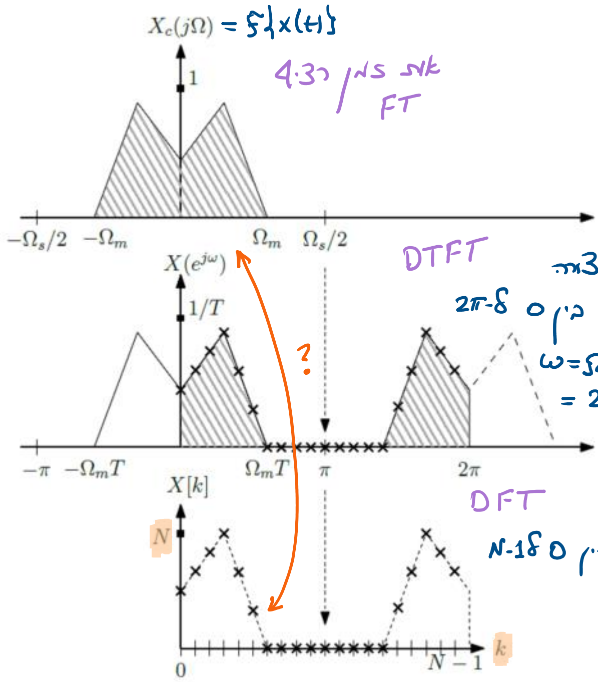
התמרות פוריה - היבטים מעשיים (שימוש בפקודה fft)

* קשר בין תדר אנלוגי (רג 4.3) לערך k של X[k] (התמרה DFT)



* אותה צורה
* תדרים בין 0 ל-2π
* $\omega = \Omega T = 2\pi F T = 2\pi \frac{F}{F_s}$

* תדר בין 0 ל-N-1

$\omega = \Omega T$

$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad k = 0, \ldots, N-1$

$\omega_k \to \Omega_k \to F_k$

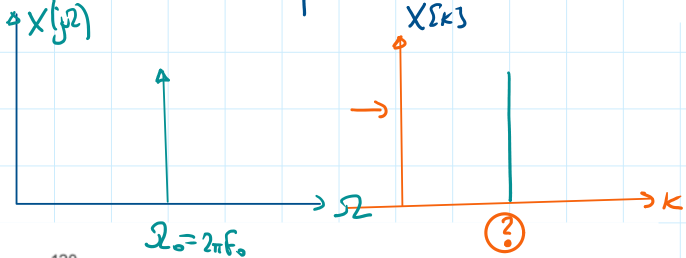
$\frac{2\pi}{N} k = 2\pi F_k T \Rightarrow \boxed{F_k = \frac{k}{N}\frac{1}{T} = \frac{k}{N}F_s}$

k מספר

F_k [Hz] תדר של האות בזמן רג 4.3

דוגמה: נתון אות $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

שאלה: באיזה ערך k נקבל את הפיק של ההתמרה



המשך הדוגמה: ערכים מספריים

$F_s = \frac{1}{T} = 1\text{kHz}$

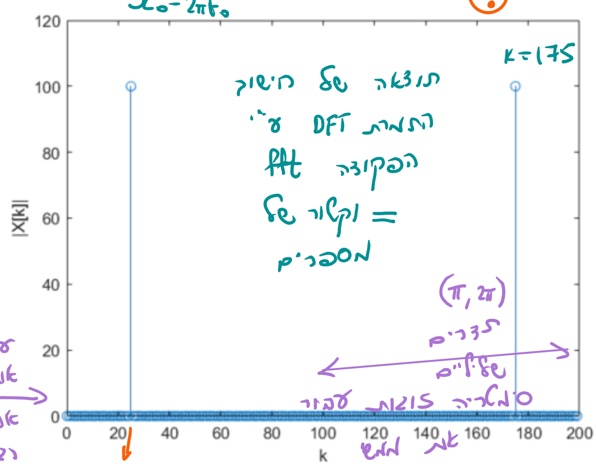
$F_0 = 125\text{Hz}$

$x[n] = x(nT) = \cos(2\pi F_0 T n) = \cos(\frac{\pi}{4} n)$

נחקור X[k] עבור N=200

$\boxed{F_k = \frac{k}{N}\frac{1}{T} = \frac{k}{N}F_s} \to 125 = \frac{k}{200} \cdot 1000$

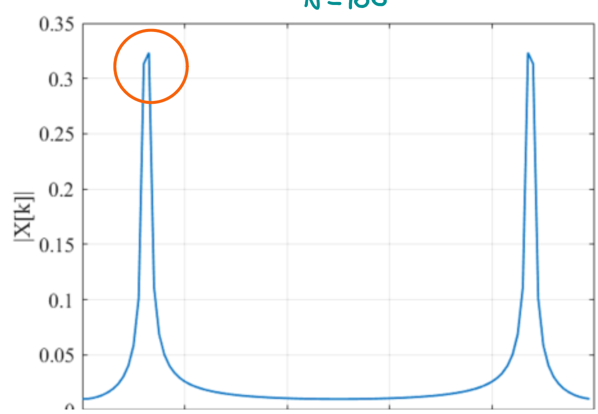
$\Rightarrow k = 25$



125Hz ← k=?

הערה: החזרת התדרים "למקומים" נעשת ע"י פקודה fftshift
שליליים

N=100



* אמפליטודה: יש לנרמל ע"י חלוקה ב-N
* שימו מספר הדגימות

עבור N=100 הפיק הצפוי הוא

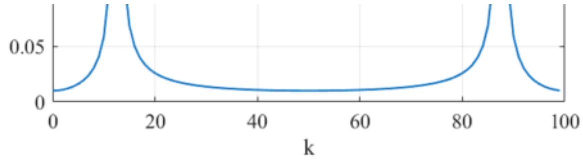
עבור $k = 12.5$

k חייב להיות שלם

שאלה: האם אפשר לצהות תדר

אנלוגי בצורה יותר מדוייקת

$k = 13 \Rightarrow \boxed{F_k = \frac{k}{N}\frac{1}{T} = \frac{k}{N}F_s} = \frac{13}{\ldots} \cdot 1\text{kHz}$



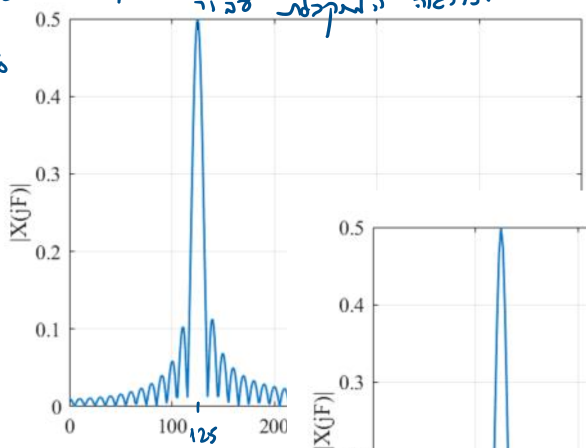
אנלוג בצורה יותר מדויקת

$k=13 \Rightarrow \boxed{F_k = \frac{k}{N}\frac{1}{T} = \frac{k}{N}F_s} = \frac{13}{100}\cdot 1kHz = 130Hz$

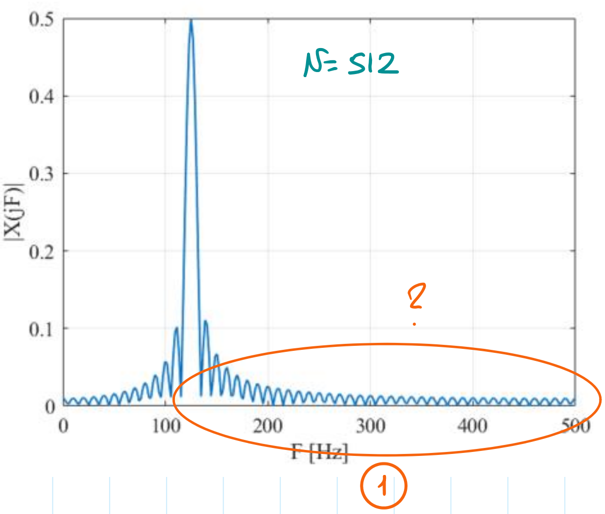
125Hz !!! ?

תשובה/פתרון = ריפוד באפסים (הוספת אפסים מימין לאות)

תוצאה המתקבלת עבור N=1024 (הוספת 924 אפסים לאות מקורים)



הערה: fft עובד קצת יותר מהר עבור N שהוא חזקה של 2




```
N = 100;
n = 0:N-1;
x = cos(pi/4*n);
X = fft(x,1000)/N;
plot(abs(X))
```

מספר דגימות

זמן בדיד

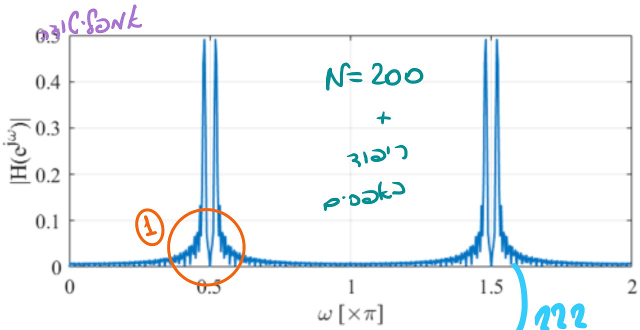
אות דגום

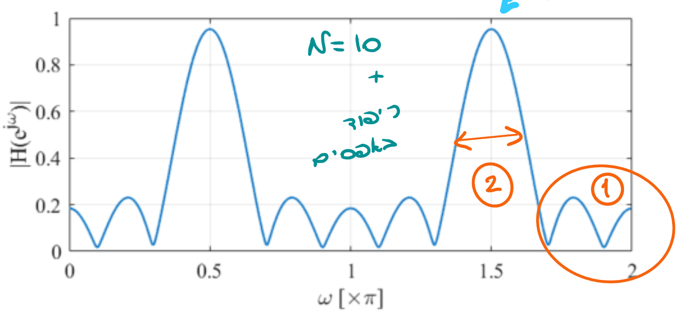
מספר דגימות כתדר N חדש

נרמול אמפליטודה

דוגמה נוספת

$x[n] = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$





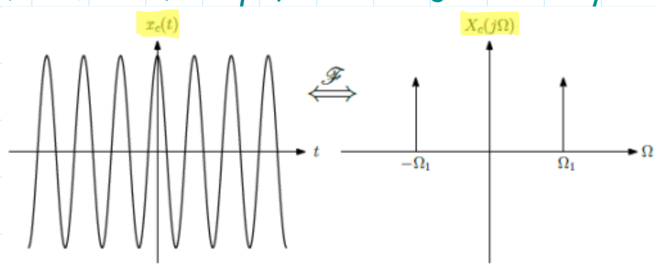
2 בעיות:
* גליות
* התרחבות

חלונות

תיאור מקור הבעיה לעיל יהיה בזמן רציף בגלל נוחות

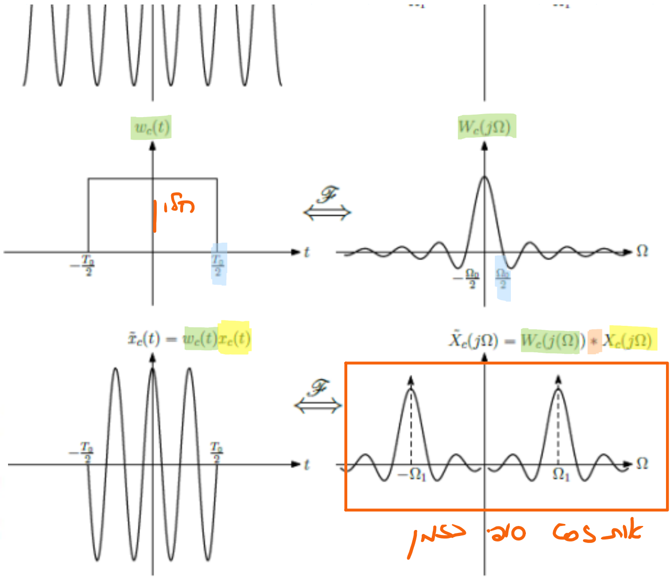
* עבור אות cos אינסופי.
בזמן

$$x_c(t) = A\cos(\Omega_1 t + \varphi)$$
$$= \frac{A}{2}e^{-j\Omega_1 t}e^{-j\varphi} + \frac{A}{2}e^{j\Omega_1 t}e^{j\varphi}$$



* אות סופי בזמן, פירושו הכפלה בחלון מלבני

$$w_c(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T_0/2, T_0/2] \\ 0 & t \notin [-T_0/2, T_0/2] \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} W_c(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T_0/2)}{\Omega/2}$$



* הכפלה בזמן ⟺ קונבולוציה בתדר

- אות מעשי הוא סופי בזמן ⇐ התוצאה היא הכפלה בחלון בזמן = קונבולוציה עם sinc בתדר.
- אות ארוך יותר בזמן ⇐ ה-sinc בתדר הוא צר יותר.
- מדובר במגבלה מובנת.

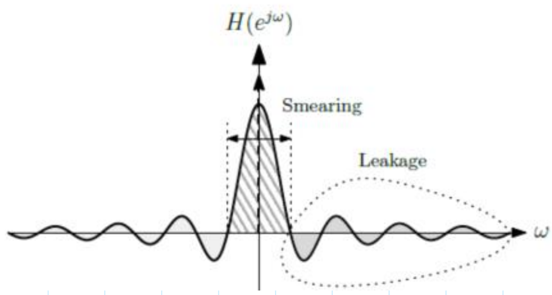
השפעה

א. דליפה ספקטרלית (spectral leakage) הגורמת להופעת תדרים "חדשים".

- בתאוריה, האות אמור להיות שווה ל-0 מחוץ לפיק המרכזי.
- בפועל ישנה גליות, דועכת או קבועה, בכל התדרים מחוץ לפיק המרכזי.

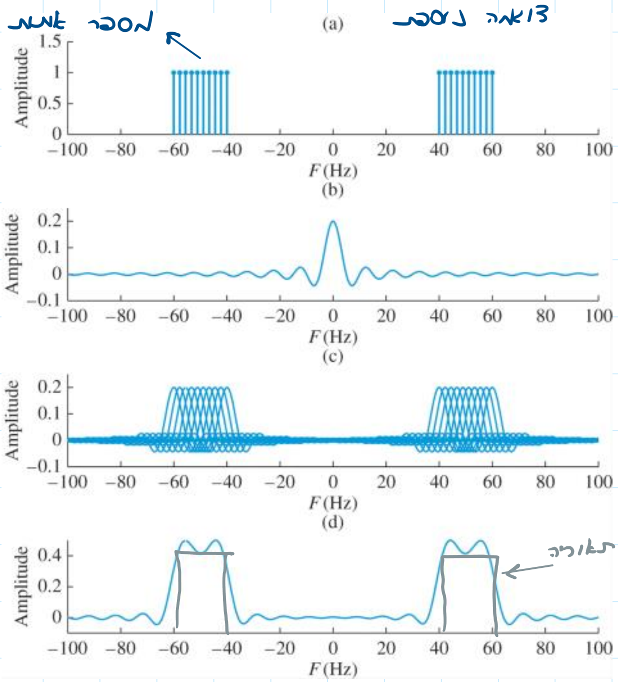
ב. התרחבות (smearing) ספקטראלית, הגורמת לפונציות דלתא להיות רחבות יותר.

- האות התאורטי הוא פונ' דלתא.
- בפועל מתקבל פיק ברוחב משמעותי.



דוגמה נוספת

מספר אותות cos במרווחים קטנים יחסית בתדר



← "חלון" בתדר

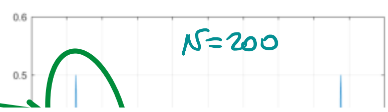
בתדר

← קונבולוציה של כל אחד מהאותות cos עם חלון

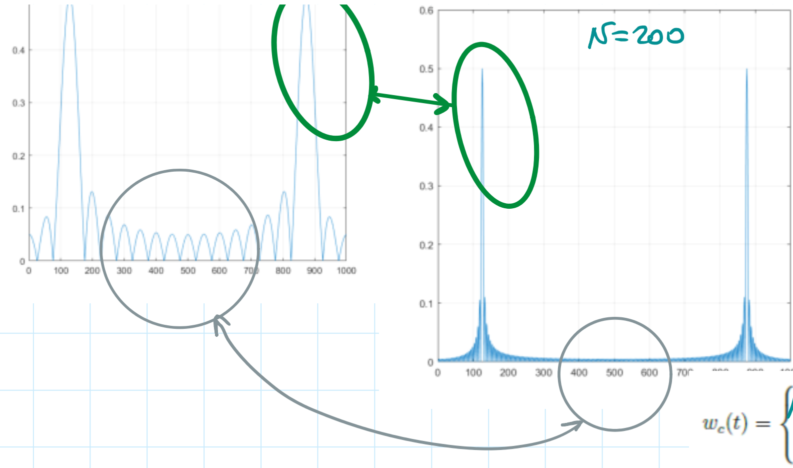
← סכימה של האותות cos אחרי קונבולוציה ביחד

התמודדות

1. הוספת דגימות במידת האפשר (הערה: לא תמיד אפשר)
(לפני ריפוד באפסים)



* דליפה לא נעלמת לגמרי.



* דליפה לא נעלמת לגמרי,
אבל נהיית יותר צפופה
מסביב לפיקים אמיתיים

גם התרחבות קשה

מקור לתופעה

רחב יותר בזמן ⟸⟹ צר יותר בתדר

$$w_c(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T_0/2, T_0/2] \\ 0 & t \notin [-T_0/2, T_0/2] \end{cases} \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} W_c(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T_0/2)}{\Omega/2}$$

אמפליטודת של sinc לא שינוי.

2. חלון לא מלבני

הקטנת דליפה על חשבון הגדלת מריחה פחות גליות בצדדים על חשבון רוחב פיקים

חלון מלבני: $n=0,\dots,N-1$ $w[n] = 1$ → "חיתוך" של N דגימות של האות

דוגמה: חלון Hann $w[n] = 0.5\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)\right]$

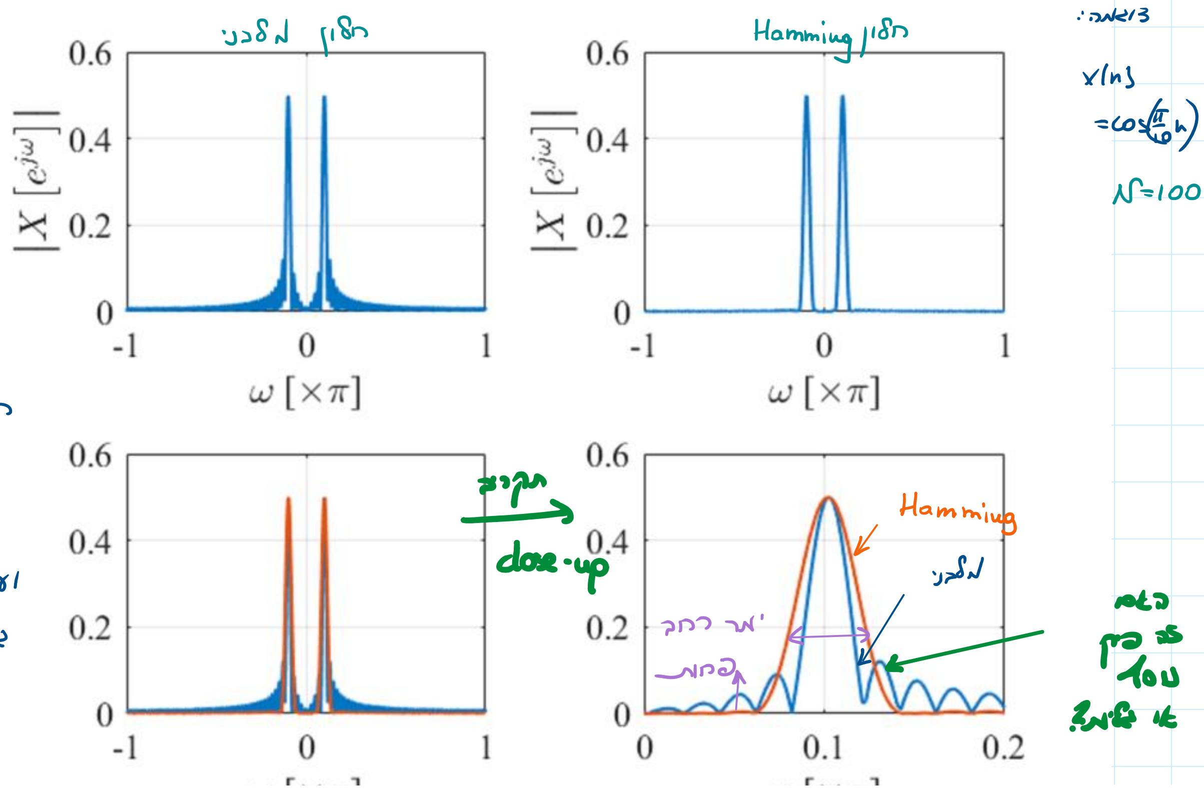
חלון Hamming $w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)$

הפעלה של חלון: $y[n] = x[n]w[n]$

$n=0,\dots,N-1$ $x[n]$ אם נתון (הוא כבר מוכפל בחלון מלבני באורך N)

* הכפלה בחלון היא רק עבור הניתוח במישור התדר

דוגמה:
$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$
$N=100$



חלון מלבני
הוא הכי "צר"
עבור הפיקים,
ועם הכי הרבה
גליות בצדדים.

לא שלמים?

```
N = 200;
n = 0:N-1;
x = cos(pi/4*n);
X = fft(x.*hamming(N)',1000)/N;
plot(abs(X))
grid on
```

חלון באורך N

אמפליטודה

כדי לשמור על תאימות של אמפליטודה לאחר הכפלה בחלון,

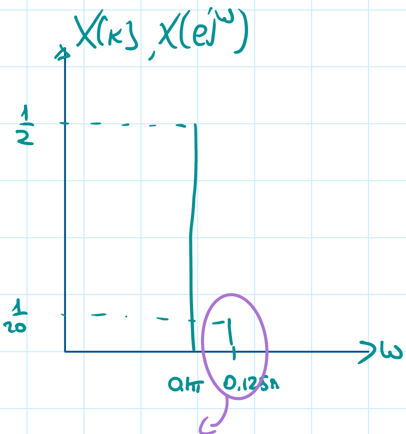
יש להכפיל את $X[k]$ במקדם $= \frac{N}{\sum w[n]}$

```
X = fft(x.*hamming(N)',1000)/sum(hamming(N));
```

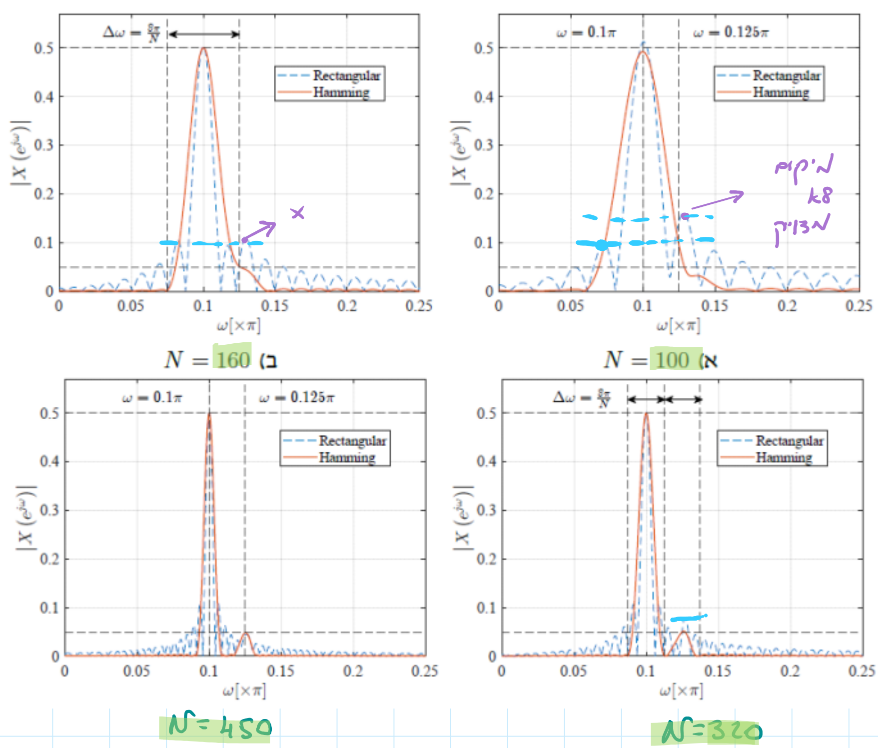
תיקון השפעת חלון על אמפליטודה

דוגמה.

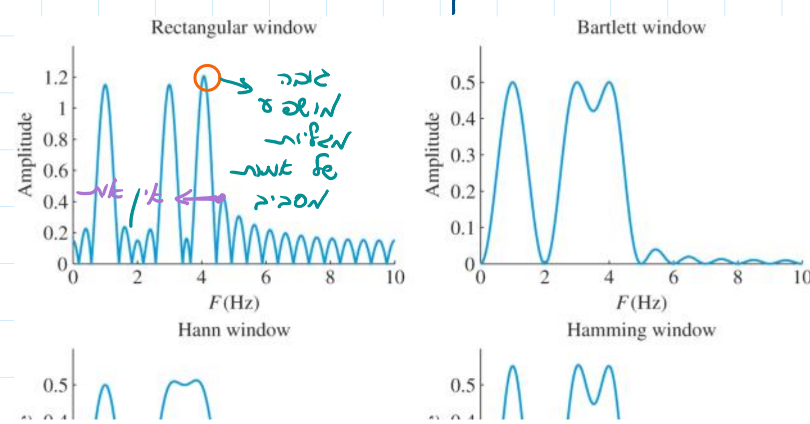
$$x[n] = \cos\left(\underset{0.1\pi}{\frac{\pi}{10}}n\right) + 0.1\cos\left(\underset{0.125\pi}{\frac{\pi}{8}}n\right), \quad n = 0, \ldots, N-1$$



עבור חלון מלבני לא ניתן לזיהוי במיוחד עבור N קטן יחסית



דוגמה נוספת: חלון מלבני + 3 סוגי חלונות לא מלבניים



עוד פעם: תעדוף של רוחב הפיקים מול זליגות

* אין צורך להשתמש ע"י סינון וכו'
* ישנם מקרים מיוחדים, בהם

* ישנם מקרים מיוחדים, בהם ניתן להשתפר ע"י מידע נוסף על האות