התמרת Z הפוכה

תזכורת: $X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$ $\qquad$ $x[n]$ ממשי $\leftrightarrow$ $X(z)$ מרוכב

שימושים: * חישוב מוצא של מערכת
* משוואת הפרשים

מטרה: $X(z) \rightarrow x[n]$

ההתמרה ההפוכה (הגדרה 3.8): מוגדרת כדלקמן:

הגדרה

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz,$$

כאשר מסלול האינטגרציה כלשהו מוכל בתחום ההתכנסות.

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > a$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < a$

שיטה בפועל: טבלאות ושברים חלקיים

דוגמה:

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \leftrightarrow \text{טבלה}$$

נפתור עבור 2 תחומי התכנסות

(א) $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$

(ב) $\frac{1}{3}<|z|$

א) ציור ע"פ → $\frac{1}{4}<|z|$ תחום $|z|<\frac{1}{3}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

הקוטב, שלא כלול בתחום ההתכנסות

ב) $\underline{\frac{1}{3}<|z|}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n]=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n] \leftarrow \text{סיבתי}$$

אם המערכת סיבתית, $n<0, h[n]=0$

חוצה מהקוטב ← סיבתית

תחום התכנסות פנימה מהקוטב ← אנטי-סיבתי

גם וגם ⇓ לא סיבתית

RoC בצורת טבעת

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

שברים חלקיים

הסבר לדוגמה: $X(z)=\frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

מטרה: למצוא A_1, A_2

דרך א': $A_1\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)+A_2\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)=3-\frac{5}{6}z^{-1} \Leftarrow$ 2 משוואות ב-2 נעלמים

$$A_1=X(z)\boxed{\left(1-p_1z^{-1}\right)}\Big|_{z=p_1}=\frac{\left(3-\frac{5}{6}z^{-1}\right)\boxed{\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1/4}=1=\frac{3-\frac{5}{6}\cdot 4}{1-\frac{1}{3}\cdot 4}$$

מטרה: לצמצם את הקוטב

קוטב שמצמצם

$z=\frac{1}{4} \Rightarrow z^{-1}=4$

דרך ב':
ישנם 2 קטבים:
$P_1=\frac{1}{4}$
$P_2=\frac{1}{3}$

$X(p_i)\rightarrow\infty$

$$A_2=X(z)\left(1-p_2z^{-1}\right)\Big|_{z=p_2=\frac{1}{3}}=2$$

דוגמה 3.9: נתונים האותות

דוגמה:

$$A_2 = X(z)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_2=\frac{1}{3}} = 2$$

דוגמה 3.9: נתונים האותות

$$x_1[n] = u[n]$$
$$x_2[n] = a^n u[n]$$

זוג אמות אינסופיים

חשב $x_1[n] * x_2[n]$.

פתרון: התמרות הן

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$
$$X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

התמרה ישירה

$$X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow$$

מה: התמרה הפוכה

דוגמה:

פתרון עמ' 44

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}}$$
$$= \left[\frac{A_1}{1 - z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - az^{-1}}\right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1)$$

?

$$A_1 = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - az^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - a}$$
$$A_2 = Y(z)\left(1 - az^{-1}\right)\Big|_{z=a} = \frac{1}{1 - a^{-1}} = \frac{a}{a - 1}$$

התמרת פורייה בזמן בדיד

Discrete-Time Fourier Transform.

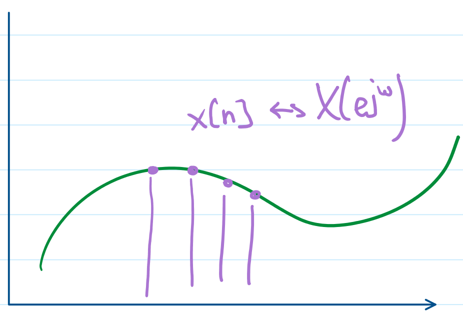
DTFT

אומגה גדול

$\Omega\left[\frac{rad}{sec}\right]$ - תדירות זוויתית בזמן רציף

אומגה קטן

$\omega\,[rad]$ - " " " בדיד



$x(t) \leftrightarrow F(j\Omega)$

מקרה פרטי של התמרת Laplase

מטרות:

1. להגדיר מקבילה של התמרת Fourier בזמן בדיד.

2. קשר בין התמרה בזמן בדיד לזמן רציף

הגדרה:

$$DTFT\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$= X(\underbrace{z = e^{j\omega}}_{})$$

מעגל ברדיוס 1 במישור Z ⇒ מעגל ברדיוס 1 חייב להיות בתחום התכנסות

הערות: התמרת פוריה בזמן רציף = מקרה פרטי של התמרת Laplase (ציר מדומה)

⇐ התמרת DTFT היא מקרה פרטי של התמרת Z ע"ג מעגל ברדיוס 1

הביטוי $X(e^{j\omega})$ נקרא גם **תגובת תדר**.

$x[n] = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$

דוגמה 4.2: מצא התמרת DTFT של האות $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$

פתרון: בהתאם להגדרה,

דרך א': ע"פ הגדרה

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = 1 + 2\cos(\omega).$$

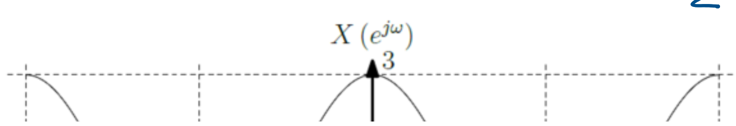
$$2 \cdot \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

דרך ב': דרך מישור Z והצבה של $z = e^{j\omega}$

$$H(z) = z^{-1} + 1 + z$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}}$$

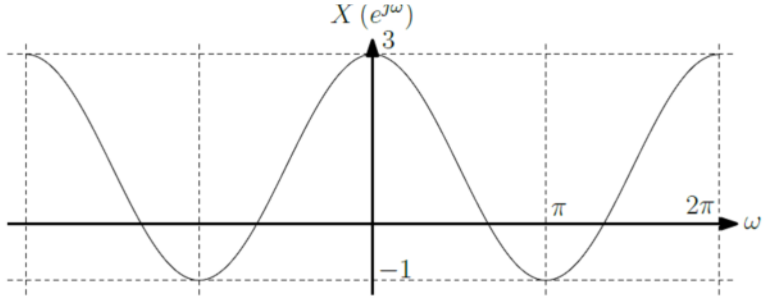


$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}}$$

בדגשים: התמרה מחזורית ב-2π

$\Updownarrow$

$e^{j\omega}$ מחזורי ב-2π



איור 4.4: שרטוט של $X(e^{j\omega})$.

תדר (תדירות)

תדרים (תכונה 4.1): מערכת דיגיטלית "רואה" רק את התדרים בין 0 לבין $\pm F_s/2$, כאשר

$$F_s = \frac{1}{T}$$

מכונה: Nyquist

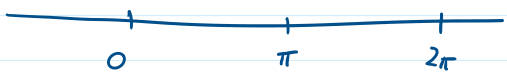
T - זמן דגימה

$F\,[Hz]$ - תדר בזמן רציף

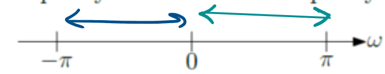
$F_s\,[Hz]$ - תדר דגימה

$$\underbrace{(-F_s/2,\ F_s/2)}$$

תחום תדרים לפי Nyquist



זמן בדיד:



מהו הקשר בין ω ל-Ω

תדר Nyquist

התמרה פוריה של האות בזמן רציף ←

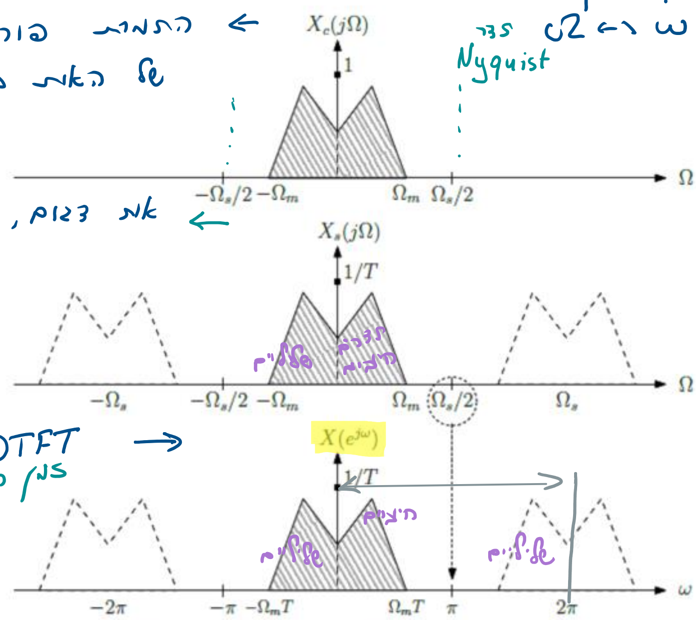
רכבת הלמים את מקורי:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

(עותקים בתדר במרווחים של Ω_s)

את דגום, התמרה פוריה בזמן רציף ←

DTFT → זמן רציף



איור 4.3: קשר בין $X_c(j\Omega)$ לבין $X_s(j\Omega)$ לבין $X(e^{j\omega})$.

קשר בין זמן רציף לזמן בדיד (תדרים !!!)

$$\boxed{\omega = \Omega T}$$

דוגמה: $x(t) = \cos(2\pi F_0 t)$ $\quad F_0 < \frac{F_s}{2}$

$$x[n] = x(nT) = \cos(\underbrace{2\pi F_0}_{\Omega_0} T n)$$

$T = \frac{1}{F_s}$ $\qquad \omega_0 = \Omega_0 T$

$$= \cos(\underbrace{\omega_0 n})$$

זמן בדיד

$$\overset{1}{\cancel{\pi}} = \Omega T = 2\cancel{\pi} F T \Rightarrow F = \frac{1}{2T} = \frac{F_s}{2}$$

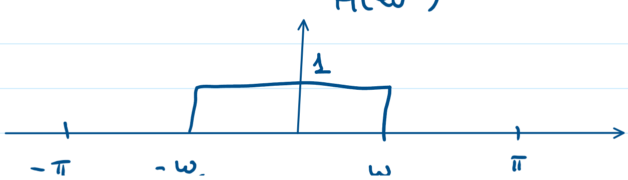
התמרת DTFT הפוכה (הגדרה 4.5): ה-DTFT ההפוכה מוגדרת כדלקמן:

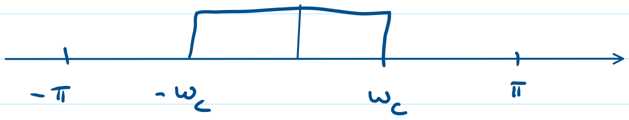
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega.$$

דוגמה 4.3: מהי התגובה להלם של המערכת בעלת תגובת תדר

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad ?$$

$H(e^{j\omega})$

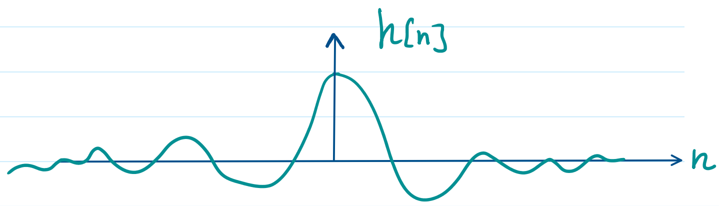




[illegible]

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad ?$$

על פי הגדרתה של ה-DTFT ההפוכה:



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega}d\omega$$
$$= \frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right] = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n}$$

מסנן אידיאלי הוא לא סיבתי ואינסופי בזמן

אנרגיה סופית

$.\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] < \infty, \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n] < \infty}, \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \to \infty}_{\text{BIBO לא יציב}}$

תכונות

הערה: חלק מהתכונות הם נובעות מתכונות של התמרת Z

מחזוריות (תכונה 4.2): בניגוד להתמרת פורייה בזמן רציף, ה-DTFT תמיד תהיה מחזורית במחזור 2π:

מבחינה פיזיקלית יש להסתכל על תחום של 2π בלבד

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\omega+2\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) \quad (4.15)$$

ממשיות

האות	ה-DTFT
האות: ממשי, זוגי	התמרה: ממשית, זוגית
ממשי, אי-זוגי	מדומה, אי-זוגית

הזזה בזמן (תכונה 4.4): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$\text{DTFT}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

הזזה בתדר (תכונה 4.5): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$\text{DTFT}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

קונבולוציה

$$\text{DTFT}\{h[n]*x[n]\} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

מכפלה בזמן (תכונה 4.7): התמרת DTFT של $x[n]y[n]$ היא:

$$\text{DTFT}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

סוג של קונבולוציה בתדר (קונבולוציה ציקלית)

דוגמה 4.4: נתונים זוג אותות $x[n] = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}, y[n] = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, -1\}$. חשב $x[n]*y[n]$.

פתרון: בהתבסס על הקשר להלן,

$$X(e^{j\omega}) = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} = 1 + 2\cos(\omega) = \text{DTFT}\{x[n]\}$$
$$Y(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} = 1 - 2\cos(\omega) = \text{DTFT}\{y[n]\}$$
$$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = 1 - 4\cos^2(\omega) = 1 - 4\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega)) = -1 - 2\cos(2\omega)$$
$$= -e^{j2\omega} - 1 - e^{-j2\omega}$$
$$\Rightarrow x[n]*y[n] = \{-1, 0, \underset{\uparrow}{-1}, 0, -1\}$$

← התמרה הפוכה ע"י זהויות טריגונומטריות

משפט פרסבל (Parseval) (תכונה 4.8): משפט פרסבל מתאר את שימור אנרגיה (הגדרה 2.17) במישור הזמן ומישור התדר.

הערה: אנרגיה סופית ⇐ לא נובע אות יציב (ראו דוגמה של מסנן אידיאלי LPF)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \quad (4.21)$$

תגובת אמפליטודה/פאזה (הגדרה 4.6): נגדיר תגובת אמפליטודה ע"י ערך מוחלט של התמרה, $|H(e^{j\omega})|$, ותגובת פאזה בהתאם ע"י

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}}\right) \quad (4.23)$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}}\right) \tag{4.23}$$

פוקציית תמסורת, תגובת תדר, תגובת אמפליטודה ותגובת פאזה

$H(z)$ $\quad H(e^{j\omega})$ $\quad |H(e^{j\omega})|$ $\quad \measuredangle H(e^{j\omega})$

דוגמה: $|\alpha|<1, h[n]=\alpha^n u[n]$

פתרון:

פונ' תמסורת $H(z)=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad |z|>|\alpha|$

תגובת תדר $H\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

עבור תגובת פאזה

פירוק $e^{j\omega}$

הכפלה בצמוד

$$\boxed{\begin{aligned}
&=\frac{1}{1-\alpha\cos(\omega)+j\alpha\sin(\omega)}\\
&=\frac{1}{[1-\alpha\cos(\omega)]+j\alpha\sin(\omega)}\cdot\frac{[1-\alpha\cos(\omega)]-j\alpha\sin(\omega)}{[1-\alpha\cos(\omega)]-j\alpha\sin(\omega)}\\
&=\underbrace{\frac{1-\alpha\cos(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}+j\underbrace{\frac{-\alpha\sin(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}
\end{aligned}}$$

תגובת פאזה

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}\right)=-\arctan\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos(\omega)}\right)$$

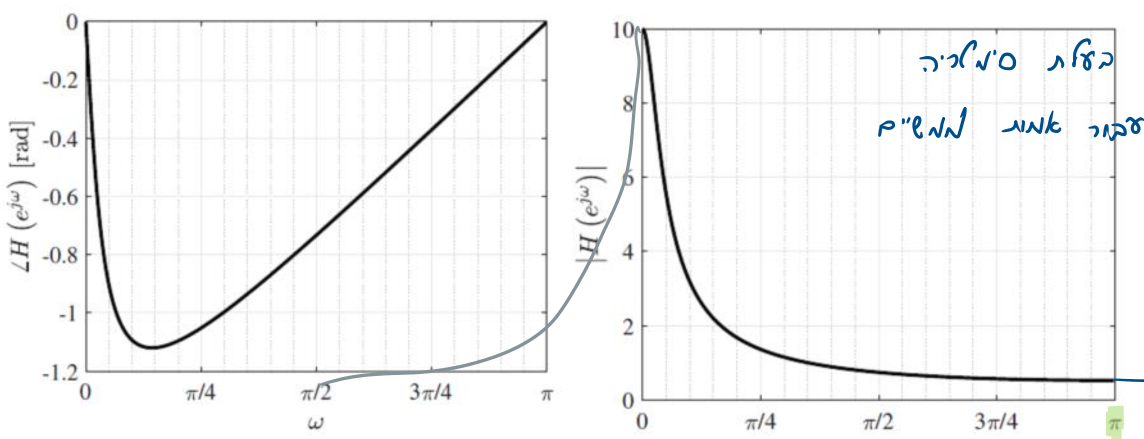
תגובת אמפליטודה

$$\begin{aligned}
\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|&=\sqrt{H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)\left(1-\alpha e^{j\omega}\right)}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}\\
&=\sqrt{\mathrm{Re}^2\{H\}+\mathrm{Im}^2\{H\}}
\end{aligned}$$

$x=a+jb$

$|x|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{x\cdot x^*}=\sqrt{|x|^2}$

$\alpha=0.9$



ב) תגובת פאזה

א) תגובת אמפליטודה

$|H(e^{j\omega})|$ בעלת סימטריה זוגית עבור אמות ממשיים

המשך סימטרי

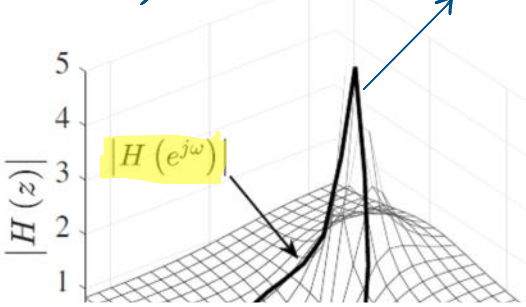
2π

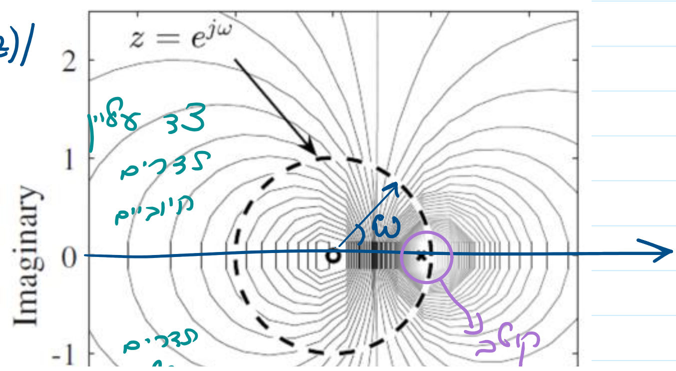
קשר בין z ל ω על בסיס מעגל

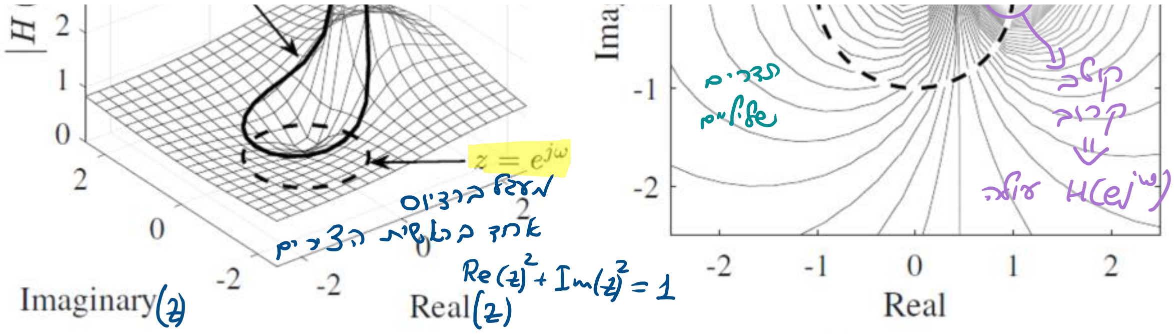
\# $|H(z)|$ כגרף 3D

$H(z)=H(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))$

ערכים של $|H(z)|$ על המעגל



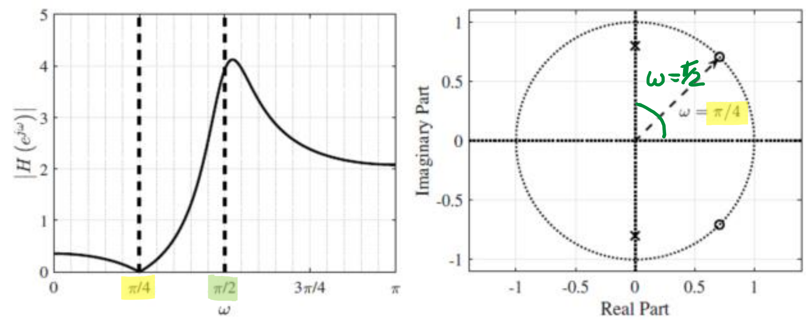




ב)

א) מבט מלמעלה

דוגמה:



א) מפת קטבים ואפסים

ב) תגובת תדר

1. הוספת אפס במפת $H(z)$ גורר את הפחתת הספקטרום בסביבתו.
2. הוספת קוטב במפת $H(z)$ גורר את הגברת הספקטרום בסביבתו.