Z tranform – מקבילה של התמרת Laplace עבור זמן בדיד

* פתרון של משוואות דיפרנציאליות
* חישוב קונבולוציה (קונבולוציה בזמן ← מכפלה בתדר)

דוגמה (ללא פתרון בשלב זה)

תגובה להלם $h[n]=a^n u[n]$ ⇐ פונ' תמסורת

משוואת הפרשים (מקבילה של משוואה דיפרנציאלית) $y[n]=ay[n-1]+x[n]$ ⇔ $y[n]=h[n]*x[n]$

המעבר ע"י התמרת Z

3.2 הגדרה

התמרת Z (הגדרה 3.1): יהי $x[n]$ אות בדיד כלשהו. התמרת Z של האות $x[n]$, אשר מסומנת ב-$X(z)$ מוגדרת כדלהלן:

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \qquad (3.1)$$

כאשר $z\in\mathbb{C}$ (מספר מרוכב כלשהו).

דוגמה:

$x[n]=\{x[0],x[1],x[2],x[3]\}$ אפסים

$X(z)=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}$

$X(z)\xleftrightarrow{\mathscr{Z}} x[n]$ או $X(z)=\mathscr{Z}\{x[n]\}$

אות בדיד

דוגמה:

$$x[n]=\{1,1,1,1\}=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{3}z^{-k}$$

(2) $=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$

(3) $=\dfrac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}$ סכום סדרה הנדסית

תזכורת

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}r^n=\frac{1-r^N}{1-r}}$$

$r=z^{-1}$

הערות:

* $z=1$ $X(1)=4$

תזכורת: $z^4=1$ ← יש 4 שורשים

$$X(z)=\frac{z^4-1}{z^3(z-1)}=\frac{\cancel{(z-1)}(z+1)(z+j)(z-j)}{z^3\cancel{(z-1)}}=\frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3}$$

* $z=0$ $X(0)\to\infty$

תחום ההתכנסות של ההתמרה $z\neq 0$

תחום ההתכנסות, ROC=Region of Convergence

תחום ההתכנסות של התמרת Z

דוגמה: $x[n]=a^n u[n]$

חישוב התמרה:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k=\frac{1}{1-az^{-1}},$$

$$=\frac{z}{z-a}$$

תזכורת

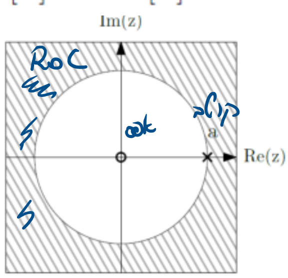
$r=az^{-1}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r} \quad |r|<1}$$

$ROC_X=|z|>|a|$

אפס $z=0$

קוטב $z=a$



א) $|z|>|a|$

אפסים (הגדרה 3.3): נקודה z_0, כך ש-$X(z_0)=0$ נקראת **אפס** (zero), ומסומנת במישור Z ב-○.

קטבים (הגדרה 3.4): נקודה z_0, כך ש-$\lim_{z\to z_0}X(z)=\infty$ נקראת **קוטב** (pole), ומסומנת במישור Z ב-×.

קטבים (הגדרה 3.4): נקודה z_0, כך ש- $\lim_{z\to z_0} X(z)=\infty$ נקראת **קוטב** (pole), ומסומנת במישור Z ב- ×.

דוגמה: $y[n]=-a^n u[-n-1]$ $= \begin{cases} -a^n & n<0 \\ 0 & n\geq 0 \end{cases}$

$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k z^{-k}$$

שינוי משתנה סכימה (בדומה למשתנה אינטגרציה)

$$\overset{m=-k}{=} -\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^{m} \quad (2)$$

$(\ )^m$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^m \quad (3)$$

מוסיף ומחסיר 1: $=1-\left(1-\overbrace{\sum_{m=1}^{\infty}}^{\sum_{m=0}}\right)$

$$= 1-\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^m \quad (4)$$

$r=a^{-1}z$

סכום סדרה הנדסית אינסופית

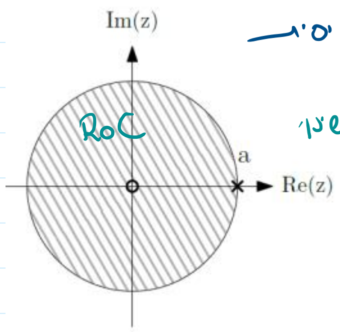
$$= 1-\frac{1}{1-a^{-1}z} \quad (5)$$

קבצת אלגברה בסיסית

$$= \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad (6) \quad ROC_Y = |z|<|a|$$

הפוך!!!

קוטב ואפס ללא שינוי



ב) $|z|<|a|$

תחום ההתכנסות (הגדרה 3.2): נתון אות בדיד $x[n]$ בעל התמרת $X(z)$. תחום ההתכנסות של $X(z)$ הוא קבוצת המספרים המרוכבים z, כך שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ מתכנס לגבול סופי.

* תמיד מעגלי מסביב לראשית הצירים
* אינו מכיל קטבים.
* **תחום ההתכנסות של אות סיבתי**: החוצה מהקוטב הגדול ביותר (בערך מוחלט)
* **תחום ההתכנסות של אות אנטי-סיבתי**: פנימה: מהקוטב הקטן ביותר

דוגמה

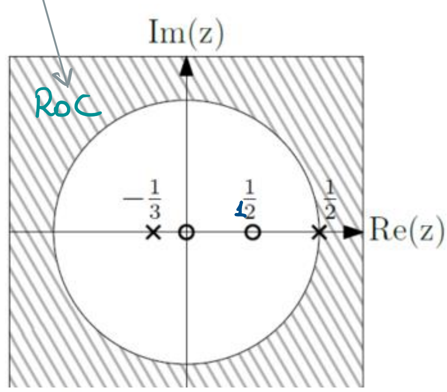
חשב התמרת Z של האות

$$x[n]=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{a} u[n]+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{a} u[n]$$

אות סכמי עם 2 קטבים

$$X(z)=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{2}}}^{\text{דוגמה ראשונה}}+\overbrace{\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{3}}}^{\text{דוגמה השנייה}}=\underbrace{\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}}_{|z|>\max(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}$$

$a=\frac{1}{2}$ $\quad a=-\frac{1}{3}$



הערה 3.2 ! אין להתבלבל בין z ו-z^{-1} תוך כדי חישוב תחום ההתכנסות! המשתנה החופשי הוא z, אע"פ שהביטוי z^{-1} מופיע באופן טבעי בחישובינו.

דוגמה:

$$x[n]=\begin{cases} a^n & n\geqslant 0 \\ -b^n & n<0 \end{cases} = \underbrace{a^n u[n]}_{\text{דוגמה}} - \underbrace{b^n u[-n-1]}_{\text{דוגמה}}$$

$$x[n] = \begin{cases} \ldots & \ldots \\ -b^n & n<0 \end{cases} = \underbrace{a^n u[n]}_{\text{דוגמה ראשונה}} - \underbrace{b^n u[-n-1]}_{\text{דוגמה שניה}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

$|z|>|a|$ $\quad$ $|z|<|b|$

$$= \frac{2z\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}{(z-a)(z-b)}$$

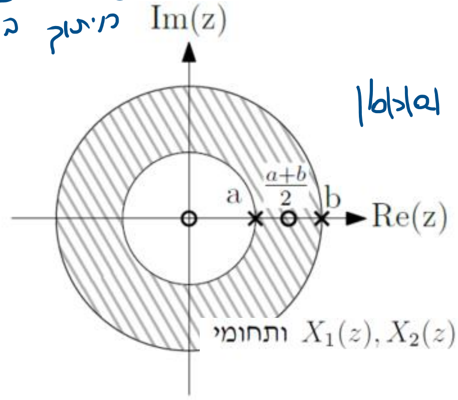
אפסים

$z=0, \quad z=\frac{a+b}{2}$

קטבים

$z=a, \quad z=b$

חיתוך בין תחומים



$|b|>|a|$

עבור $|b|<|a|$ אין התמרה

תכונותיה של התמרת Z

ליניאריות (תכונה 3.6): נתונים האותות $x_1[n], x_2[n]$ בעלי התמרות $X_1(z), X_2(z)$ ותחומי התכנסות R_1, R_2. התמרת Z של קומבינציה ליניארית כלשהיא הינה:

דוגמה לעיל

התכונה של ליניאריות

$$\mathscr{Z}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(z) + bX_2(z). \tag{3.7}$$

במידה והתמרת Z היא פונקציה רציונלית ואין צמצום בין קטבים ואפסים של $X_1(z), X_2(z)$, ניתן לומר כי $ROC_{ax_1+bx_2} = R_1 \cap R_2$.

הזזה במישור הזמן (תכונה 3.7): נתון האות $x[n]$ בעל התמרה $X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R. התמרת Z של האות המוזז ב-m הינה:

דוגמה:

$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1 = X(z)$ $\quad$ $RoC = \mathbb{C}$

$$\mathscr{Z}\{x[n-m]\} = z^{-m}X(z), \quad ROC = R \pm \{0, \infty\},$$

$0, \infty$ יכולים להופיע או להיפך אחד בכפל

$x[n-1] = \delta[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}X(z) = z^{-1}$ $\quad$ $m=1$ $\quad$ $RoC = \mathbb{C} - \{0\}, \; z \neq 0$

$x[n+1] \longleftrightarrow z$ $\quad$ $m=-1$ $\quad$ $z \neq \infty$ $\quad$ $X(z) = \ldots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1}$

$\delta[n+1] + \delta[n-1] \longleftrightarrow z + z^{-1}$ $\quad$ $0 < |z| < \infty$

כיווץ במישור התדר (תכונה 3.8): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R. התמרת Z של האות המאופנן הינה:

הכפלה ב z_0^n

$$\mathscr{Z}\{(z_0^n x[n])\} = X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0|R, \tag{3.10}$$

$x[n] = a^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ $\quad$ $|z|>|a|$ $\quad$ דוגמה:

$z_0 = b$ $\quad$ $b^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{b}\right) = \frac{1}{1-abz^{-1}}$ $\quad$ $|z| > |a||b| = |ab|$

שיקוף בזמן (תכונה 3.9): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R. התמרת Z של האות המשוקף הינה:

$$\mathscr{Z}\{x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad ROC = \frac{1}{R} \tag{3.12}$$

נגזרת התמרת Z (הגדרה 3.5): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R. מתקבל:

$$\mathscr{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{dX}{dz}(z), \quad ROC = R \pm \{0\} \tag{3.16}$$

דוגמה 3.7: חשב התמרה של $x[n] = na^n u[m]$.

פתרון:

$$x[n] = n \cdot \underbrace{a^n u[m]}_{\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|}$$

$$\Rightarrow X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)$$

$$= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

קונבולוציה

נתונים האותות $x_1[n], x_2[n]$ בעלי התמרות $X_1(z), X_2(z)$ ותחומי ההתכנסות R_1, R_2. מתקבל:

חיתוך

$$\mathscr{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z), \quad ROC \supset R_1 \cap R_2$$

דוגמה:

$x_1[n] = u[n]$

$x_2[n] = a^n u[n]$

$x_1[n] * x_2[n] = ?$

פתרון:

$a=1$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$

דוגמה ראשונה

$$X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

$$X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}}$$

פירוק לגורמים

$$= \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right] \qquad ROC = |z| > \max(|a|, 1)$$

תחום ההתכנסות הוא מחוץ למעגל הגדול ביותר עבור אותות ימניים

חישוב לפי כלל ה

$$x_1[n] * x_2[n] = \frac{1}{1-a}\left[u[n] - a\left(a^n u[n]\right)\right]$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

מערכות LTI

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$X(z) \qquad H(z) \qquad Y(z)$

פונקציית תמסורת, $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$Y(z)A(z) = X(z)B(z)$$

פולינומים

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}$$
$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

משוואת הפרשים

דוגמה: $h[n] = a^n u[n]$

משוואת הפרשים

$$h[n] = a^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\overset{B(z)}{1}}{\underset{A(z)}{1-az^{-1}}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)$$

$$X(z) = Y(z) - az^{-1}Y(z)$$

$$h[n] = a^n u[n] \longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1 - az^{-1}}}_{A(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)$$

$$X(z) = Y(z) - az^{-1}Y(z)$$

$$x[n] = y[n] - ay[n-1] \Rightarrow y[n] = \underbrace{ay[n-1]}_{\text{מוצא בעבר}} + \underbrace{x[n]}_{\text{כניסה בהווה}}$$

דוגמא:

$h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$

$x[n] = \{1, 1\}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1}$$

$z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-5}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}) + z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}\right)$$

$$= 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 4z^{-4}$$

הערה: מקדמים של תוצאת הכפלה בין זוג פולינומים היא קונבולוציה של המקדמים.

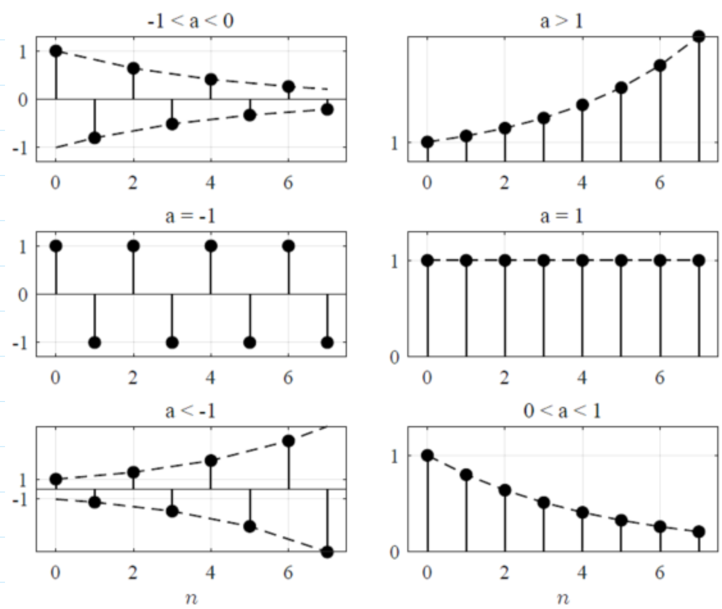
תכונות של מערכות LTI

סיבתיות (תכונה 3.14): אם המערכת LTI סיבתית, תחום ההתכנסות של התגובה להלם הוא מסוג "מחוץ למעגל". אם פונקצית התמסורת רציונלית ותחום ההתכנסות מסוג "מחוץ למעגל", המערכת סיבתית.

יציבות (תכונה 3.15): המערכת יציבה אם ורק אם תחום ההתכנסות מכיל את מעגל היחידה $|z| = 1$,

$$ROC_h = \{|z| = 1\}. \tag{3.27}$$

דוגמה 3.12: מערכת בעלת תגובה להלם $|z| > |a|$, $x[n] = a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$, היא יציבה עבור $|a| < 1$.

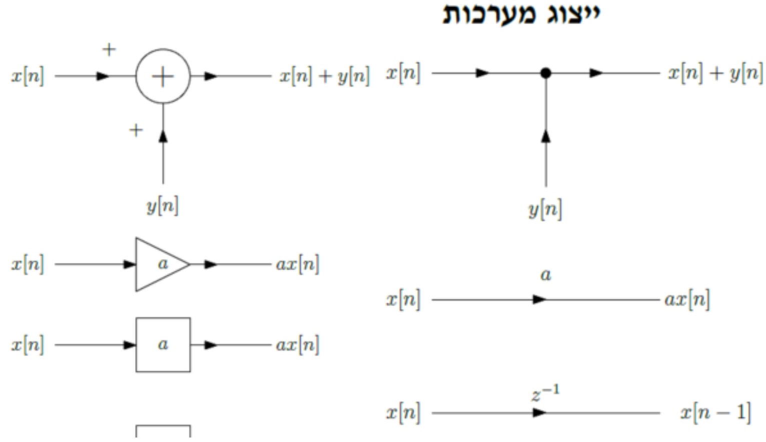


ייצוג מערכות

חיבור

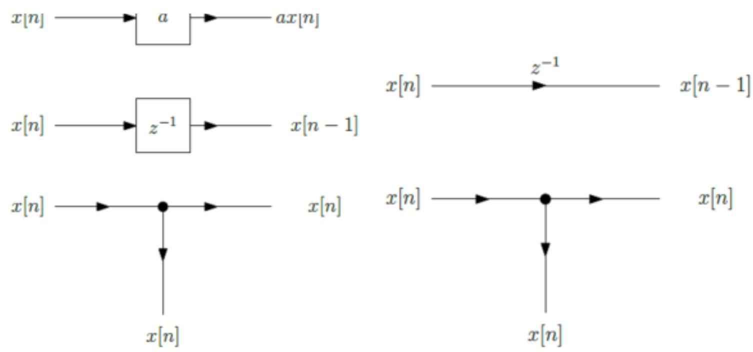
כפל בקבוע

השהייה של 1



השהייה של 1

פיצול/שכפול



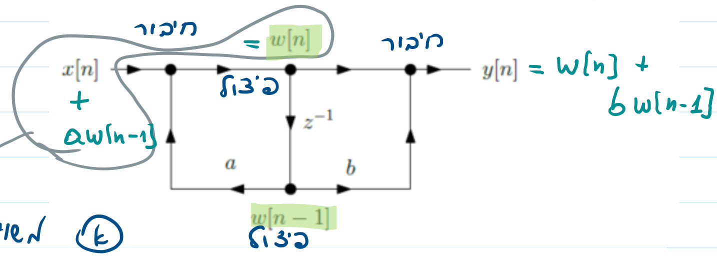
דוגמה 3:

מצא פונקציית תמסורת, ומשוואת ההפרשים של המערכת.

הערה 3.9 ! פתרון של השאלות מסוג הזה בד"כ דורש:

א) שימוש בנקודות עזר,

ב) שילוב של משוואות הפרשים ופונקציות תמסורת.



א' משוואות בזמן

(1) $x[n] = w[n] - aw[n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = W(z)\left[1 - az^{-1}\right]$

(2) $y[n] = w[n] + bw[n-1] \qquad Y(z) = W(z)\left[1 + bz^{-1}\right]$

מתקבל

ג'

ב' פונ' תמסורת $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} y[n] - ay[n-1] = x[n] + bx[n-1]$

משוואת הפרשים בזמן