מעשי בצ׳ה

הערה: ספרתי = זמן בדיד

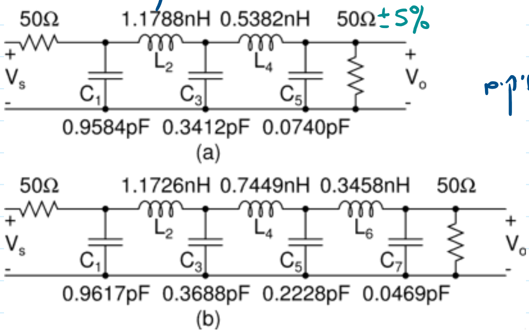
יתרונות:
* זול: בוה חישוב כול
* פרמטרים צההים
* שינוי קל

מגבלה: תדרים מאוד גבוהים = מאוד יקר

אנלוגי = זמן רציף

דוגמה למסנן אנלוגי

10%
1%
±5%



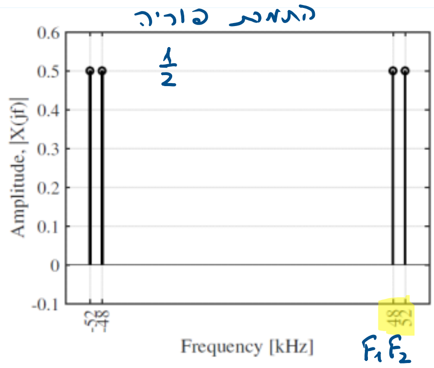
בעיות:
* רכיבים לא מדויקים ⇐ מסננים לא צההים
* קושי בלשנות תדר קטעון
* תלוי טמפ׳
* יקר

התמרת פוריה

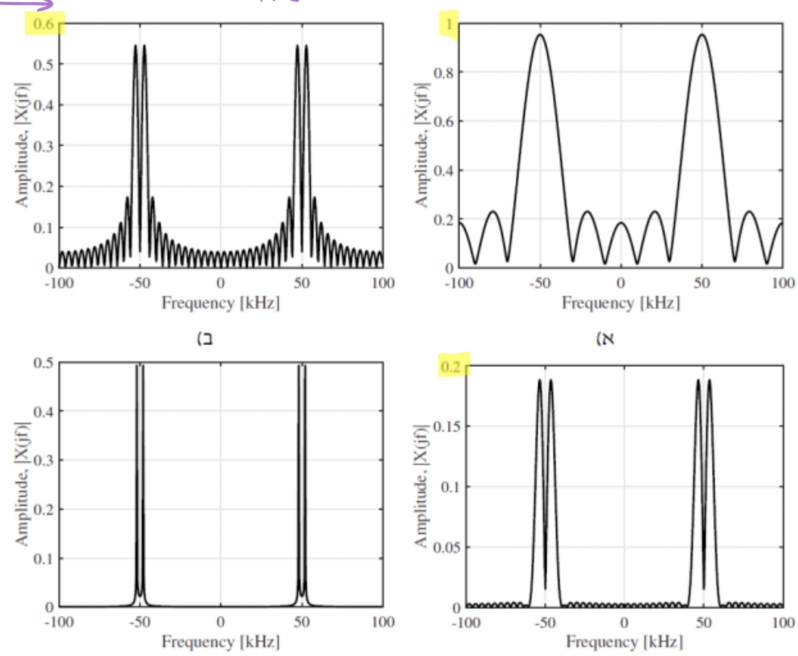
דוגמה מספרית (המחשה) נתון את

$$x(t) = \cos(2\pi F_1 t) + \cos(2\pi F_2 t)$$

התמרת פוריה



4 התמרות מעשיות לדוגמה



סיום הקורס: מתמטיקה שימושית

חישובים: Matlab

מרצה: דימה בחובסקי

dmitrby@ac.sce.ac.il

סלבוס

קריטריון	אחוז	הערות
בחינה סופית:	80% ,65%	תנאי לשקלול מרכיבי הציון הינו ציון 56 ומעלה בבחינה. במידה והציון נמוך מזה, הציון הסופי בקורס הינו ציון הבחינה.
בחנים:	15%	בוחן מקוון. ציון מגן.
פרויקט:	20%	
הערות:		ציון מגן הינו ציון שישוקלל רק בתנאי שיביא לעליה בציון הסופי.

* בקבוצות
* אחרי חנוכה (25.12 חופש)
* שעת PO - עבור פרויקט בלבד (כרגע לא נפגשים)
יום ג׳ 10-11
* הנחיות מפורטות בהמשך
* מגן (לא חייבים להגיש)

* הנחיות מפורטות בהמשך
* מגן (לא חייבים להגיע)
* Matlab
* moodle בבית
* 40 דק'

סיווג אותות בדידים ומערכות בדידות

2.1 הקדמה

אותות מעולם האנלוגי נקראים גם אותות בזמן רציף.

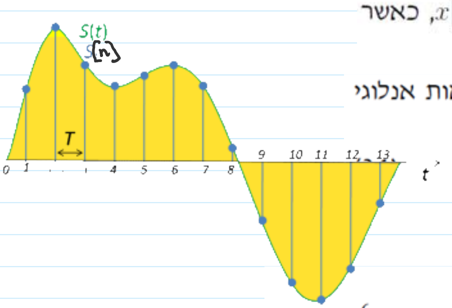
זמן רציף (הגדרה 2.1): אות בזמן רציף יוגדר ע"י סוגריים עגולים, (). לדוגמה, $x(t)$.

כשאומרים אותות ספרתיים, הכוונה בחוברת היא לאותות בזמן בדיד.

זמן בדיד (הגדרה 2.2): אות בזמן בדיד יוגדר ע"י סוגריים מרובעים, []. לדוגמה, $x[n]$, כאשר $n \in \mathcal{Z}$ (מספר שלם).

דגימה (הגדרה 2.3): בהינתן זמן דגימה T או תדר דגימה $F_s = 1/T$, הקשר בין אות אנלוגי לספרתי הוא

$$s[n] = s(nT).$$



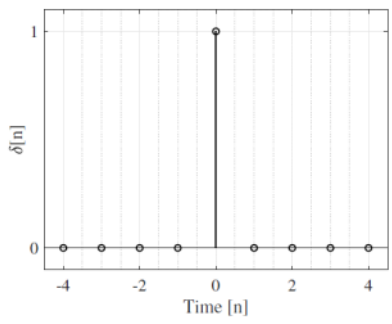
אותות בסיסיים

* הלם בדיד

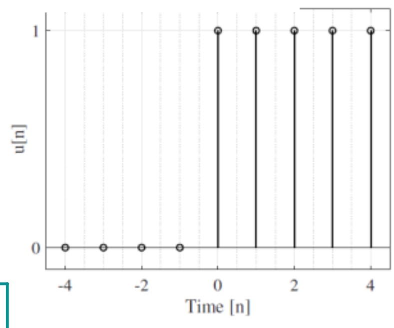
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

* **מדרגה בדידה** (הגדרה 2.5):

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



א) הלם בדיד, $\delta[n]$



ב) מדרגה בדידה, $u[n]$

קשר בין הלם למדרגה

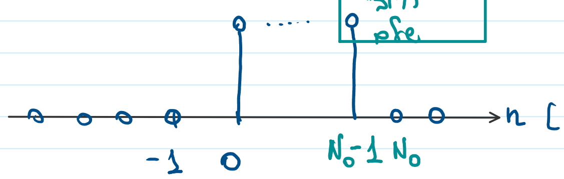
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

דוגמה: פולס בדיד

$$x[n] = u[n] - u[n - N_0]$$

N_0 מספר חיובי שלם



$n = N_0$

$x[N_0] = \overbrace{u[N_0]}^{1} - \overbrace{u[0]}^{1} = 0$

$x[N_0-1] = \overbrace{u[N_0-1]}^{1} - \overbrace{u[N_0-1-N_0]}^{0} = 1$

$\geq 0 \Rightarrow 1$

$= -1 < 0 \Rightarrow 0$

הגדרת האות

דוגמה:

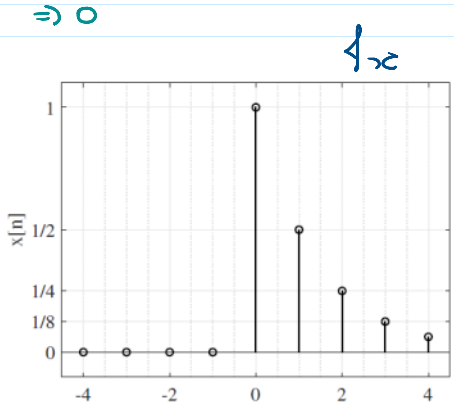
$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$ (פונ')

$$= (0.5)^n u[n]$$ (טנ')

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$ רישום ערכים

$[0 \cdots 0]$

$n=0$



אותות שמתחילים בזמן שונה מאפס

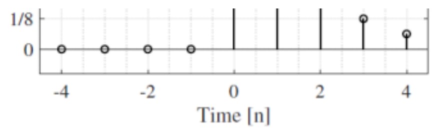
$y[n] = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 4\}$

$n=-1$ $n=0$

$y[n=0] = 2$, $y[0] = 2$

$y[-1] = 1$

$y[-1]=1$



$= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ (00000)

n=0

רישום ערכים ע"י תור הנדסה.

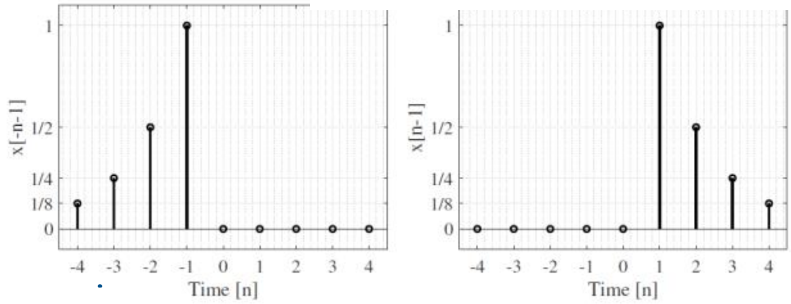
אין ערך בכלל

הערה 2.1 ! כל מה שלא נכתב באופן מפורש בייצוג $x[n]=\{\ldots\}$ הוא 0.

פעולות על האות

* **שיקוף (הפיכה) בזמן** (הגדרה 2.8): ניתן ליצור אות חדש $y[n]$ מוגדר על ידי הנוסחה $y[n]=x[-n]$.

* **הזזה בזמן** (הגדרה 2.9): ניתן ליצור אות חדש $y[n]$ מוגדר על ידי הנוסחה $y[n]=x[n-n_0]$. נציין כי פרמטר ההזזה n_0 חייב להיות מספר שלם (חיובי או שלילי), על מנת שנשמר את הסקלה בזמן.



$x[-(n+1)]$ = ב) שיקוף והזזה, $x[-n-1]$ א) הזזה, $x[n-1]$

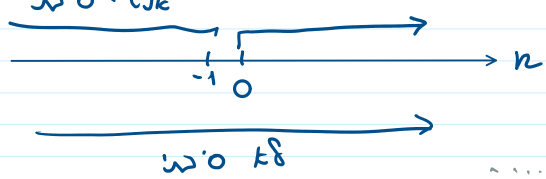
איור 2.2: פעולות על האות $x[n]=(0.5)^n u[n]$ במישור הזמן, כאשר $n_0=1$.

סיווג אותות בדידים

* סיבתיות

עבור כל ערכי זמן שלילי האות=0

אנטי-סיבתי: (ערכי זמן שליליים בלבד) עבור כל ערכי זמן חיוביים האות =0



שונה מ-0 גם עבור זמן חיובי וגם עבור זמן שלילי או זמן 0

דוגמאות: $x[n]=\delta[n+1]$ $=[1,0]$ אנטי-סיבתי

$y[n]=\delta[n-1]=[0,1]$ סיבתית

$z[n]=x[n]+y[n]=[1,0,1]$ לא סיבתי

n=0

* מחזוריות $x[n+N]=x[n]$

N הכי קטן אפשרי הוא זמן מחזור

דוגמה:

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+8)\right)$$

N=8 זמן מחזור

דוגמה 2.4: האות $x[n]=\cos(n)$ אינו מחזורי.

אין N שמקיים את התנאי

* **אנרגיה** (הגדרה 2.17): אנרגיה של האות $x[n]$ נתונה ע"י

$$E_x=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

מערכות בדידות

$$y[n] = T(x[n], x[n-1], y[n-1], \ldots)$$
$x[n+1], y[n+1]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T(\cdot)} \longrightarrow y[n]$$

סיווג מערכות בדידות

* עם/בלי זכרון   בלי זכרון $y[n] = T(x[n])$
רק זמן n

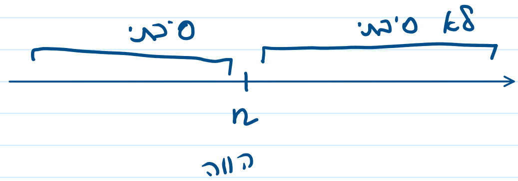
* **לינאריות** (הגדרה 2.19): מערכת בדידה מוגדרת על ידי הקשר כניסה-מוצא T היא לינארית כאשר

$$\underbrace{T(\overbrace{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]}^{x[n]})}_{\text{כניסה}} = \overbrace{a_1\underbrace{T(x_1[n])}_{y_1[n]} + a_2\underbrace{T(x_2[n])}_{y_2[n]}}^{y[n]} \qquad (2.13)$$

$x_i[n] \to y_i[n]$

* **קביעות בזמן** (הגדרה 2.20): מערכת בדידה מוגדרת על ידי הקשר כניסה מוצא $y[n] = T(x[n])$ היא קבועה בזמן, כאשר אם מכניסים את אותה כניסה מוזזת $x[n-n_0]$ יתקבל אותו מוצא מוזז $y[n-n_0]$ (באותו פרמטר n_0!).

* סיבתיות



* **יציבות** (הגדרה 2.22): מערכת בדידה היא יציבה כאשר עבור כל כניסה חסומה מתקבל מוצא חסום, הנקראת גם יציבות Bounded input, bounded output (BIBO).

* **הופכיות** (הגדרה 2.23): מערכת בדידה היא הופכית כאשר עבור כל מוצא קיימת כניסה אחת בלבד בהתאם למוצא זה.

דוגמה: בדוק האם מערכת $y[n] = x^2[n]$ היא לינארית ו/או קבוע בזמן.

בלי זכרון, כי תלויה בזמן n בלבד

המערכת היא קבועה בזמן, כי מתקיים

$x_1[n] = x[n-n_0]$ כניסה מוזזת

$y_1[n] = T(x_1[n]) = x^2[n-n_0] \overset{?}{=} y[n-n_0].$ בדיקה, שגם מוזז בהתאם

המערכת היא לא לינארית, כי מתקיים

$$y_1[n] = T(x_1[n]) = x_1^2[n]$$
$$y_2[n] = T(x_2[n]) = x_2^2[n]$$
$$T(\underbrace{x_1[n] + x_2[n]}_{x[n]}) = (x_1[n] + x_2[n])^2 \neq y_1[n] + y_2[n]$$

$x[n] \overset{?}{\to} y[n]$

דוגמה: $y[n] = x[n] - x[n-1]$ מערכת קבועה בזמן, לינארית, סיבתית, עם זכרון

$y[n] = x[n] - x[n+1]$ " " " לא סיבתית "

מערכות LTI (לינאריות וקבועות בזמן)

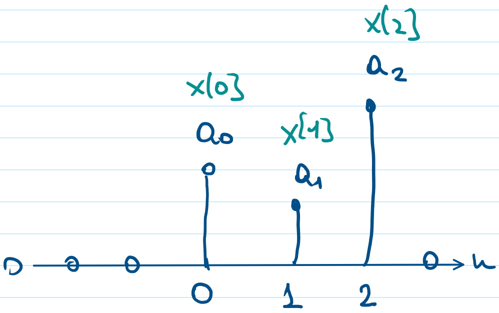
תגובה להלם: $\delta[n] \to h[n]$

$x[2]$
n

מערכות LTI (ליניאריות וקבועות בזמן)

תגובה להלם: $\delta[n] \to h[n]$

תכונה: כל אות ספרתי ניתן להציג ע"י סכום אותות הלם



דוגמה 2.12: רשום את $x[n]=\{a_0,a_1,a_2\}$ ע"י סכום אותות הלם מוזזים.

פתרון:

$$x[n]=a_0\delta[n]+a_1\delta[n-1]+a_2\delta[n-2]=\sum_{k=0}^{2}a_k\delta[n-k]$$

$$a_k = x[k]$$

$$\delta[n-1]=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

סיכום:

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]}$$

ניתוח מוצא המערכת

הסבר	מוצא	כניסה
תגובה להלם	$h[n]$	$\delta[n]$
ליניארית	$a_0h[n]$	$a_0\delta[n]$
ליניארית וקביעות בזמן	$a_1h[n-1]$	$a_1\delta[n-1]$
ליניארית וקביעות בזמן	$a_kh[n-k]$	$a_k\delta[n-k]$
ליניאריות	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kh[n-k]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta[n-k]$
$a_k=x[k]$	$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$

קונבולוציה בדידה

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

תכונות (זהה לסעיף 1.3)

$h_1[n]*h_2[n]=h_2[n]*h_1[n]$.

$\left(h_1[n]*h_2[n]\right)*h_3[n]=h_1[n]*\left(h_2[n]*h_3[n]\right)=h_1[n]*h_2[n]*h_3[n]$

$\left(h_1[n]+h_2[n]\right)*h_3[n]=h_1[n]*h_3[n]+h_2[n]*h_3[n]$

תכונות:

אורך תגובה לאות סופי בזמן (תכונה 2.5): עבור אות כניסה באורך N_x ואורך תגובה להלם N_h, אורך התגובה המתקבלת

$$N_y=N_h+N_x-1 \qquad (2.16)$$

דוגמה מספרית:

$x[n]=[1,3,7,10]$ $\quad N_x=4$

$h[n]=[-7,3,2]$ $\quad N_h=3$

$N_y=4+3-1=6$

```
conv([1 3 7 10],[-7, 3, 2])

ans =

  -7  -18  -38  -43   44   20
```

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

הערה:

$y[0]=\sum_k x[k]h[-k]$ $\qquad k>0 \quad h[-k]=0$; $\quad k<0 \quad x[k]=0 \quad \Rightarrow k=0$

$=x[0]h[0]=1\cdot(-7)=-7$

$y[1]=\sum_k x[k]h[1-k]$ $\qquad k<0 \quad x[k]=0$; $\quad k>1 \quad h[1-k]=0 \quad \Rightarrow k=0,1$

$=x[0]h[1]+x[1]h[0]=1\cdot3+3\cdot(-7)=-18$

$y[2]=\sum x[k]h[2-k]$

$= x[0]h[1] + x[1]h[0] = 1\cdot 3 + 3\cdot(-7) = -18$

$y[2] = \sum_k x[k]h[2-k]$

$= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = \ldots$

$\boxed{\text{הערה: כל יתר האברים 0}}$

$n=0$	$h[k]$	2	3	1 / -7	3	7	10		$y[0] = 1\cdot(-7) = -7$
$n=1$	$h[1-k]$		2	1 / 3	3 / -7	7	10		$y[1] = 1\cdot 3 + 3\cdot(-7) = -18$
$n=2$				2	3	-7			$y[2] = 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + (-7)\cdot 7$
					2	3	-7		
						2	3	-7	
							2	3	-7

$2\cdot 10$

* הכפלה בין איברים חופפים
ואחר כך חיבור

סיבתיות ויציבות עבור מערכות LTI

* סיבתיות

$h[n] = 0$
$n < 0$ $\Rightarrow$ סיבתית

* יציבות
BIBO

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

עבור כל כניסה חסומה $\Leftarrow$ מוצא חסום

FIR ו-IIR

Infinite Impulse Response

תגובה אינסופית להלם

Finite Impulse Response

תגובה סופית להלם