a} + \frac{A_2 z}{1-az}\right] \Rightarrow A_1 z - aA_1 z^2 + A_2 z^2 - aA_2 z = z$$

$$\begin{cases} (A_2 - aA_1)\,z^2 = 0 \\ (A_1 - aA_2)\,z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{1-a^2} \\ A_2 = \dfrac{a}{1-a^2} \end{cases}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-a^2}\left[\frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right]$$

פירוק לשברים חלקיים

מאחר ו-$H(z)$ הוא סיבתי, $H\left(z^{-1}\right)$ הוא אנטי-סיבתי. לכן, ניתן לפשט את עבור קוטב סיבתי בלבד.

התמרה הפוכה בהתבסס על חלק סיבתי בלבד

$$\begin{aligned} \underset{k\geqslant 0}{R_{\mathbf{x}}[k]} &= \frac{\sigma^2}{1-a^2}\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-az^{-1}}\right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{1-a^2}a^n u[n] \end{aligned}$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[-k] \Rightarrow R_{\mathbf{x}}[k] = \frac{\sigma^2}{1-a^2}a^{|k|}$$

כמובן, ניתן גם לעשות חישוב של חלק אנטי-סיבתי ישירות,

השלמה (אובזאוליות של חלק אנטי-סיבתי)

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{-\frac{1}{1-\dfrac{1}{a}z^{-1}} \qquad \left|\frac{1}{a}\right| > |z|\right\} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}u[-n-1] = a^n u[-n-1].$$