מערכות LTI - זמן רציף

הקדמה

כניסה | תגובה להלם | מוצא

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

תגובה להלם

$$x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=h(t)$$

קונבולוציה בזמן

$$\mathbf{y}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)h(s)ds$$

מכפלה בתדר

$$Y(F) = H(F)X(F),$$

$$Y(F) = \mathscr{F}\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

אותות סטוכסטיים + מערכת LTI

התהליך בכניסה של מערכת LTI יציבה הוא סט'

⇐ התהליך במוצא סט'

⇐ כניסה מוצא סטציונריים במשותף

מספיק שאחד מתוך 3 מתקיים

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{x(t)}_{WSS} * h(t)$$

$E[y(t)]$ תכונה:

חישוב:

תוחלת של משתנה אקראי:

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx}$$

קונבולוציה

$$E[\mathbf{y}(t)] = E\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}(t-s)ds}_{y(t)}\right]$$

לפי הגדרה

החלפה של סדר אינטגרציה (קונבולוציה, תוחלת) →

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\underbrace{E[\mathbf{x}(t-s)]}_{\text{}}ds$$

אינטגרל

קבוע בזמן

$$= \mu_{\mathbf{x}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds}_{H(0)} = \mu_{\mathbf{x}} \underbrace{H(F=0)}_{\text{}}$$

תגובת תדר בתדר DC

= הגבר DC

$$H(F)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

סיכום:

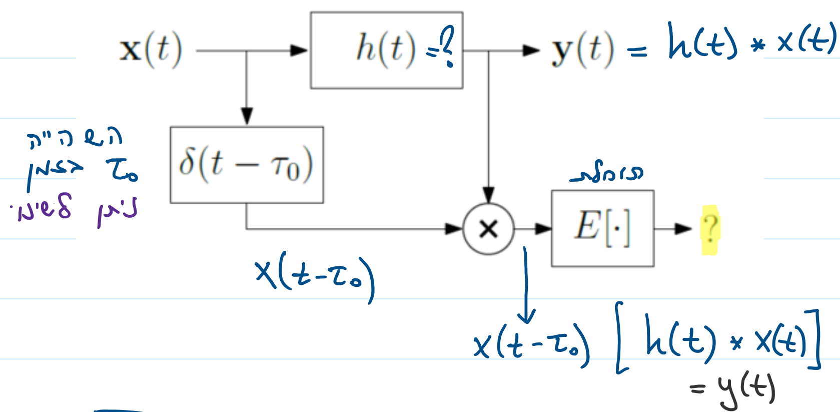
תוחלת מוצא =

תוחלת כניסה x הגבר DC

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$
$$C_{\mathbf{xy}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau)$$
$$R_{\mathbf{yx}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{yx}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(-\tau)$$
$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$
$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

קשרים חשובים נוספים:

דוגמה: מטרה: זיהוי תגובה להלם של מערכת ע"י רעש לבן גאוסי.



$$E[\,x(t-\tau_0)y(t)] = ?$$

$x(t) \to \boxed{\delta(t-\tau_0)} \to x(t-\tau_0) = x(t) * \delta(t-\tau_0)$

$\delta(t) \to \boxed{\delta(t-\tau_0)} \to \delta(t-\tau_0)$

פתרון:

1) $E[\mathbf{x}(t-\tau_0)\mathbf{y}(t)] = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau_0)]$

הפרש זמן τ_0

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\mathbf{xy}}(t_1,t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)] \\ R_{\mathbf{xy}}(\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] \end{aligned}} \to \boxed{R_{xy}(\tau_0)}$$

2) $R_{\mathbf{xy}}(\tau) = \underbrace{R_{\mathbf{x}}(\tau)}_{\sigma^2\delta(\tau)} * h(\tau)\Big|_{\tau=\tau_0} = h(\tau)\Big|_{\tau=\tau_0}$

תוצאה של קונבולוציה עם δ

רעש לבן:

$$\boxed{\begin{aligned} &n(t) \sim N(0,\sigma^2) \\ &E[\mathbf{n}(t)] = 0 \\ &R_{\mathbf{n}}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(\tau_0 - s)ds}$$

$$= h(\tau_0) \cdot \sigma^2$$

3) ע"י קביעה של ערכי τ_0 ($\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$) שונים, ניתן לקבל מספר

3) ע"י קביעה של ערכי τ_0 שונים, ניתן לקבל מספר הנדרש של ערכי $h(\cdot)$.

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$

ניתוח במישור התדר

PSD צפיפות הספק ספקטראלית

$$S_{\mathbf{xy}}(F) = \mathscr{F}\{R_{\mathbf{xy}}(\tau)\} = S_{\mathbf{x}}(F)\,H(F)$$

$$S_{\mathbf{y}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\,H(F)H^*(F) = S_{\mathbf{x}}(f)\,|H(F)|^2$$

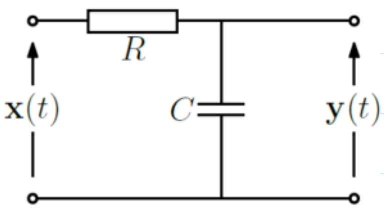
במוצא

$$H^*(F) = \mathscr{F}\{h(-\tau)\}$$

$$S_{\mathbf{yx}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\,H^*(F)$$

דוגמא:

מסנן LPF



כניסה: רעש לבן גאוסי $x(t) \sim N\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$

הגדרה/תזכורת:

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

$$S_{\mathbf{x}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

מצא $S_{\mathbf{y}}(F), R_{\mathbf{y}}(\tau), C_{\mathbf{y}}(\tau), P_{\mathbf{y}}$
1 2 3 4

הקדמה: ניתוח המערכת RC בזמן ובתדר

$$H(F) = \frac{\frac{1}{j2\pi FC}}{R + \frac{1}{j2\pi FC}} = \frac{1}{1 + j2\pi RCF} = \frac{1/RC}{1/RC + j2\pi F}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)u(t) \quad \leftarrow \boxed{\exp(-at)u(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{a + j2\pi F}}$$

התמרת פוריה

1)
$$S_{\mathbf{y}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)\,|H(F)|^2$$

$$= \frac{N_0/2}{1 + (2\pi RCF)^2} = \frac{N_0}{4RC}\frac{2\frac{1}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\pi^2F^2} \quad \leftarrow \boxed{\exp(-a|t|) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2F^2}}$$

$a = \frac{1}{RC}$

$\mathscr{F}^{-1}$

2)
$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{S_{\mathbf{y}}(F)\} = \frac{N_0}{4RC}\exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

3)
$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) - \overset{?}{\mu_{\mathbf{y}}^2} = R_{\mathbf{y}}(\tau) \qquad \leftarrow E[\mathbf{y}(t)] = \overbrace{\cancel{E[\mathbf{x}(t)]}}^{0\text{ לפי הגדרה}}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = 0$$

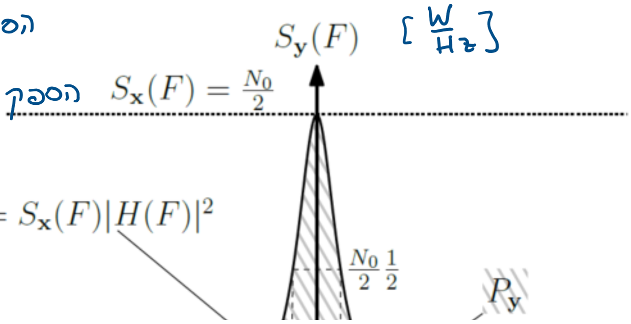
נוסחת תוחלת מתחילת הרצאה

4)
$$P_{\mathbf{y}} \underset{\text{הגדרה}}{=} R_{\mathbf{y}}(0) = \frac{N_0}{4RC}$$

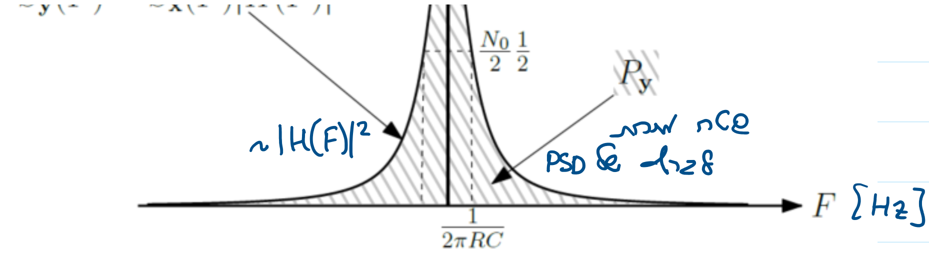
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{y}}(F)dF$$

הספק הרעש במוצא:

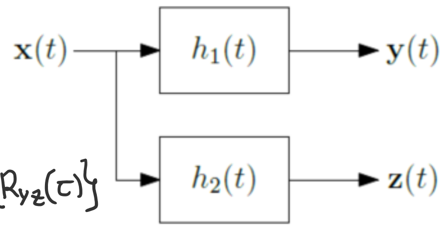
הספק כניסה:



$S_{\mathbf{y}}(F) = S_{\mathbf{x}}(F)|H(F)|^2$



מערכות שונות (תכונה 8.5): עבור תהליך $x(t)$, העובר דרך 2 מערכות שונות, מתקיים

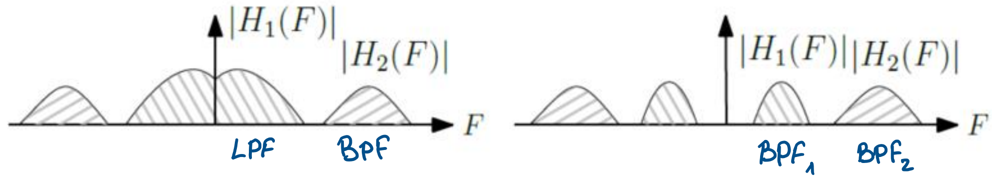


עבור $x(t)$ סט' :

$$R_{yz}(\tau) = R_x(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau)$$
$$S_{yz}(F) = S_x(F) H_1^*(F) H_2(F) = \mathcal{F}\{R_{yz}(\tau)\}$$

מקרה פרטי חשוב : מערכות לא חופפות במישור התדר $\quad \forall F\ H_1^*(F)H_2(F) = 0$

מערכות $h_1(t), h_2(t)$ ממשיות, $|H_1(F)|, |H_2(F)|$ זוגיים בתדר



קשר בין $y(t), z(t)$: * אורתוגונליים $\Leftarrow$ $\quad S_{yz}(F) = 0 \Rightarrow R_{yz}(\tau) = 0$

* עבור לפחות אחת מתוך שני המערכות $H_1(0) = 0$ $\Leftarrow$ תוחלת $\quad \mu_y = \mu_x \cancel{H(0)} = 0$

חסרי קורלציה : $\quad C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) = 0$

תזכורת
$\boxed{C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) - \cancel{\mu_y \mu_z}}$
מספיק שתוחלת של אחד מהם $=0$

* אם התהליך $x(t)$ הוא גאוסי, הם גם בלתי תלויים

סיכום : המצב הזה מסביר, לדוגמה, למה לכל ערוץ רדיו יש רעש משלו, בלתי-תלוי ברעש בערוץ אחר.

תהליכים גאוסיים

תזכורת : תכונות של תהליך גאוסי $x(t)$

* $x(t_1),\dots,x(t_k)$ - יש להם התפלגות גאוסית (בד"כ נסתפק ב $k=2$)
* סט' אוטו'
* התפלגות משותפת : $\quad x(t) \sim N(\mu,\sigma^2)$, ידוע $C_x(\tau)$

התפלגות המשותפת של $X_1 = x(t_1), X_2 = x(t_2)$

* התפלגות משותפת : $x(t) \sim N(\mu,\sigma^2)$, $C_x(\tau)$ ידוע

התפלגות המשותפת של $X_1 = \mathbf{x}(t_1), X_2 = \mathbf{x}(t_2)$

$$\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})$$

$$\sim N\left(\begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}[X_1,X_2] \\ \mathrm{Cov}[X_1,X_2] & \mathrm{Var}[X_2] \end{bmatrix}\right)$$

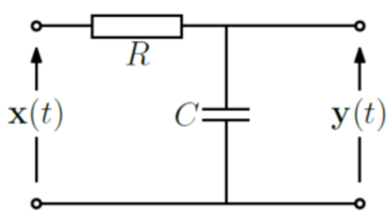
$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix} \qquad \rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{C_x(0)} \qquad C_x(0) = \sigma_x^2$$

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}(\tau) \\ C_{\mathbf{x}}(\tau) & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} = \sigma_{\mathbf{x}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{x}}(\tau) \\ \rho_{\mathbf{x}}(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

* תהליך גאוסי העובר דרך מערכת LTI נשאר גאוסי, עם שינוי של μ_y , $C_y(\tau)$ בהתאם לתכונות המערכת

$$E[\mathbf{y}(t)] = E[\mathbf{x}(t)]H(0)$$

$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$



תזכרה לדוגמה של מסנן RC

מצא פרמטרי התפלגות של $\mathbf{y}(t)$ והתפלגות של $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(3) \end{bmatrix}$.

תוצאות קודמות :

$$E[\mathbf{y}(t)] = \cancel{E[\mathbf{x}(t)]} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = 0$$

$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{S_{\mathbf{y}}(F)\} = \frac{N_0}{4RC}\exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

$\tau = 0$

פתרון :

$$\mathbf{y}(t) \sim N\Big(\underbrace{E[\mathbf{y}(t)]}_{\text{תוחלת}}, \underbrace{\mathrm{Var}[\mathbf{y}(t)]}_{\text{שונות}} = \underbrace{C_{\mathbf{y}}(0)}_{\text{הגדרה}} = \frac{N_0}{4RC} = P_{\mathbf{y}}\Big)$$

0

$$\mathbf{Y} \sim N(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}})$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[\mathbf{y}(1)] \\ E[\mathbf{y}(3)] \end{bmatrix} \leftarrow E[\mathbf{y}(1)] = E[\mathbf{y}(3)] = 0$$

הערה: τ גדול יותר ⇐ יכול לחזות τ זמן קדימה קטנה יותר בגלל של $C_y(t)$ יורד עם τ

$$C_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \overset{\mathrm{Var}[y(t)]}{C_{\mathbf{y}}(0)} & C_{\mathbf{y}}(\tau = 3-1) \\ C_{\mathbf{y}}(2) & C_{\mathbf{y}}(0) \end{bmatrix} \leftarrow C_{\mathbf{y}}(2) = R_{\mathbf{y}}(2) = \frac{N_0}{4RC}\exp\left(-\frac{2}{RC}\right)$$