התמרת Z

גרסה של התמרת Laplace בזמן בדיד.

$h(t) \longleftrightarrow H(s) \longleftrightarrow$ משוואה דיפרנציאלית שמתארת את המערכת

(H(s) – פונ' תמסורת)

$h[n] \longleftrightarrow$ פונ' תמסורת $\longleftrightarrow$ משוואת הפרשים

(**)

$\underbrace{h[n]=a^n u[n]}_{\text{מדרגה בדידה (*)}} \longleftrightarrow \ ? \ \longleftrightarrow y[n]=ay[n-1]+x[n]$ ← הרבה פעמים יותר פשוט מקונבולוציה לציין מערכת

$y[n]=h[n]*x[n]$

3.2 הגדרה

התמרת Z (הגדרה 3.1): יהי $x[n]$ אות בדיד כלשהו. התמרת Z של האות $x[n]$, אשר מסומנת ב-$X(z)$ מוגדרת כדלהלן:

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \tag{3.1}$$

כאשר $z\in\mathbb{C}$ (מספר מרוכב כלשהו).

צורות סימון:

$X(z)=\mathscr{Z}\{x[n]\}$

$X(z)\xleftrightarrow{\mathscr{Z}} x[n]$

↑ פונ' תמסורת

דוגמה:

$x[n]=\{1,1,1,1\}=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

n=0 n=3

חישוב התמרה:

$X(z)=\overbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}}^{\text{הגדרה}}=\overbrace{\sum_{k=0}^{3} z^{-k}}^{\text{הצבה}}$ z=1

Σ פתיחת $=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$

$=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}$ סכום סדרה הנדסית →

תזכורת: $r=z^{-1}$ $N=4$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} r^n=\frac{1-r^N}{1-r}}$$

$z=1 \quad X(1)=4$

$z^4=1 \Rightarrow z=$ 4 פתרונות

מעבר לחזקות חיוביות ↓

$$X(z)=\frac{z^4-1}{z^3(z-1)}=\frac{(z-1)(z+1)(z+j)(z-j)}{z^3(z-1)}=\frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3}$$

$z\neq 0$ תנאי התכנסות $\Leftarrow X(0)\to\infty$

תחום ההתכנסות של התמרת Z

דוגמה: $x[n]=a^n u[n] \Rightarrow X(z)=?$

$=\begin{cases}a^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

פתרון:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$ הצבה

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k$$ סכום סדרה הנדסית $r=az^{-1}$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}},$$

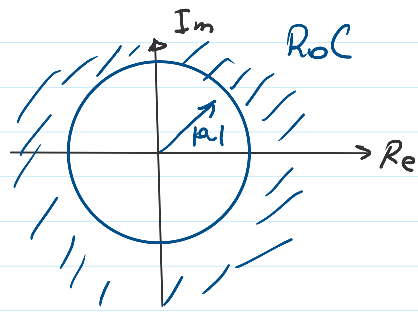
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r} \qquad |r|<1}$$

$|az^{-1}|<1 \Rightarrow \boxed{ROC_X=|z|>|a|}$

$\left|\frac{a}{z}\right|<1$

$|a|<|z|$

region of convergence – תחום ההתכנסות



דוגמה: $y[n]=-a^n u[-n-1]$, מתקבל

$=\begin{cases}-a^n & n\leq -1\end{cases}$

מתקבל ,$y[n] = -a^n u[-n-1]$ $= \begin{cases} -a^n & n \le -1 \\ 0 & n \ge 0 \end{cases}$

אנטי - סיבתי:

הצבה $\quad Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k z^{-k} \quad (1)$

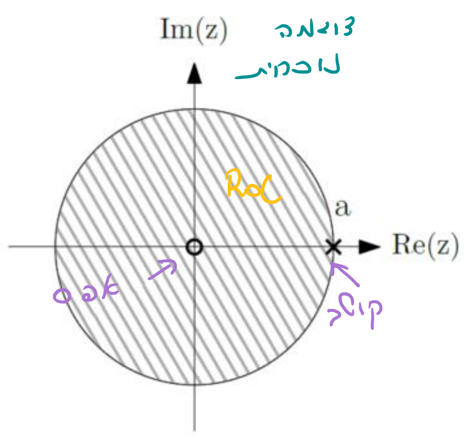
שינוי משתנה סכימה $\quad \overset{m=-k}{=} -\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^{m} \quad (2)$

חזקה משותפת $\quad = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^m \quad (3)$

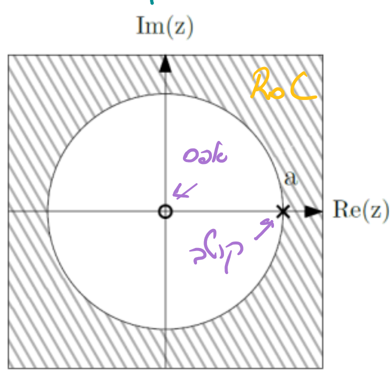
הוספה והורדה של $m=0$ $\quad = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^m \quad (4)$ $\quad r = a^{-1}z$

סכום סדרה הנדסית אינסופית $\quad = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} \quad (5)$

כיווני סופי צבה לדוגמה הקודמת $\quad = \frac{1}{1-az^{-1}},$ $\boxed{ROC_Y = |z| < |a|}$ לשים לב לשוני

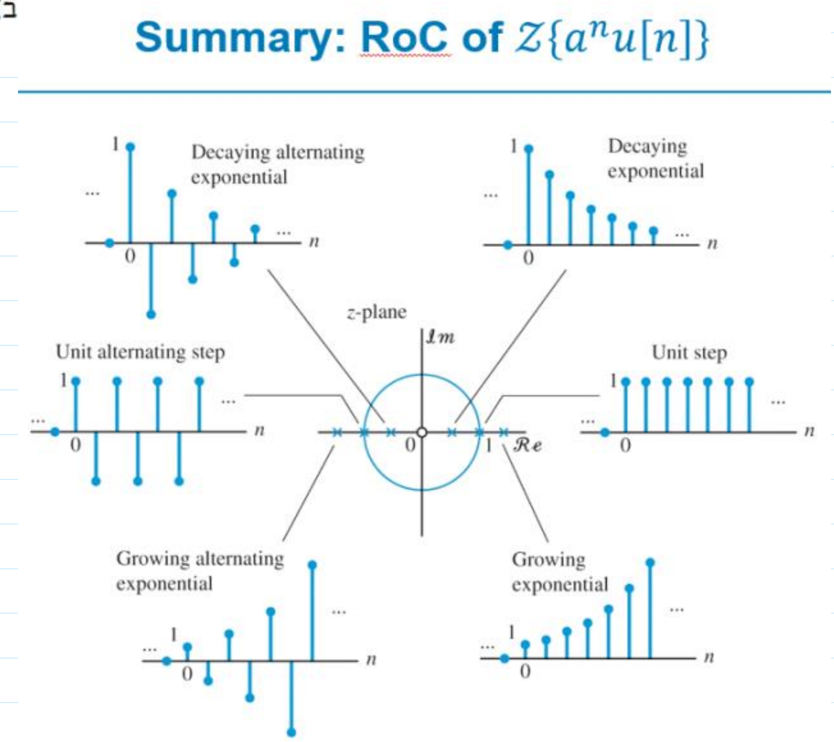


ב) $|z| < |a|$



א) $|z| > |a|$

התמרת Z
תמיד כוללת
תחום התכנסות
(אז "רמז" לתחום
זה)



תחום ההתכנסות (הגדרה 3.2): נתון אות בדיד $x[n]$ בעל התמרת $X(z)$. תחום ההתכנסות של $X(z)$ הוא קבוצת המספרים המרוכבים z, כך שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ מתכנס לגבול סופי.

הערה לדוגמה:
$\rightarrow z=0$

חזרה לדוגמא:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

$z=0$ אפס

$z=a$ קוטב

תחום ההתכנסות (הגדרה 3.2): נתון אות בדיד $x[n]$ בעל התמרת $X(z)$. תחום ההתכנסות של $X(z)$ הוא קבוצת המספרים המרוכבים z, כך שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ מתכנס לגבול סופי.

אפסים (הגדרה 3.3): נקודה z_0, כך ש-$X(z_0)=0$ נקראת **אפס** (zero), ומסומנת במישור Z ב-○.

קטבים (הגדרה 3.4): נקודה z_0, כך ש-$\lim_{z\to z_0} X(z)=\infty$ נקראת **קוטב** (pole), ומסומנת במישור Z ב-×.

הערה 3.2 ! אין להתבלבל בין z ו-z^{-1} תוך כדי חישוב תחום ההתכנסות! המשתנה החופשי הוא z, אע"פ שהביטוי z^{-1} מופיע באופן טבעי בחישובינו.

קטבים בתוך תחום ההתכנסות (תכונה 3.2): תחום התכנסות אינו מכיל קטבים.

תחום ההתכנסות של אות סיבתי $ROC_x=\{|z|>|r_0|\}$, כאשר $|r_0|$ הוא הקטב הגדול ביותר. החוצה מהקוטב

תחום ההתכנסות של אות אנטי-סיבתי $ROC_x=\{|z|<|r_0|\}$, כאשר $|r_0|$ הוא הקטב הקטן ביותר. (פנימה מהקוטב)

דוגמה: שילוב בין דוגמאות קודמות

$$x[n]=\begin{cases} a^n & n\geqslant 0 \\ -b^n & n<0 \end{cases} = a^n u[n]-b^n u[-n-1]$$

חשב התמרת Z של האות, לרבות תחום התכנסות.

פתרון:

$|z|>|a|$ דוגמא א'　　$|z|<|b|$ דוגמא ב'

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$

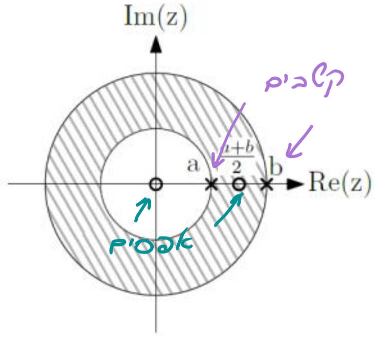
מכנה משותף

$$=\frac{2z\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}{(z-a)(z-b)} \qquad ROC=|z|>|a|\cap\{|z|<b\}$$

חיתוך בין התחומים

$|b|<|a|$ אין התמרה, כי אין התכנסות

$|b|>|a|$ כעת



דוגמה: (פעמיים דוגמא א')

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$a=\frac{1}{2}$　　$a=-\frac{1}{3}$

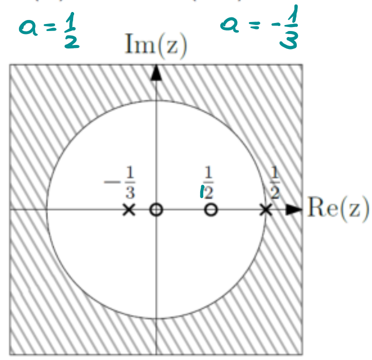
אות סיבתי

עבור $n<0$ האות הוא 0

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z|>\frac{1}{3}}=\underbrace{\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}}_{|z|>\max(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}$$

$|z|>|-\frac{1}{3}|$

מחוץ לקוטב הגדול ביותר



דוגמאות של התמרות נפוצות

$x[n]$	$X(z)$	RoC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$\mathbb{C}-\{0\}$ if $m>0$, $\mathbb{C}-\{\infty\}$ if $m<0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>a$
[illegible]	1	[illegible]

מקרה פרטי של דוגמא א' $a=1$

$z\neq 0$

$z\neq\infty$

$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$\mathbb{C}-\{0\}$ if $m>0$, $\mathbb{C}-\{\infty\}$ if $m<0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > a$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < a$

מקרה פרט.
של דוגמא א'
$a=1$

$z \neq 0$

$z \neq \infty$

תכונותיה של התמרת Z

Property	Discrete Signal	Z transform	ROC
#1 Linearity	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	includes $R_1 \cap R_2$
#2 Time shift	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R
#3 Frequency scaling	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0\rvert R$
#4 Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} if $m<0$
#5 Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
#6 Convolution	$(x_1 * x_2)[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$ (or possibly more)
#7 Frequency derivation	$nx[n]$	$-z\frac{dX}{dz}(z)$	R
#8 Time differentiation	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$R \cap \{\lvert z\rvert > 0\}$
#9 Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$	$R \cap \{\lvert z\rvert > 1\}$

#2 הזזה בזמן

דוגמה:

$x[n]=\delta[n]$

$x[n] \leftrightarrow 1 \qquad RoC=\mathbb{C}$

$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\cdot 1 = z^{-1} = \frac{1}{z} \qquad z\neq 0$

$n_0=1$

$x[n+1] \leftrightarrow z\cdot 1 = z \qquad z \neq \infty$

$n_0=-1$

$$X(z) = \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + \underbrace{x[1]z^{-1}}_{\delta[n-1]}$$

#3 $x[n]=a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

$b^n x[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-a\frac{1}{z/b}} = \frac{1}{1-abz^{-1}} \qquad \lvert z\rvert > \lvert a\rvert\lvert b\rvert$

#6 Convolution

דוגמא:

$x_1[n]=u[n]$

$x_2[n]=a^n u[n]$

חשב $x_1[n]*x_2[n]$.

פתרון:

$$X_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad ROC=\lvert z\rvert > 1$$

$$X_2(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC=\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$$

בטבלה
+
דוגמא א'

מטבלה
במישור Z

$$X_1(z)X_2(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$=\frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{a}{1-az^{-1}}\right] \qquad ROC=\lvert z\rvert > \max(\lvert a\rvert,1)$$

$$x_1[n]*x_2[n]=\frac{1}{1-a}\left[u[n]-a\left(a^n u[n]\right)\right]$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

שימוש
בטבלה

חיתוך
בין התחומים

$$\mathscr{Z}\{x_1[n]*x_2[n]\}=X_1(z)X_2(z), \quad ROC \supset R_1 \cap R_2$$

מערכות LTI

לסיכום: שימוש בהתמרת Z עבור ניתוח מערכות בזמן בדיד

מערכות LTI

מטרה: שימוש בהתמרת Z עבור ניתוח מערכות בזמן בדיד.

מערכת LTI היא מהצורה $H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$

כאשר: $H(z) \leftrightarrow h[n]$ תגובה להלם

$A(z), B(z)$ פולינומים

$B(z)=b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_Mz^{-M}$

$A(z)=1+a_1z^{-1}+\dots+a_Nz^{-N}$

תבנית קבועה!

$X(z)\to \boxed{H(z)} \to Y(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

תזכורת

$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$

$$H(z)\Rightarrow \boxed{Y(z)A(z)=X(z)B(z)}$$

משוואת הפרשים שמתארת מערכת LTI

$$y[n]+a_1y[n-1]+\dots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\dots+b_Mx[z-M]$$

הערה: נהוג $a_0=1$, כדי שיהיה נוח לרישום

$\underbrace{y[n]}_{\text{מוצא בהווה}} =$ $x[n]$ הווה

$x[n-n_0]$ כניסה בעבר

$y[n-n_0]$ ערכי מוצא בעבר

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$

דוגמה: נתונה תגובה להלם $h[n]=a^nu[n]$

הוכח, שמשוואת הפרשים היא $y[n]=ay[n-1]+x[n]$

פתרון:

$$h[n]=a^nu[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)$$ פונ' תמסורת

$$X(z)=Y(z)-az^{-1}Y(z)$$

$$x[n]=y[n]-ay[n-1]$$

$B(z)=1$

$A(z)=1-az^{-1}$

קשר בין התכונות של מערכת LTI לתכונות של $H(z)$

כעגת: לא סיבתית
פנימה: אנטי - סיבתית

סיבתיות (תכונה 3.14): אם המערכת LTI סיבתית, תחום ההתכנסות של התגובה להלם הוא מסוג "מחוץ למעגל". אם פונקצית התמסורת רציונלית ותחום ההתכנסות מסוג "מחוץ למעגל", המערכת סיבתית.

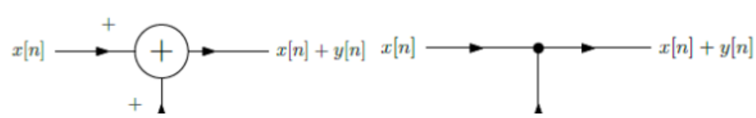
יציבות (תכונה 3.15): המערכת יציבה אם ורק אם תחום ההתכנסות מכיל את מעגל היחידה $|z|=1$,

$$ROC_h=\{|z|=1\}. \tag{3.27}$$

3.8 ייצוג מערכות

טבלה 3.5 מתארת שני סוגים של דיאגרמות המקובלות לייצוג מערכות.

סכום



3.8 ייצוג מערכות

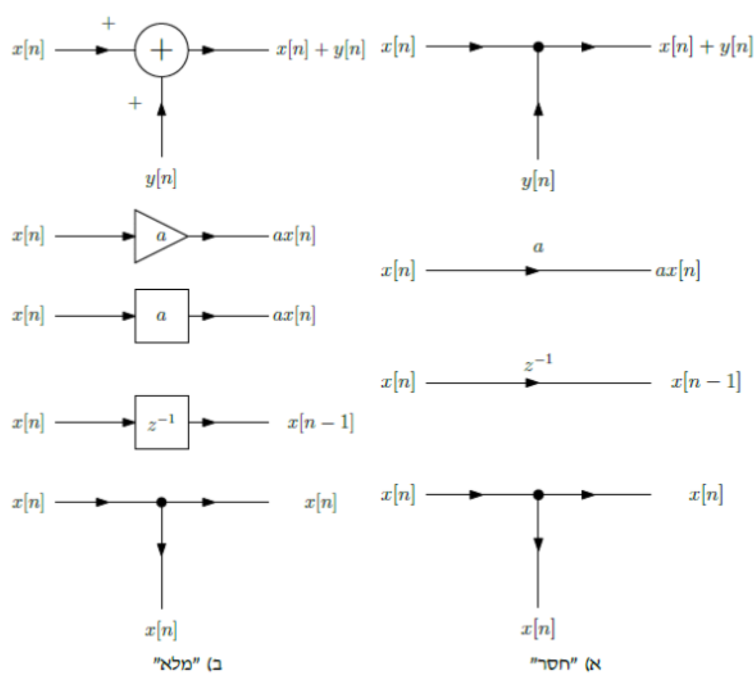
טבלה 3.5 מתארת שני סוגים של דיאגרמות המקובלות לייצוג מערכות.

סכום

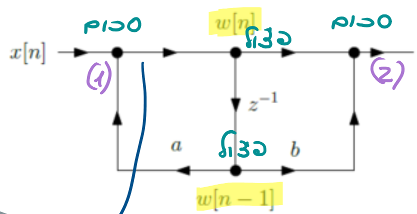
הכפלה בקבוע

השהייה של 1

פיצול (העתקה)



דוגמה: יש למצוא משוואת הפרשים



$y[n] = w[n] + b\,w[n-1]$

(1) $a w[n-1] + x[n] = w[n]$

עקרונות הפתרון:

א) שימוש בנקודות עזר,

ב) שילוב של משוואות הפרשים ופונקציות תמסורת.

$$x[n] = w[n] - aw[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = W(z)\left[1 - az^{-1}\right]$$

$$y[n] = w[n] + bw[n-1] \qquad Y(z) = W(z)\left[1 + bz^{-1}\right]$$

פונקציית תמסורת

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} y[n] - ay[n-1] = x[n] + bx[n-1]$$