Lecture 3 (19)

Sunday, 6 November 2022 16:05

התמרת Z הפוכה

מרוכב ממשי

הרצאה קודמת $x[n] \rightarrow X(z)$

היום $X(z) \rightarrow x[n]$

הגדרה: $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$

ההתמרה ההפוכה (הגדרה 3.8): מוגדרת כדלקמן:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

לא נוח לשימוש

כאשר מסלול האינטגרציה כלשהו מוכל בתחום ההתכנסות.

שיטות שימושיות כן

שימוש בתכונות וההתמרות המוכרות, ופירוק בשברים חלקיים.

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

1) שברים חלקיים

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

2) טבלה + תכונות

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > a$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < a$

(א) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ טבעת $\Leftarrow$ לא סיבתי

(ב) $\frac{1}{3} < |z|$ מחוץ למעגל $\Leftarrow$ סיבתי

(א) $p = \frac{1}{3}$ $p = \frac{1}{4}$ קוטב תמיד מחוץ ל-ROC

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z| < \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} < |z|$

$$x[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}_{\text{סיבתי}} - \underbrace{2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]}_{\text{אנטי-סיבתי}} \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow}$$

(ב) $\frac{1}{3} < |z|$ מחוץ לקוטב הגדול ביותר

$$x[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) u[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow}$$

1) שברים חלקיים

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$A_1, A_2 = ?$

שיטה א' ("הנדסה")

$$A_1 = \underbrace{X(z)}\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_1} = \frac{\left(3 - \frac{5}{6}z^{-1}\right)\cancel{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1/4} = 1$$

קוטב p_1 של $X(z)$

$$= \frac{3 - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{3}\cdot 4}$$

$$A_2 = X(z)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_2} = 2$$

שיטה ב' (ישרה)

חישוב מונה

$$A_1\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) + A_2\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) = 3 - \frac{5}{6}z^{-1}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -\frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{4}A_2 = -\frac{5}{6} \quad (z^{-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 = 1 \\ A_2 = 2 \end{matrix}$$

דוגמה 3.9: נתונים האותות (הרצאה קודמת)

אות א' $x_1[n] = u[n]$

אות ב' $x_2[n] = a^n u[n]$

חשב $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

פתרון: התמרות הן

$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$

דוגמה פירוק לשברים חלקיים

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$= \left[\frac{A_1}{1 - z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - az^{-1}}\right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1)$$

$$A_1 = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - az^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - a}$$

פתרון: התמרות הן

$$X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} = \left[\frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-az^{-1}}\right]$$

$$A_1 = Y(z)\left(1-z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-az^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = Y(z)\left(1-az^{-1}\right)\Big|_{z=a} = \frac{1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{a-1}$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - a\frac{1}{1-az^{-1}}\right] \leftarrow$$ לפי טבלה

$$x_1[n] * x_2[n] = \frac{1}{1-a}\left[u[n] - a\left(a^n u[n]\right)\right]$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]$$

התמרת פורייה בזמן בדיד

Discrete Time Fourier Transform

DTFT

תזכורת קצרה:

$x(t)$ זמן רציף $\xleftrightarrow{F}$ $X(j\Omega)$, $\Omega = 2\pi F$ תדירות זוויתית $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ מקרה פרטי של התמרת Laplace

תדר רציף במימדים [Hz]

אותות ומערכות

$X_s(j\Omega)$ התמרה של אות דגום בזמן רציף

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$x[n] = x(nT)$ זמן בדיד $\xleftrightarrow{DTFT}$ $X(e^{j\omega})$, ω [rad] תדירות זוויתית

מקרה פרטי של התמרת $\mathcal{Z}$

<u>תדר ω</u>

משפט Nyquist עבור $\underbrace{F_s = \frac{1}{T}}_{\text{תדר דגימה}}$ מקבלים תדרים בתחום $\left(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right)$

דוגמה עבור אות cos

$$x[n] = \cos(2\pi F_0 t) \rightarrow x[n] = x(nT) = \cos(2\pi F_0 T n)$$
$$= \cos(\omega_0 n)$$

$$\boxed{\omega = \Omega T = 2\pi F T}$$

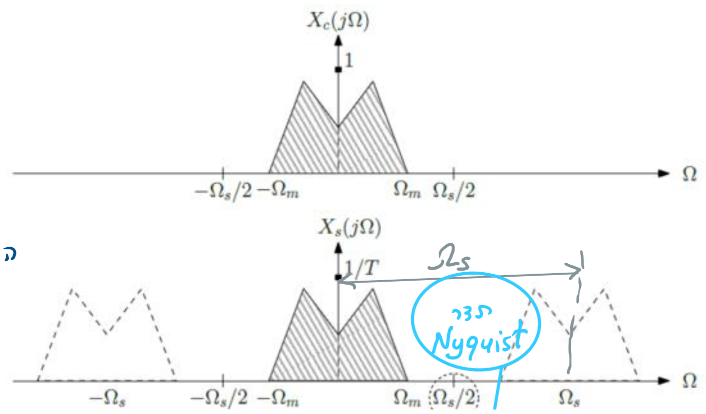
עבור אות בזמן בדיד

זמן בדיד הוא ללא יחידות

$\Leftarrow$ ω תמיד בתחום קבוע

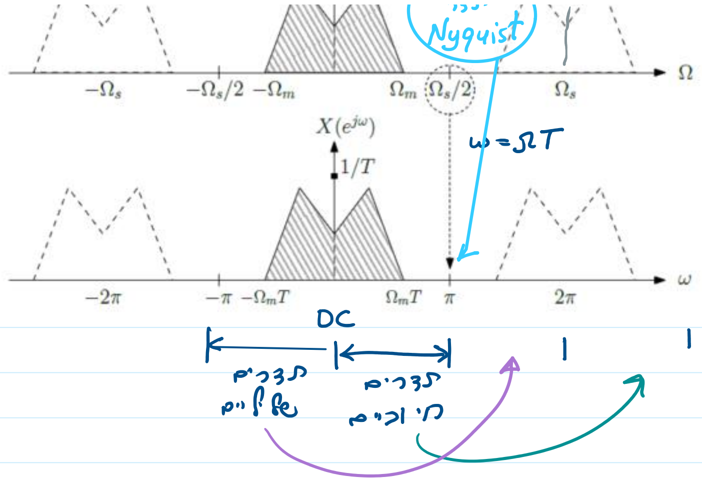
התמרת Fourier של אות מקורי

התמרת Fourier של אות דגום בזמן רציף



התמרת DTFT של אות בזמן בדיד

ציר התדר קבוע = בלתי תלוי בתדר "מקורי"



4.3 הגדרה

התמרת DTFT (הגדרה 4.4): נתון אות בדיד $x[n]$, עבורו מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$.
התמרת DTFT מוגדרת ע"י

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \tag{4.11}$$

הביטוי $X(e^{j\omega})$ נקרא גם תגובת תדר.

דרך א': חישוב $H(z)$ והצבה של $z = e^{j\omega}$

דרך ב': סכום ע"פ הגדרה

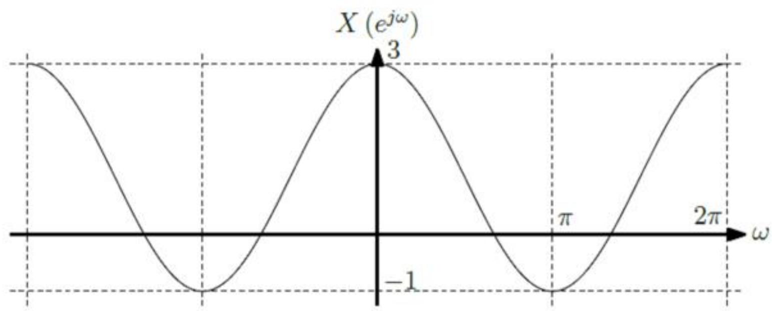
דוגמה 4.2: מצא התמרת DTFT של האות $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$.

$= \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$

פתרון: בהתאם להגדרה,

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = 1 + 2\cos(\omega).$$

$$e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos(\omega)$$



איור 4.4: שרטוט של $X(e^{j\omega})$.

מחזוריות (תכונה 4.2): בניגוד להתמרת פורייה בזמן רציף, ה-DTFT תמיד תהיה מחזורית במחזור 2π:

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\omega+2\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) \tag{4.15}$$

כלומר, מספיק לשרטט את ה-DTFT במרווח בגודל 2π בלבד.

עבור אות ממשי $|X(e^{j\omega})|$ בעל סימטריה זוגית
ואז מסתפקים במרווח $[0,\pi]$ בגרפים