Lecture 4 (16)

Sunday, 13 November 2022 15:44

תכונות המערכות

השהייה (במערכות LTI)

דוגמה לצורך המחשה

נתון אות כניסה

$x[n] = \cos(\omega_0 n)$ $\quad \omega_0 \in [0, \pi)$

מערכת:

$$h[n] = a^n u[n] \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \boxed{\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{תגובת תדר}}}$$

ω_0

את מוצא:

$$y[n] = \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}_{\text{תגובת אמפליטודה}} \cos\left(\underbrace{\omega_0 n}_{\text{תדר אלא שינוי}} + \underbrace{\angle H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\text{תגובת פאזה}}\right)$$

סיכום:

השהייה (הגדרה 5.1): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$x[n] = v[n] \cos(\omega_c n)$$

ואות מוצא לאחר מעבר דרך מערכת LTI בעלת תגובת תדר $H(e^{j\omega})$

$$y[n] = v[n - \tau_{gd}] \cos\left(\omega_c [n - \tau_{pd}]\right),$$

השהיית **פאזה** (phase delay) נתונה ע"י

$$\tau_{pd}(\omega_c) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

והשהיית **חבורה** (group delay) נתונה ע"י

$$\tau_{gd}(\omega_c) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega}).$$

$a = 0.9 \qquad \omega_0 = 0,\ 0.05\pi,\ 0.1\pi$ הצבת מספרים

DC:

$$\omega_0 = 0 \rightarrow H\left(e^{j0}\right) = \frac{1}{1 - 0.9e^{j0}} = 10$$

הצבה DC

$x[n] = 1$

$y[n] = 10$

תגי אמפליטודה

תגי פאזה

$$\omega_0 = 0.05\pi \rightarrow H\left(e^{j\omega_0}\right) = 5.576 e^{-j0.91}$$

$$y[n] = 5.576 \cos(0.05\pi n - 0.91)$$

$$= 5.576 \cos\left(\underbrace{0.05\pi}_{\omega_0 \text{ - גורם משותף}} \underbrace{[n - 5.75]}_{\text{השהייה}}\right)$$

$5.75 = \frac{0.91}{0.05\pi}$

* לא חייב להיות מספר שלם

* תלוי תדר

$$\omega_0 = 0.1\pi \rightarrow y[n] = 3.19 \cos(0.1\pi [n - 3.48])$$

קוד Matlab

abs(1/(1-0.9*exp(-j*0.05*pi))) → 5.5762

angle(1/(1-0.9*exp(-j*0.05*pi))) → 0.9028

```
>> angle(1/(1-0.9*exp(-j*0.05*pi)))

ans =

   -0.9028
```

פאזה לינארית

מצב מיוחד של השהיית חבורה

בלתי תלויים (= קבועה) בתדר

תנאי סימטריה

תנאי: $h[n] = \pm h[\alpha - n], \quad \alpha \in \mathbb{N}$

4 אפשרויות של סימטריה:

- $+$, α זוגי
- $-$, α זוגי
- $+$, α אי-זוגי
- $-$, α אי-זוגי

דוגמה: $h[n] = [h[0], h[1], h[2], h[3], h[4]]$ $\quad \alpha = 4$

סימטריה סביב +

$h[0] = h[4-0] = h[4]$

$h[1] = h[4-1] = h[3]$

$h[2] = h[2]$

חישוב DTFT ע"פ הגדרה

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{4} h[k]e^{-jk\omega} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega}$$

$$= \underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{גורם משותף}} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[3]e^{-j\omega} + h[4]e^{-j2\omega}\right)$$

$$= e^{-j2\omega} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[1]e^{-j\omega} + h[0]e^{-j2\omega}\right)$$

$$= e^{-j2\omega} \underbrace{\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2]\right)}_{\text{ביטוי ממשי}}$$

$$\boxed{2\cos\alpha = e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}$$

$\angle H(e^{j\omega}) = -2\omega$

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega} = 2 = \frac{\alpha}{2}$$

הערה: $H(e^{j\omega})$ לא באופן כללי

באופן כללי

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \underbrace{-2\omega}$$

בקצב ליניארי

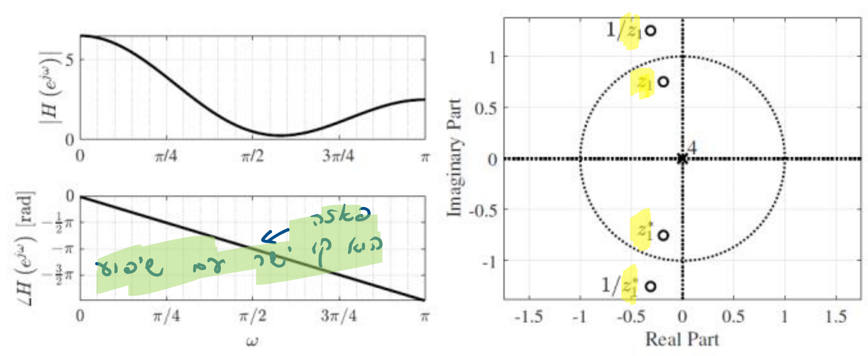
$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega} = 2 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H\left(e^{j\omega}\right) = 2 = \frac{\alpha}{2}$$

הערה: $H(e^{j\omega})$ לא יכול לאפס תדרים נמוכים

$\cos(0) = 1$

דוגמה למסנן בעל פאזה ליניארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 1, 2.5, 1, 1\}$ מפיעה באיור 5.1.



ב) תגובת אמפליטודה/פאזה   א) מפת קטבים ואפסים

→ אפסים באים בקבוצות של 4

דוגמה: $\alpha=3$ $\boxed{h[n] = -h[3-n]}$

⇐ 4 ערכים של תגובה להלם

$h[0]$ $h[1]$ $h[2]$ ($-h[1]$) $h[3]$ ($-h[0]$)

DTFT ע"פ הגדרה

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega}$$

גורם משותף

$$= \underbrace{e^{-j\frac{3}{2}\omega}}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} + h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

הצבה של סימטריה

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} - h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega} - h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

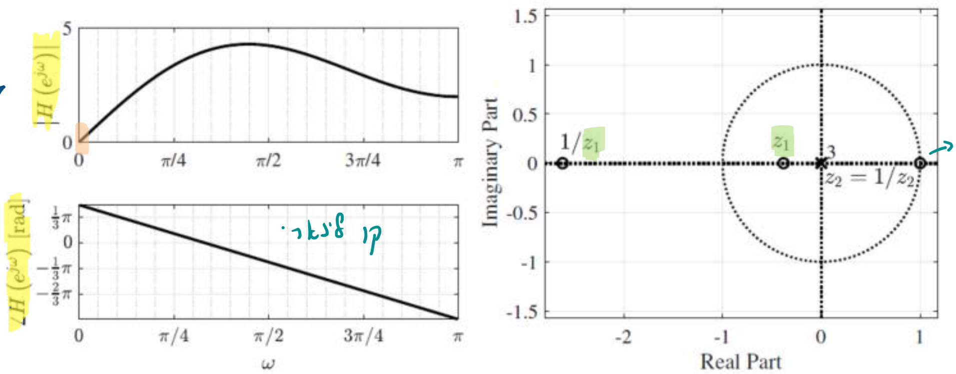
$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega} j\left(2h[0]\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h[1]\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right) \leftarrow \boxed{2\sin(\alpha) = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}$$

הערה: מדובר במערכת סיבתית — $h[n]=0$, $n<0$

מסתכלים רק על $n \geq 0$

דוגמה למסנן בעל פאזה ליניארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 2, -2, -1\}$ מפיעה באיור 5.2.

$H(e^{j\omega})$



ב) תגובת אמפליטודה/פאזה   א) מפת קטבים ואפסים

$\rightarrow \omega_0 = 0$

$\omega = 0 \Rightarrow \sin(0)=0$

לא יהיה LPF

= לא יכול להעביר תדרים נמוכים

הערה: סימטריה זוגית → cos (סימן +)

אי-זוגית → sin (סימן −)

דוגמה ראשונה α זוגי

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2]\right)$$

רכיב שלא מוכפל ב cos

דוגמה: סימטריה זוגית $\alpha=3$

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} + h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$h[M-k] = h[k]$

$2\cos\phi = e^{j\phi} + e^{-j\phi}$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} + h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left[2h[0]\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h[1]\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right]$$

רכיב שלא מוכפל ב cos

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left[2h[0]\cos\left(\tfrac{3}{2}\omega\right)+2h[1]\cos\left(\tfrac{1}{2}\omega\right)\right]$$

דוגמה: סימטריה אי זוגית, $\alpha=4$ (זוגי)

$$H(e^{j\omega}) = h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega}+h[3]e^{-j3\omega}+h[4]e^{-j4\omega}$$
$$= e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}+h[2]+h[3]e^{-j\omega}+h[4]e^{-j2\omega}\right)$$

$h[M-k]=-h[k]$

$h[M/2]=0$

$j2\sin\phi = e^{j\phi}-e^{-j\phi}$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega}+h[1]e^{j\omega}-h[1]e^{-j\omega}-h[0]e^{-j2\omega}\right)$$
$$= e^{-j2\omega}j\left(2h[0]\sin 2\omega+2h[1]\sin\omega\right)$$

$h[2]=-h[4-2]=-h[2] \Rightarrow h[2]=0$

עבור α זוגי וסימטריה אי זוגית איבר מרכזי חייב להיות 0

מערכת הפיכה/הפוכה

$x[n] \to \boxed{h[n]} \to \boxed{g[n]} \to x[n]$

האם קיימת מערכת $g[n]$, שהיא גם יציבה וסיבתית?

הגדרה:

$$h[n]*g[n]=\delta[n]$$

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow G(z)=\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1}{H(z)}$$

יחס של LTI

תחום ההתכנסות

$RoC_h \cap RoC_g \neq \varnothing$

חייב להיות תחום התכנסות משותף

תזכורת: קטבים = שורשים של $A(z)=0$

$H(z)$ יציבה = קטבים בתוך מעגל היחידה

* ⇐ קטבים של $H(z)$ ← אפסים של $G(z)$ בתוך מעגל היחידה
* $G(z)$ יציבה ⇐ קטבים בתוך מעגל היחידה ⇐ אפסים של $H(z)$ בתוך מעגל היחידה
* קיים ω עבורו $H(e^{j\omega})=0$ (אפס על מעגל היחידה) לא בתוך ⇐ אין מערכת הפוכה

סיכום:

* קטבים ואפסים בתוך מעגל היחידה
+ RoC משותף

דוגמה:

$$x_1[n]=(0.5)^n u[n]$$
$$x_2[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-1]$$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}},\quad ROC=|z|>0.5$$
$$X_2(z)=1-0.5z^{-1},\quad ROC=\mathbb{C}-\{0\}$$
$$X_1(z)X_2(z)=1 \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \delta[n]$$

כל המישור המרוכב פרט ל-0

$z\neq 0$

מסננים מעבירי הכל (All-Pass)

הגדרה: $\left|H(e^{j\omega})\right| = 1$

דוגמה: פונ׳ תמסורת:

$$H(z)=\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}=\frac{1-az}{z-a}$$

תגובת תדר

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}-a}{1-ae^{-j\omega}}$$

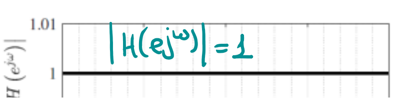
$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\cdot e^{+j\omega}\frac{1-ae^{-j\omega}}{1-ae^{j\omega}} = 1 = \left|H(e^{j\omega})\right|$$

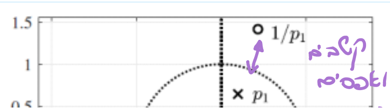
$$|1-ae^{j\omega}| = |1-ae^{-j\omega}|$$

סיכום:

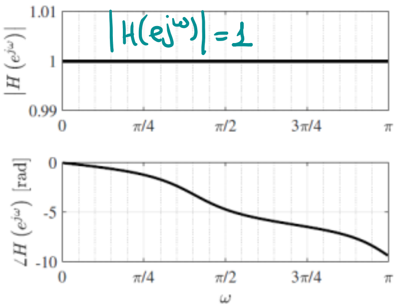
$$H(z)=\frac{z^{-N}+a_1z^{-N+1}+a_2z^{-N+2}+\ldots+a_N}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\ldots+a_Nz^{-N}}$$
$$=\frac{z^{-N}\left(1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_Nz^N\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\ldots+a_Nz^{-N}} = z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

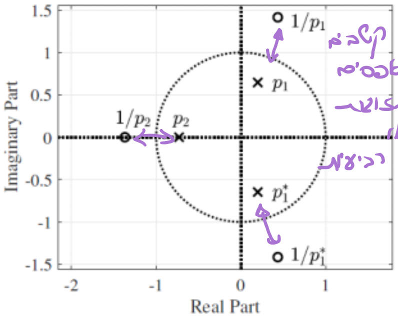
קשר בין קטבים ואפסים (תכונה 5.6): אם p הוא קוטב של $H(z)$, הרי $\frac{1}{p}$ הוא אפס של $H(z)$.





$$H(z)=z^{-3}\frac{3+z+\frac{1}{2}z^2+z^3}{3+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}}$$





קטבים ואפסים בצורה של רביעית

$$H(z) = z^{-3}\frac{3 + z + \frac{1}{2}z^2 + z^3}{3 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3}}{3 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}}$$

פאזה מינימלית

נתונות זוג מערכות עם אותה תגובת אמפליטודה.

מתקיים $\forall\omega$ $\tau_2(\omega) > \tau_1(\omega)$.

group delay

אפס מחוץ למעגל יחידה

אפס בתוך מעגל יחידה

$z_0 = -\frac{1}{2} \leftrightarrow z_0 = -2$

$z = e^{j\omega}$

$$h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$
$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z}$$
$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$
$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\omega)\right)^2}$$
$$\angle H_1(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)}\right)$$
$$\tau_{gd}(\omega) = \frac{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}{2\frac{1}{2} + 2\cos(\omega)}$$

$$h_2[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1]$$
$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = \frac{\frac{1}{2}z + 1}{z}$$
$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + e^{-j\omega}$$
$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \left|H_1(e^{j\omega})\right|$$
$$\angle H_2(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}\right)$$
$$\tau_{gd}(\omega) = \frac{2 + \cos(\omega)}{2\frac{1}{2} + 2\cos(\omega)}$$

השהיה גדולה יותר עבור כל ω.

$$\left|H_2(e^{j\omega})\right| = \left|H_1(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\omega)}$$

פאזה מינימלית (הגדרה 5.3): מערכת עם השהיית חבורה מינימלית מבין כל המערכות עם אותה תגובת אמפליטודה נקראת מערכת בעלת פאזה מינימלית.

תנאי לפאזה מינימלית (תכונה 5.8): עבור מערכת סיבתית בעלת פאזה מינימלית היא מערכת בעלת:

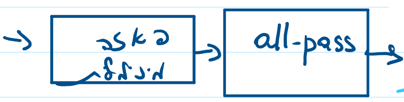
- כל הקטבים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה. מדובר בתנאי ליציבות (ראה תכונה 3.15).
- כל האפסים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה. התנאי מבטיח בין היתר, כי מערכת הפוכה תהיה יציבה, עם קטבים בתוך מעגל יחידה.

הפיכות (תכונה 5.9): מערכת סיבתית בעלת פאזה מינימלית היא הפיכה, בעלת מערכת הפוכה יציבה וסיבתית.

קשר בין פאזה מינימלית לבין מעביר-כל (תכונה 5.10): כל מערכת ניתן להציג כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass,

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z) \tag{5.19}$$

$H(z)$



פאזה מינימלית $|z_0|<1$

אפסים של $1/z_0$, כאשר

דוגמה 5.8: נניח שלמערכת $H(z)$ ישנו אפס מחוץ למעגל יחידה ב- $z_o = 1/a, |a| < 1$. ניתן להציג את המערכת ע"י

$$H(z) = \underline{H_1(z)}(z^{-1} - a), \tag{5.20}$$

כאשר $H_1(z)$ היא מערכת בעלת פאזה מינימלית ניתן לשים לב, שבגלל מיקום האפס, למערכת $H(z)$ אין מערכת הפוכה יציבה.

יש להציג את המערכת כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass.

פתרון:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(z^{-1} - a) \\ &= H_1(z)(z^{-1} - a)\Bigg(\underbrace{\frac{1 - \cancel{az^{-1}}}{1 - \cancel{az^{-1}}}}_{=1}\Bigg) \\ &= \underbrace{H_1(z)(1 - az^{-1})}_{\text{minimum phase}} \cdot \underbrace{\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}}_{\text{all-pass}} \end{aligned} \tag{5.21}$$

אפס ב-a

עבור allpass

$z_0 = \frac{1}{a}$ אפס

$z_p = a$ קוטב

$|H(e^{j\omega})|$ אותה תגובת אמפליטודה

לסיכום, בנינו מערכת "תחליפית" למערכת $H(z)$ המקורית מהצורה $H_1(z)(1 - az^{-1})$, בעלת תגובת אמפליטודה זהה למערכת המקורית, ובעל מערכת הפוכה יציבה וסיבתית.