Lecture 4 (19)
Sunday, 13 November 2022 15:44

תכונות של מערכות

מבוסס של Z, DTFT

השהייה + קשר לפאזה

$x[n] = \cos(\omega_0 n)$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$H(z)$

$H(e^{j\omega})$

$$y[n] = \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}_{\text{תגובת אמפליטודה}} \cos\Big(\underbrace{\omega_0}_{\text{תדר ללא ש.מ.}} n + \underbrace{\angle H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\text{תגובת פאזה}}\Big)$$

דוגמה מספרית

$$h[n] = a^n u[n] \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}} = H\left(e^{j\omega_0}\right)$$

$a = 0.9$, $\omega_0 = 0,\ 0.05\pi,\ 0.1\pi$

* הגבר DC

$\omega_0 = 0 \rightarrow H\left(e^{j0}\right) = \frac{1}{1-0.9e^{j0}} = 10$ ($\omega_0 = 0$, $a = 0.9$)

כניסה $x[n] = 1 = \cos(0)$

מוצא $y[n] = 10$

*

$\omega_0 = 0.05\pi \rightarrow H\left(e^{j\omega_0}\right) = 5.576e^{-j0.9}$

$y[n] = 5.576\cos(0.05\pi n - 0.9)$

$= \underbrace{5.576}_{\text{משרעת}} \cos(\underbrace{0.05\pi}_{\text{אותו}} [n - \underbrace{5.75}_{\text{השה"ה}}])$

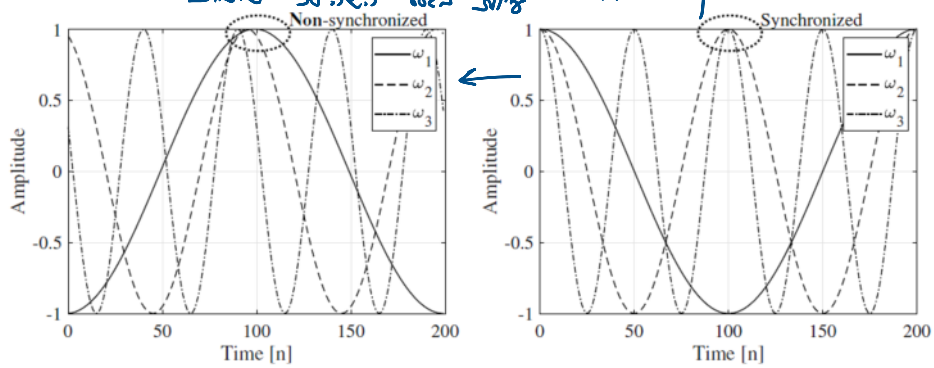
*

$\omega_0 = 0.1\pi \rightarrow y[n] = 3.19\cos(0.1\pi[n - 3.48])$

* השהייה לא חייבת להיות מספר שלם

* " תלויה בתדר עבור אותה מערכת

למה זה חשוב: עיוות בגלל (בצורה) השהיה שונות



סכום של 3 תדרים מסונכרנים בצורה

הגדרות:

השהייה (הגדרה 5.1): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$x[n] = v[n]\cos(\omega n)$$

ואות מוצא לאחר מעבר דרך מערכת LTI בעלת תגובת תדר $H\left(e^{j\omega}\right)$

$$y[n] = v[n - \tau_{gd}]\cos\left(\omega\left[n - \tau_{pd}\right]\right),$$

השהיית **פאזה** (phase delay) נתונה ע"י

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

והשהיית **חבורה** (group delay) נתונה ע"י

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H\left(e^{j\omega}\right).$$

פאזה לינארית

$\angle H(e^{j\omega}) = -a\omega(-b)$

$\tau_{gd}(\omega) = a = const \quad \forall\omega$

$\Leftarrow$ את לכל תדר יש לו אותה שה"ה

שאלה מתבקשת: איך מקבלים פאזה לינ'?

תשובה: * מערכת FIR (תגובה סופית להלם)

RoC $z \neq 0$

* סימטרית $\boxed{h[n] = 0 \quad n < 0}$

* $h[n] = \pm h[\alpha - n], \quad \alpha \in \mathbb{N}$

$\alpha > 0$

$+$ סימטרי זוגי

$-$ " אי-זוגי

α זוגי / אי-זוגי

סימטרי: $\alpha = 4$

$h[n] = h[4-n]$

$h[0] = h[4]$

$h[n=1] = h[3]$

אי זוגית " -

α זוגי / אי זוגי

סה"כ 4 אפשרויות

תזכורת

$$\boxed{\begin{aligned} e^{j\omega}+e^{-j\omega}&=2\cos(\omega)\\ e^{j\omega}-e^{-j\omega}&=2j\sin(\omega)\end{aligned}}$$

$h[n=1]=h[3]$

הגדרה - DTFT

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{4}h[k]e^{-jk\omega}=h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega}+h[3]e^{-j3\omega}+h[4]e^{-j4\omega}$$

$$=\underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{גורם משותף}}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}+h[2]+h[3]e^{-j\omega}+h[4]e^{-j2\omega}\right)$$

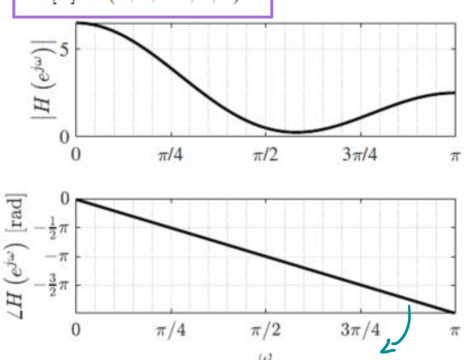
$$=e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}+h[2]+h[1]e^{-j\omega}+h[0]e^{-j2\omega}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left(2h[0]\cos(2\omega)+2h[1]\cos(\omega)+h[2]\right)=e^{-j2\omega}A(\omega)$$

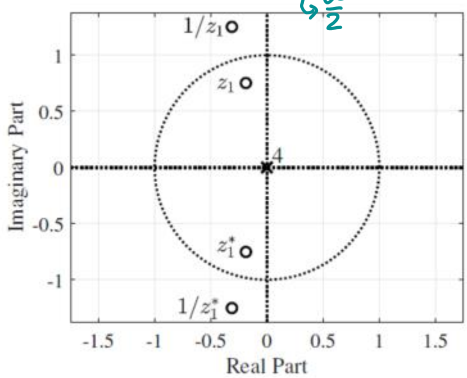
$$\measuredangle H(e^{j\omega})=-\underbrace{2}_{\alpha/2}\omega+\beta$$

$A(\omega)\in\mathbb{R}$ יכול להיות גם שלילי.

דוגמה: $h[n]=\{1,1,2.5,1,1\}$



* קו ליניארי



* קבוצה של 4 אפסים

$z_1,\ \frac{1}{z_1},\ z_1^*,\ 1/z_1^*$

← תמיד עבור פאזה ליניארית

$$H(e^{j\omega})=h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega}+h[3]e^{-j3\omega}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega}+h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega}+h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega}+h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega}+h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega}-h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega}-h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}j\left(2h[0]\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)+2h[1]\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)$$

דוגמה: סימטריה אי זוגית, $\alpha=3$

$h[0]=-h[3-0]=-h[3]$

$h[1]=-h[2]$

דוגמה: $h[n]=\{1,2,-2,-1\}$

$$\measuredangle H(e^{j\omega})=-\frac{3}{2}\omega+\frac{\pi}{2}+\beta$$

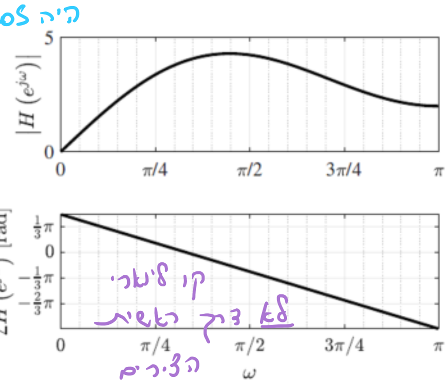
היה cos

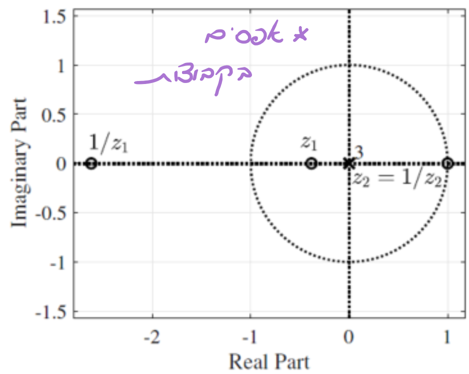
הערה:

$H(e^{j0})=0\ (=\sin(0))$

⇐ חוסם DC

לא אפשר לעצב LPF





סימטריה אי זוגית, $\alpha=4$ (sin)

$$H(e^{j\omega})=h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega}+h[3]e^{-j3\omega}+h[4]e^{-j4\omega}$$

$$=e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}+h[2]+h[3]e^{-j\omega}+h[4]e^{-j2\omega}\right)$$

$h[M-k]=-h[k]$

$h[M/2]=0$

$$j2\sin\phi=e^{j\phi}-e^{-j\phi}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}-h[1]e^{-j\omega}-h[0]e^{-j2\omega}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}j\left(2h[0]\sin2\omega+2h[1]\sin\omega\right)$$

$h[2]=-h[4-2]=-h[2]\Rightarrow h[2]=0$ אבר אמצעי

סימטריה זוגית, $\alpha=3$ (cos)

$$H(e^{j\omega})=h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega}+h[3]e^{-j3\omega}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega}+h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega}+h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega}+h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$h[M-k]=h[k]$

$$2\cos\phi=e^{j\phi}+e^{-j\phi}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega}+h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega}+h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega}+h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left[2h[0]\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right)+2h[1]\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right]$$

שאר המצגת באתר ← moodle

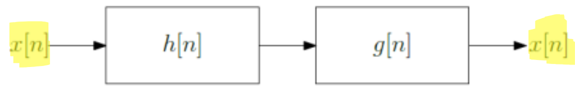
$h[2]=-h[4-2]=-h[2] \Rightarrow h[2]=0$ איבר אמצעי

משוב מצגת באתר moodle

מערכת הפיכה/הפוכה

$h[n]*g[n]=\delta[n]$

$H(z)G(z)=1$



השאלה המרכזית היא, האם קיימת מערכת $g[n]$, שהיא גם יציבה וסיבתית?
1) 2)

דוגמה 3.8: נתונים האותות

$h[n]=x_1[n]=(0.5)^n u[n]$

$g[n]=x_2[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-1]$

חשב $x_1[n]*x_2[n]$.

פתרון: התמרות הן

$$X_1(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}},\quad ROC=|z|>0.5$$

$$X_2(z)=1-0.5z^{-1},\quad ROC=z\neq 0$$

$$X_1(z)X_2(z)=1 \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \delta[n] \qquad RoC=\mathbb{C}$$

דגשים:

* אפסים ע"ג מעגל יחידה $H(e^{j\omega})=0$

תדר ω_0 באות מוכפל ב-0 ⇐ אי אפשר "לשחזר"

* $H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$ $H(z)$ יציב ⇐ קטבים (שורשים של $A(z)=0$) בתוך מעגל יחידה

$G(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$ קטבים של H הם אפסים של G
אפסים של H הם קטבים של G

⇐ כל הקטבים ואפסים של H בתוך מעגל יחידה

* $RoC_h \cap RoC_g \neq \varnothing$ ⇐ תנאי של תחומי התכנסות של H,G
חיתוך הוא לא קבוצה ריקה

מסננים מעבירי הכל (All-Pass)

הגדרה: $\left|H(e^{j\omega})\right|=1$

צורה בסיסית:

$$H(z)=z^{-1}\frac{1-az}{1-az^{-1}}=\frac{1\cdot z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega}\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega}-a}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$

$$=e^{-j\omega}\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\cdot e^{j\omega}\frac{1-ae^{-j\omega}}{1-ae^{j\omega}}=1=\left|H(e^{j\omega})\right|$$

$$\left|1-ae^{j\omega}\right|=\left|1-ae^{-j\omega}\right|$$

מקרה הכללי:

$$H(z)=\frac{z^{-N}+a_1z^{-N+1}+a_2z^{-N+2}+\ldots+a_N}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\ldots+a_Nz^{-N}}$$

סדר הפוך

$$=\frac{z^{-N}\left(1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_Nz^N\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\ldots+a_Nz^{-N}}=z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

חזקות הפוכות

קשר בין קטבים ואפסים (תכונה 5.6): אם p הוא קוטב של $H(z)$, הרי $\frac{1}{p}$ הוא אפס של $H(z)$.

⇐ אין מערכת הפוכה יציבה

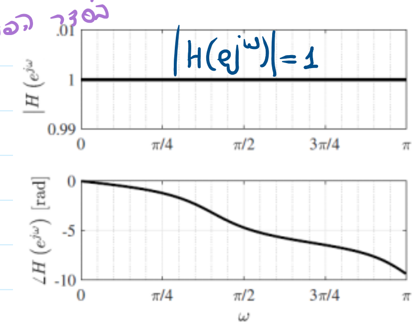
דוגמה מספרית:

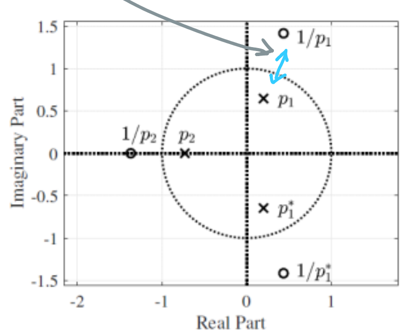
$$H(z)=z^{-3}\frac{3+z+\frac{1}{2}z^2+z^3}{3+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}}$$

חזקות הפוכות

$$=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}+3z^{-3}}{3+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}}$$

מקדמים בסדר הפוך





פאזה מינימלית

$$h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$
$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{z}$$
$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$
$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\cos(\omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\omega)\right)^2}$$
$$\angle H_1(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{2}\cos(\omega)}\right)$$
$$\tau_{gd}(\omega) = \frac{\frac{1}{2}+\cos(\omega)}{2\frac{1}{2}+2\cos(\omega)}$$

$z_0 = -\frac{1}{2}$

אפסים:

1 $1/z_0 = -2$

תגובת תדר

תגובת אמפליטודה
2 זהה

3 ההשהיה של מערכת 2 יותר גדולה
$<$
$\forall\omega$

$$h_2[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1]$$
$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = \frac{\frac{1}{2}z+1}{z}$$
$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + e^{-j\omega}$$
$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \left|H_1(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\omega)}$$
$$\angle H_2(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-\sin(\omega)}{\frac{1}{2}+\cos(\omega)}\right)$$
$$\tau_{gd}(\omega) = \frac{2+\cos(\omega)}{2\frac{1}{2}+2\cos(\omega)}$$

מגמה זהה, מופע שונה

פאזה מינימלית מינימום השהייה עבור אותה תגובת אמפליטודה

תנאי לפאזה מינימלית קטבים ואפסים כולם בתוך מעגל היחידה

יציבות
אין אחרת
תגובת פאזה

הפיכות (תכונה 5.9): מערכת סיבתית בעלת פאזה מינימלית היא הפיכה, בעלת מערכת הפוכה יציבה וסיבתית.

קשר בין פאזה מינימלית לבין מעביר-כל (תכונה 5.10): כל מערכת ניתן להציג כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass,

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z) \tag{5.19}$$

כל האפסים בתוך מעגל יחידה

הערה: פאזה מינימלית, כל אפסים בתוך מעגל יחידה. מערכת עם אחד האפסים שהוא $1/z_0$ היא בעלת אותה תגובת אמפליטודה והשהייה גבוהה יותר.

הערה 5.5 ! הוספת מערכת בתור (מערכת all-pass במקרה זה) יכולה רק להוסיף השהייה.

דוגמה 5.8: נניח שלמערכת $H(z)$ ישנו אפס מחוץ למעגל יחידה ב- $z = 1/a, |a| < 1$. ניתן להציג את המערכת ע"י

$\frac{1}{2}$-a

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - a), \tag{5.20}$$

כאשר $H_1(z)$ היא מערכת בעלת פאזה מינימלית. ניתן לשים לב, שבגלל מיקום האפס, למערכת $H(z)$ אין מערכת הפוכה יציבה.

יש להציג את המערכת כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass.

פתרון:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(z^{-1}-a) \\ &= H_1(z)(z^{-1}-a)\underbrace{\frac{1-az^{-1}}{1-az^{-1}}}_{=1} \\ &= \underbrace{H_1(z)(1-az^{-1})}_{\text{minimum phase}}\underbrace{\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}}_{\text{all-pass}} \end{aligned} \tag{5.21}$$

שינוי סדר

אפס ב-$1/a$
קוטב ב-a

אפס ב-a