

מבוא לאותות אקראיים

חוברת הקורס

ד"ר דימה בחובסקי
מחלקה להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

מכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון (SCE)

תאריך העדכון:
13 במרץ 2025
י"ג ב אדר ה'תשפ"ה

גרסה העדכנית ביותר של החוברת ניתנת להורדה מהאתר:
https://bykhov.github.io/rp/RP_Book.pdf

השימוש בחוברת זו הינו אך ורק לשימוש אישי. אין להכניס שינויים, להעתיק, להפיץ, לפרסם, להנפיק רישיון, ליצור עבודה נגזרת, לצלם או לשכפל חוברת זו, או קטעים ממנה בשום צורה ובשום אמצעי, לרבות באמצעות מדיה אלקטרונית. אין לעשות בחוברת זו כל שימוש מסחרי ללא אישור בכתב של המחברים ושל המכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון.

This work is licensed under a [Creative Commons "Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International"](#) license.



תוכן העניינים

7	I	משתנים אקראיים
8	1	משתנה אקראי בדיד
8	1.1	הקדמה
9	1.2	תכונות
13	1.3	התפלגויות נפוצות
17	1.4	שאלות
19	2	משתנה אקראי רציף
19	2.1	אפיון
21	2.2	התפלגויות
27	2.3	היסטוגרמה
31	2.4	שאלות
34	3	זוג משתנים אקראיים
34	3.1	משתנים אקראיים בדידים
38	3.2	משתנים אקראיים רציפים
42	3.3	שונות משותפת
46	3.4	שאלות
48	4	חיזוי לינארי
48	4.1	חיזוי ע"י קבוע
49	4.2	חיזוי לינארי דו-ממדי
55	4.3	חיזוי לינארי רב-ממדי
57	4.4	שאלות
61	5	משתנים גאוסיים במשותף
61	5.1	covariance רב-ממדית מטריצת
64	5.2	התפלגות גאוסית דו-ממדית
69	5.3	התפלגות גאוסית רב-ממדית
71	5.4	שאלות
73	II	תהליכים/אותות אקראיים
74		הקדמה לאותות אקראיים

75	מבוא לאותות אקראיים	6
75	סיווגים של אותות אקראיים	6.1
76	ערך בודד	6.2
77	זוג ערכים	6.3
83	תהליכים סטציונריים	6.4
90	צפיפות הספק ספקטראלית	6.5
94	שאלות	6.6
97	קשר בין תהליכים	7
97	הגדרות	7.1
99	תהליכים סטציונריים במשותף	7.2
104	שאלות	7.3
108	חיזוי לינארי של אותות	8
108	הקדמה	8.1
109	חיזוי לינארי - משוואות Wiener-Hopf	8.2
115	שאלות	8.3
119	III מערכות	
120	מערכת LTI - זמן רציף	9
120	הקדמה	9.1
121	תכונות	9.2
124	הספק ויחס אות לרעש	9.3
126	קשר בין מוצא של מערכות שונות	9.4
129	שאלות	9.5
131	מערכות LTI - תהליכים גאוסיים	10
131	הגדרה	10.1
132	מעבר דרך מערכת LTI	10.2
136	רעש צר-סרט (זמן רציף)	10.3
138	שאלות	10.4
142	מערכת LTI - זמן בדיד	11
142	הקדמה	11.1
145	מערכות FIR	11.2
150	מערכות IIR	11.3
154	שאלות	11.4
156	12 מסנן מתואם	
156	הגדרת הבעיה	12.1
157	פיתוח המסנן	12.2
159	רעש לבן גאוסי	12.3
162	סיכום	12.4
163	שאלות	12.5

164	13 שיערוך PSD
164	13.1 הקדמה
165	13.2 Periodogram
166	13.3 Modified Periodogram
167	13.4 Bartlet-Welch Periodogram
168	13.5 שאלות

171	נספחים
171	א' פתרונות לשאלות
220	ב' נספח מתמטי
226	ג' מילון
227	ד' נושאי המשך
231	ה' סיכום הבדלי מושגים בין הספרים
232	ביבליוגרפיה

הקדמה

החוברת מתאימה לקורס ``מבוא לאותות אקראיים" הניתן במחלקה להנדסת חשמל בקמפוס באר-שבע. החוברת מכילה את כל חומר של הקורס . חוברת מחולקת ל-14 פרקים ונספחים, כאשר כל פרק בדרך כלל מתאים לנושא אחד שנלמד בהרצאה בודדת. אציין שכל פרק מכיל את החומר התיאורטי הנדרש, תרגילים עם פתרון מלא ותרגילים לתרגול עצמי. התרגילים לתרגול עצמי מבוססים על שאלות ממבחנים ובחנים שניתנו בשנים קודמות.

חלק I

משתנים אקראיים

פרק 1

משתנה אקראי בדיד

מטרה: לאפיין בצורה מתמטית תוצאה של ניסוי אקראי בעל תוצאות בדידות.

תוכן הפרק	
1.1	הקדמה
1.2	תכונות
1.2.1	אפיון
1.2.2	תוחלת (Expectation)
1.2.3	שונות (Variance)
1.2.4	חישוב מספרי
1.3	התפלגויות נפוצות
1.3.1	התפלגות Bernoulli
1.3.2	התפלגות בינומית
1.3.3	התפלגות גאומטרית
1.4	שאלות

1.1 הקדמה

מטרה: מושגי יסוד.

הסתברות (הגדרה 1.1):

שכיחות יחסית של תופעה כלשהי אחרי אינסוף ניסויים אקראיים ^א.

^א תופעות אחרות, שאינן קשורות לניסויים אקראיים, כגון סיכויי זכייה בבחירות וכד', שאינם נכללים בהגדרה זאת, לא יטופלו במסגרת חוברת זו.

משתנה אקראי (random variable) (הגדרה 1.2):

משתנה אקראי (נקרא גם משתנה מקרי) זה מודל שמתאר קשר בין תוצאה של ניסוי אקראי למספר ממשי ^א. הסימון הוא X, Y ע"י אות גדולה, לדוגמה X, Y וכד'.

אקיימת הגדרה פורמלית מתמטית יותר, שלא תוצג בחוברת זו.

משתנה אקראי בדיד (discrete random variable) (הגדרה 1.3):

עבור משתנים אקראיים רציפים, תוצאות אפשריות של הניסוי x_k הן בדידות (= ניתנות למספור), כאשר מספר ערכי k אפשריים יכול להיות סופי או אינסופי.

משתנה אקראי רציף (continuous random variable) (הגדרה 1.4):

עבור משתנים אקראיים בדידים, תוצאות אפשריות של הניסוי מוגדרות על מקטע או אוסף של מקטעים.

דוגמה 1.1: (משתנה אקראי בדיד עם מספר תוצאות ניסוי סופיות) משתנה אקראי מסויים המקשר בין תוצאת זריקת קוביה, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, לבין הסתברות לתוצאה זו.

דוגמה 1.2: (משתנה אקראי בדיד עם מספר תוצאות ניסוי אינסופיות) משתנה אקראי מסויים המקשר בין מספר זריקות קוביה לבין הסתברות לקבל התוצאה "6".

דוגמה 1.3: (משתנה אקראי רציף) משתנה אקראי מסויים המקשר בין זמן העבודה של מכונה מסויימת להסתברות התקלה שלה.

1.2 תכונות

1.2.1 אפיון

מטרה: לאפיין משתנה אקראי בדיד.

Probability density function (PDF) (הגדרה 1.5):

קשר בין תוצאה של הניסוי x_k להסתברות של תוצאה זו:

$$(1.1) \quad p_X[x_k] = \Pr[X = x_k]$$

השימוש בסוגריים $[\cdot]$ הוא כדי להדגיש, שמדובר בערכים בדידים, לעומת $(\cdot)$, המשמש בהמשך לערכים רציפים.

PDF

בחוברת זו מושג PDF מתייחס גם משתנים בדידים וגם למשתנים רציפים. בספרות לעתים מופיע מושג אחר, בשם probability mass function (PMF), שמטרתו להדגיש שמדובר במשתנה בדיד. באותם ספרים המושג PDF שמור למשתנים רציפים בלבד. סקירה קצרה של הבדלים בין הספרים מופיעה בנספח ה'.

תכונות יסוד של משתנים אקראיים הן כדלהלן.

תחום ערכי PDF (תכונה 1.1): תחום ערכי PDF הוא

$$(1.2) \quad 0 \leq p_X[x_i] \leq 1 \quad \forall i$$

תחום ערכים

סכום ערכים

סכום ערכי PDF (תכונה 1.2): סכום ערכי PDF הוא

$$(1.3) \quad \sum_i p_X[x_i] = 1$$

Cumulative distribution function (CDF) (הגדרה 1.6):

הסתברות, שערך משתנה אקראי X קטן או שווה מערך הנתון x ,

$$(1.4) \quad F_X(x) = \Pr(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ערך x הוא ממשי ורציף.קשר בין PDF ל-CDF (תכונה 1.3): הקשר מתבסס על סכום של $p_X[x_k]$ עבורם $x_k \leq x$

$$(1.5) \quad F_X(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_X[x_k]$$

דוגמה 1.4: חשב $F_X(3.5)$, כאשר משתנה אקראי X מתאר תוצאה של זריקת קוביה.

פתרון: ע"י הצבה בנוסחה להלן מתקבל

$$F_X(x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_X[x_k] = p_X[1] + p_X[2] + p_X[3] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

התנהגות פונקציונאלית (תכונה 1.4): פונ' CDF היא לא יורדת, ורציפה מימין.

הוכחה. עבור $x_1 \leq x_2$ מתקיים $\{X \leq x_1\} \in \{X \leq x_2\}$, לכן $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

רציפות מימין

הסתברות על מקטע (תכונה 1.5): עבור $x \in (a, b]$ מתקיים

$$(1.6) \quad \Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ערכי קצה (קיצון) (תכונה 1.6): תחום ערכי CDF הוא $0 \leq F_X(x) \leq 1$ (בהתאם לתכונה 1.2.1), כאשר עבור ערכי קיצון של x מתקיים

$$(1.7) \quad F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$$

הסתברות משלימה (תכונה 1.7): מאחר ומתקיים $\Pr(X > x) + \Pr(X \leq x) = 1$,

$$(1.8) \quad \Pr(X > x) = 1 - F_X(x)$$

1.2.2 תוחלת (Expectation)

מטרה: לאפיין ניסוי אקראי ע"י מספר בודד.

תוחלת (הגדרה 1.7):

$$(1.9) \quad E[X] = \sum_i x_i p_X[x_i]$$

סימון ע"י האות E מבוסס על המילה Expectation (צפי). הסבר על הבחירה דווקא של השם הזה הוא בהמשך, בפרק 4.1.

תכונות התוחלת (תכונה 1.8): תוחלת היא פעולה לינארית, והתוחלת של קבוע היא אותו הקבוע.

$$(1.10א) \quad E[aX] = aE[X]$$

$$(1.10ב) \quad E[b] = b$$

תוחלת של פונקציה של משתנה אקראי (תכונה 1.9):

$$(1.11) \quad E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_X[x_i]$$

דוגמה 1.5: בהתאם להגדרה,

$$(1.12) \quad E[X^2] = \sum_i x_i^2 p_X[x_i]$$

תוחלת של תוחלת (תכונה 1.10):

$$(1.13) \quad E[E[X]] = E[X]$$

הוכחה. מאחר ותוחלת זה מספר קבוע, ניתן להציב $E[X] = b$ ולהיעזר בנוסחא (1.10ב).

דוגמה 1.6: בהתאם לנוסחא (1.10ב) מתקיים,

$$(1.14) \quad E[XE[X]] = E[X] E[X] = E^2[X]$$

1.2.3 שונות (Variance)

מטרה: לאפיין פיזור של תוצאות ניסוי אקראי סביב לתוחלת.

שונות (הגדרה 1.8):

שונות של משתנה אקראי

$$(1.15) \quad \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$$

שונות - הגדרה חלופית (הגדרה 1.9):

$$(1.16) \quad \text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

הוכחה.

$$(1.17) \quad \begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E^2[X]\right] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E^2[X] \end{aligned}$$

תכונות השונות (תכונה 1.11): הכפלה בקבוע ושונות של קבוע:

$$(א1.18) \quad \text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$(ב1.18) \quad \text{Var}[b] = 0$$

הוכחה. ההוכחה היא במסגרת התרגיל 1.1.

תמיד מתקיים $\text{Var}[X] \geq 0$ באופן כללי, ^א

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\neq g(E[X]) \\ \text{Var}[g(x)] &\neq g(\text{Var}[X]) \end{aligned}$$

דוגמא:

$$\begin{aligned} E[X^2] &\neq E^2[X] \\ \text{Var}[X^2] &\neq \text{Var}^2[X] \end{aligned}$$

^אניתוח פורמלי של הקשרים בין $E[g(X)]$ לבין $g(E[X])$ נקרא Jensen's inequality.

1.2.4 חישוב מספרי

חישוב מתוך תוצאות הניסוי (תכונה 1.12): נתונות N תוצאות ניסוי אקראי $x_1, \dots, x_N$. במקרה הזה חישוב של תוחלת מוחלף ע"י חישוב ממוצע, באופן הבא.

$$(1.19) \quad E[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$(1.20) \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - E[X])^2$$

חישוב מעשי

אין הבדל בחישוב עבור תוצאות ניסוי, שהן רציפות או בדידות.

ישנן שיטות נוספות לחישוב שונות.

1.3 התפלגויות נפוצות

התפלגות (הגדרה 1.10):

מודל אקראי ייחודי שימושי/נפוץ, שקיבל שם בגלל חשיבותו. משמש לתיאור/אפיון של משתנה אקראי.

1.3.1 התפלגות Bernoulli

מטרה: לתאר ניסוי בעל 2 תוצאות אפשריות:

□ תוצאה "0" עם הסתברות $1 - p$.

□ תוצאה "1" עם הסתברות p .

PDF (הגדרה 1.11):

עבור $X \sim \text{Ber}(p)$ מתקיים (איור 1.1א)

$$\begin{aligned} p_X[k] &= \begin{cases} 1 - p & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases} \\ (1.21) \quad &= p^k (1 - p)^{k-1} \quad k = 0, 1 \\ &= (1 - p)\delta[k] + p\delta[k - 1] \end{aligned}$$

CDF (הגדרה 1.12):

עבור $X \sim \text{Ber}(p)$ מתקיים (איור 1.1ב)

$$(1.22) \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

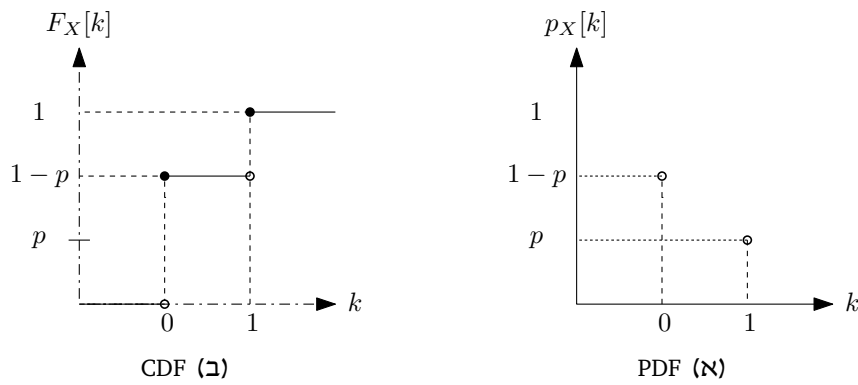
דוגמה 1.7: עבור "מטבע הוגן" $p = 0.5$.

דוגמה 1.8: חשב תוחלת ושונות של התפלגות Bernoulli.

תוחלת ושונות

פתרון:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_i x_i p_X[x_i] \\ &= (k = 0)p_X[0] + (k = 1)p_X[1] \\ &= 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p \\ \text{Var}[X] &= E[X^2] - E^2[X] \end{aligned}$$



איור 1.1: התפלגות Bernoulli

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{(k=0)^2 p_X[0] + (k=1)^2 p_X[1]}_{\text{משוואה (1.11)}} - p^2 \\
 &= 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p = p - p^2 \\
 &= p(1-p)
 \end{aligned}$$

1.3.2 התפלגות בינומית

מטרה: אפיון ניסוי אקראי, כאשר:

- נתונים n ניסויים בלתי תלויים.
- כל אחד בעל התפלגות Bernoulli עם סיכוי הצלחה p , $Ber(p)$.
- נדרשת ההתפלגות ל- k תוצאות "1" בדיוק, מתוך סה"כ n תוצאות.

PDF (הגדרה 1.13):

עבור $X \sim Bin(n, p)$ ניתן לפרק את החישוב ל-3 חלקים:

1. ישנם $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ אפשרויות ל- k הצלחות, מתוך n ניסויים.

2. הסתברות של k הצלחות (תוצאות "1") היא p^k .

3. הסתברות של $n-k$ כשלונות (תוצאות "0") היא $(1-p)^{n-k}$.

מתוך איחוד של שלושת ההסתברויות,

$$p_X[k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.23)$$

CDF (הגדרה 1.14):

אין ביטוי "סגור", אלא רק חישוב סכום של PDF ע"פ תכונה 1.2.1,

$$(1.24) \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} p_X[k] & 0 \leq x < n \\ 1 & n \leq x \end{cases}$$

סימון $\lfloor \cdot \rfloor$ מעל הסכום הוא עבור עיגול כלפי מטה.

תוחלת, שונות (הגדרה 1.15):

עבור $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$(1.25) \quad E[X] = np$$

$$(1.26) \quad \text{Var}[X] = np(1 - p)$$

קשר להתפלגות Bernoulli (תכונה 1.13): עבור ניסוי יחיד ($n = 1$), מתקיים הקשר $X \sim \text{Bin}(1, p) \Leftrightarrow X \sim \text{Ber}(p)$

דוגמה 1.9: זורקים קובייה 6 פעמים. חשב הסתברות לבדיק שתי תוצאות '6'.

פתרון: ניתן לנסח את הבעיה כסיכוי להצלחה של $k = 2$ ניסויים בדיק מתוך $n = 6$, כאשר סיכוי להצלחה בניסוי הוא $p = \frac{1}{6}$.

$$X \sim \text{Bin}\left(6, \frac{1}{6}\right)$$

$$p_X[2] = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{6-2} \approx 0.20$$

1.3.3 התפלגות גאומטרית

מטרה: עבור ניסויים אקראיים בעלי התפלגות Bernoulli, הסתברות להצלחה ("1") בניסוי k , אחרי רצף $(k - 1)$ פעמים של "0".

PDF, CDF, תוחלת, שונות (הגדרה 1.16):

עבור התפלגות גאומטרית, $X \sim \text{Geo}(p)$, מתקיים

$$(1.27) \quad p_X[k] = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(1.28) \quad F_X[k] = 1 - (1 - p)^k$$

$$(1.29) \quad E[X] = \frac{1}{p}$$

$$(1.30) \quad \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

דוגמה 1.10: מהי הסתברות לא לקבל תוצאה 6 ב-6 זריקות הראשונות של קוביה?

פתרון: נגדיר משתנה אקראי X שהוא מספר זריקות של הקוביה עד להופעת 6 הראשון.

$$\square \text{ סיכוי ל-6 דווקא בזריקה ראשונה הוא } p_X[1] = \frac{1}{6}$$

$$\square \text{ סיכוי ל-6 דווקא בזריקה שניה הוא סיכוי של לא 6 בזריקה ראשונה כפול סיכוי של בזריקה השניה, } p_X[2] = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\square \text{ סיכוי ל-6 דווקא בזריקה שלישית הוא } p_X[3] = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\square \text{ סיכוי ל-6 דווקא בזריקה שישית הוא } p_X[6] = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6}$$

לסיכום,

$$\begin{aligned} \Pr(X > 6) &= 1 - \Pr(X \leq 6) \\ &= 1 - (p_X[1] + p_X[2] + \dots + p_X[6]) \\ (1.31) \quad &= 1 - F_X(6) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 \approx 0.3349 \end{aligned}$$

mode (הגדרה 1.17):

ערך x_k , עבורו PDF מקבל ערך מקסימלי,

$$(1.32) \quad x_k = \underset{x_k}{\operatorname{argmax}} p_X[x_k]$$

חציון (median) (הגדרה 1.18):

ערך m עבורו מתקיים $\Pr(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ וגם $\Pr(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ בו-זמנית, נקרא ערך חציון.

קשר בין תוחלת לחציון (תכונה 1.14): ישנו אי שיוון מעניין, שמגדיר הפרש מקסימלי בין תוחלת לחציון,

$$(1.33) \quad |E[X] - m| \leq \sqrt{\text{Var}[X]},$$

דוגמה 1.11: ניתן להתרשם מחדשות, מה הערך של משכורת ממוצעת, ומה הערך של משכורת חציונית.

1.4 שאלות

1.1 הוכח את המשוואה (1.18א).

1.2 הסיכוי למספר טבעי מסויים k מתוך אוסף כל מספרים טבעיים $\{1, 2, 3, \dots\}$ נתון ע"י הסתברות

$$p[k] = \begin{cases} \frac{4}{7} & k = 1 \\ \frac{2}{7} & k = 2 \\ \left(\frac{1}{8}\right)^{k-2} & k \geq 3 \end{cases}$$

מהו הסיכוי עבור $p[K \geq 4]$?

1.3 (סימלציה) יש לעשות סימולציה לחישוב של תוצאת זריקה של זוג קוביות.

1.4 ניסוי אקראי מוגדר כזריקת מטבע הוגן n פעמים ברציפות.

(א) מהו הסיכוי ל- n אחדות ברצף?

(ב) חוזרים על הניסוי $N = 2^n$ פעמים. מהי הסתברות, שמתוך N תוצאות יהיה **לפחות פעם אחת** n אחדות ברצף.

(ג) חשב ערך מספרי של הסתברות זו עבור $n = 10$.

1.5 מערכת תקשורת מסויימת אמורה לעבוד עם סיכוי שגיאה של 10^{-3} , משמעותה שגיאה אחת ל-1000 ביט. לקוחות שונים החליטו לבדוק את הביצועים של המערכת:

(א) לקוח שידר 1000 ביט וקיבל 0 שגיאות.

(ב) לקוח שידר 1000 ביט וקיבל 1 שגיאות.

(ג) לקוח שידר 1000 ביט וקיבל 3 שגיאות.

שאלות:

(א) מהי הסתברות עבור התוצאה של לקוח א'?

(ב) מהי הסתברות עבור התוצאה של לקוח ב'?

(ג) מהי הסתברות עבור 3 שגיאות או יותר עבור לקוח ג'?

1.6 בשנת 2023 נתוני השכר בישראל הם:

□ שכר **ממוצע** של 8,027 ש"ח

□ שכר **חציוני** של 6,543 ש"ח.

המשמעות היא:

(א) רוב האנשים מקבלים שכר יותר נמוך משכר מומצע.

(ב) רוב האנשים מקבלים שכר יותר גבוה משכר מומצע.

- (ג) בקירוב, חצי האנשים מקבלים שכר מעל הממוצע, וחצי מתחת.
- (ד) רוב האנשים מקבלים שכר יותר נמוך משכר חציוני.
- (ה) רוב האנשים מקבלים שכר יותר גבוה משכר חציוני.
- (ו) בקירוב, חצי האנשים מקבלים שכר מעל ערך חציוני, וחצי מתחת.

1.7 נתונות זוג קוביות. מהי ההסתברות לתוצאה (6, 6) בנסיבות הבאות:

- (א) רק אחרי לפחות 10 זריקות קוביה, או יותר?
- (ב) לפחות פעם אחת (פעם אחת או יותר), מתוך 10 זריקות.
- (ג) רק פעם אחת בלבד, מתוך 10 זריקות.

פרק 2

משתנה אקראי רציף

מטרה: לאפיין בצורה מתמטית תוצאה של ניסוי אקראי בעל תוצאות רציפות.

תוכן הפרק

2.1	אפיון	19
2.2	התפלגויות	21
2.2.1	התפלגות אקספוננציאלית (מעריכית)	21
2.2.2	התפלגות אחידה	23
2.2.3	התפלגות גאוסית	25
2.3	היסטוגרמה	27
2.3.1	סוג count	27
2.3.2	סוג probability	28
2.3.3	סוג pdf	29
2.3.4	סיכום	31
2.4	שאלות	31

2.1 אפיון

מטרה: לחדד הבדלים בין משתנים בדידים ורציפים.

CDF (הגדרה 2.1):

הגדרה של CDF (הגדרה 1.2.1) זהה בין משתנים בדידים ורציפים: הסתברות, שערך משתנה אקראי X קטן או שווה מערך הנתון x ,

(2.1)
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PDF רציף (תכונה 2.1): עבור PDF רציף מתקיים

(2.2)
$$\Pr(X \leq x) = \Pr(X < x)$$

Probability density function (PDF) (הגדרה 2.2):

נניח פונקציית CDF גזירה עבור כל ערכי x . נוכל להגדיר,

$$(2.3) \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$(2.3) \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(p) dp$$

הסתברות על מקטע (תכונה 2.2): בהתבסס על הגדרת PDF/CDF

$$(2.4) \quad \Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

תכונות PDF (תכונה 2.3): תחום ערכים ו"סכום" ערכים

$$(2.5) \quad f_X(x) \geq 0$$

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 = F_X(\infty)$$

המשמעות של PDF של משתנה אקראי בדיד, ומשמעות של CDF היא **הסתברות**. לעומת זאת, עבור משתנה אקראי רציף יכול להתקיים $f_X(x) > 1$.

של PDF
משתנה אקראי
לא מייצג
הסתברות
באופן ישיר!

הסתברות לערך בודד (תכונה 2.4): מאחר ומדובר באינסוף ערכים,

$$(2.6) \quad p(X = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

ניתן לרשום PDF של משתנה בדיד ע"י פונקציה רציפה מהצורה

$$(2.7) \quad f_X(x) = \sum_k p_X[x_k] \delta(x - x_k).$$

רישום מקשר בין $F_X(x)$ קבועה למקוטעים של משתנה אקראי בדיד, לבין הנגזרת שלו, שהיא ה-PDF.

תוחלת (הגדרה 2.3):

תוחלת של משתנה אקראי רציף

$$(2.8) \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

תוחלת של פונקציה של משתנה אקראי (תכונה 2.5):

$$(2.9) \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

מאחר וחישוב השונות (פרק 1.2.3) מתבסס על נוסחאת תוחלת, הוא זהה לבין משתנים בדידים ורציפים.

mode (הגדרה 2.4):

ערך x_0 , עבורו PDF מקבל ערך מקסימלי,

$$(2.10) \quad x_0 = \operatorname{argmax}_x f_X(x)$$

הגדרה של ערך חציוני זהה עבור משתנים בדידים ורציפים.

2.2 התפלגויות

2.2.1 התפלגות אקספוננציאלית (מעריכית)

מטרה: לאפיין תופעות עבורם הסתברות משתנה באופן אקספוננציאלי (עם הזמן).

PDF (הגדרה 2.5):

עבור $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ מתקיים[⌘]

$$(2.12) \quad f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

[⌘] בספרות (וגם ב-Matlab) מופיעה הגדרה נוספת:

$$(2.11) \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases},$$

כאשר נתון ערך $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

דוגמה 2.1: חשב תוחלת של X , כאשר $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

תוחלת

פתרון:

$$(2.13) \quad E[X] = \lambda \int_0^\infty x \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

שונות (תכונה 2.6): כאשר $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

שונות

$$(2.14) \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

הוכחה.

$$E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 \exp(-\lambda x) dx$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left[-2e^{-y} - 2ye^{-y} - y^2e^{-y} \right]_0^\infty = \frac{2}{\lambda^2}$$

mode (תכונה 2.7): $x = 0$

median (תכונה 2.8): $x = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

דוגמה 2.2: חשב CDF של X , כאשר $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

CDF

פתרון:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \\ (2.15) \quad &= \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

דוגמה 2.3: מודל של הופעת תקלות במערכת מסויימת מתוארת ע"י התפלגות $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, כאשר $\lambda = \frac{1}{1000} \left[\frac{1}{\text{שעה}} \right]$. שאלות:

יש יחידות
פיזיקליות ל- λ

(א) מהו זמן ממוצע לתקלה?

(ב) מהו סיכוי לתקלה במרווח זמן $[1000, \infty]$?

(ג) מהו סיכוי לתקלה ב-100 שעות הראשונות של הפעילות?

(ד) מהו סיכוי לתקלה אחרי 100 שעות ולפני 1000 שעות (מרווח זמן $[100, 1000]$)?

(ה) מהו משך הזמן עבורו הסיכוי לתקלה הוא $\frac{1}{2}$?

פתרון: משתנה אקראי X מתאר זמן תקלה.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1000 [\text{שעות}]$$

$$\Pr(X > 1000) = 1 - F_X(1000) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{1000}{1000}\right) \right] \approx 0.36$$

$$\Pr(X \leq 100) = F_X(100) \approx 0.0953$$

$$\begin{aligned} \Pr(100 \leq X \leq 1000) &= F_X(1000) - F_X(100) \\ &= 0.6321 - 0.0953 \approx 0.537 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq x) &= \Pr(X > x) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow F_X(x) &= 1 - F_X(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{1000}} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 693[\text{שעה}]$$

קשר להתפלגות גאומטרית (תכונה 2.9): אם $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, ומתקיים הקשר

$$Y = \lfloor X \rfloor,$$

$Y \sim \text{Geo}(1 - \exp(-\lambda))$, כאשר $\lfloor \cdot \rfloor$ מסמל עיגול למספר השלם כלפי מטה.

2.2.2 התפלגות אחידה

מטרה: מודל של תופעות בעלי אותה הסתברות על מקטע רציף.

PDF (הגדרה 2.6):

עבור $X \sim U[a, b]$ מתקיים (איור 2.1א)

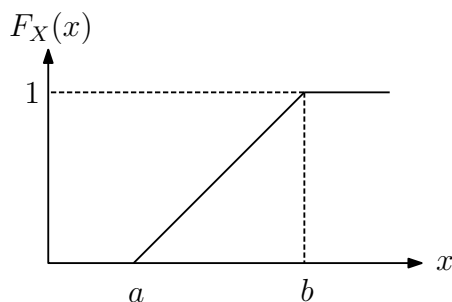
$$(2.16) \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור $X \sim U(a, b)$ יש להחליף $\leq$ ל- $<$.

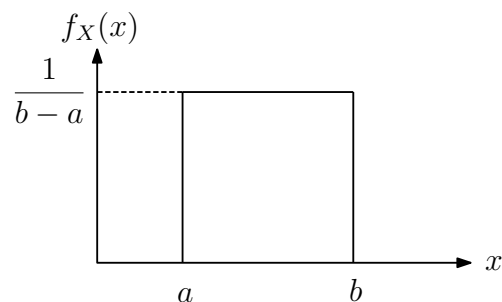
CDF (הגדרה 2.7):

עבור $X \sim U[a, b]$ מתקיים (איור 2.1ב)

$$(2.17) \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$



CDF (ב)



PDF (א)

איור 2.1: התפלגות אחידה

דוגמה 2.4: יש לחשב תוחלת של X , כאשר $X \sim U[a, b]$.

תוחלת

התפלגות
אחידה

פתרון: בהתאם לחישוב ע"פ הגדרה

$$(2.18) \quad E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

דוגמה 2.5: יש לחשב תוחלת של $E[X^2]$, כאשר $X \sim U[a, b]$.

פתרון:

$$(2.19) \quad E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

דוגמה 2.6: יש לחשב $\text{Var}[X]$, כאשר $X \sim U[a, b]$.

פתרון:

$$(2.20) \quad \text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

קשר בין הדוגמאות, שהוא קיצור דרך בהרבה תרגילים, ע"פ הגדרה של השונות:

$$E[X^2] = \text{Var}[X] + E^2[X]$$

דוגמה 2.7: יש לחשב ערך חציון.

פתרון: ניתן לזהות בקלות, שמתקיים

$$(2.21) \quad \Pr(X \geq E[X]) = \Pr(X \leq E[X]) = \frac{1}{2}$$

דוגמאות לעיל מסכמות את התכונות של התפלגות אחידה.

דוגמה 2.8: נתון

$$X \sim U[0, 2]$$

$$Y = X^2$$

יש לחשב $E[Y]$, $\text{Var}[Y]$.

פתרון:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X^2] = \text{Var}[X] + E^2[X] \\ &= \int_0^2 x^2 \frac{1}{2-0} dx = \frac{4}{3} \\ E[Y^2] &= E[X^4] = \int_0^2 x^4 \frac{1}{2-0} dx = \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{16}{5} \\ \text{Var}[Y] &= E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{16}{5} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{45} \end{aligned}$$

שונות

להתפלגות אחידה קיימת גם גרסה בדידה (כגון תיאור של תוצאת זריקת קוביה).

2.2.3 התפלגות גאוסית

מטרה: מודל של תופעות רבות בטבע. שימושי ביותר בזכות משפט הגבול המרכזי, הגורס כי סכום של מספר מספיק גדול של משתנים אקראיים מתפלג בקירוב גאוסית.

PDF (הגדרה 2.8):

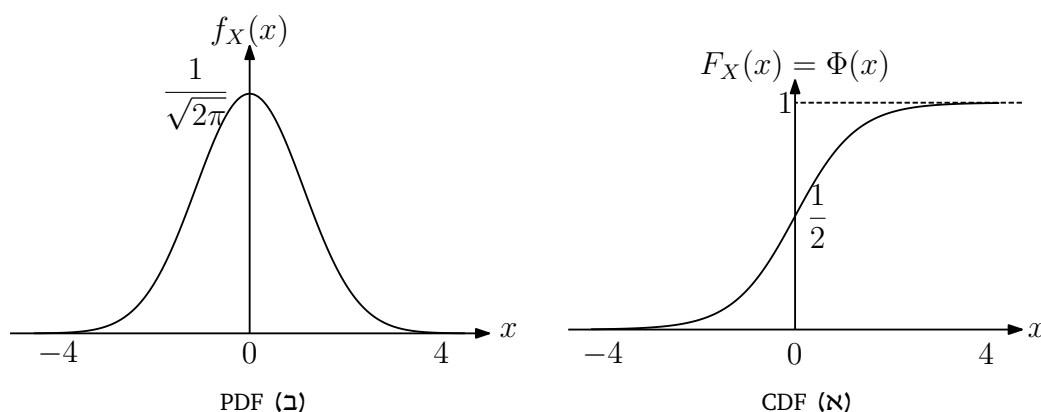
עבור משתנה אקראי גאوسی $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, בעל תוחלת μ ושונות σ^2 , מתקיים (איור 2.2א, עבור $\mu = 0, \sigma = 1$).

$$(2.22) \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

CDF (הגדרה 2.9):

ניתן לחישוב נומרי (מספרי) בלבד.

עבור מקרה פרטי של $N(0, 1)$, מסומן ע"י $\Phi(x)$ (איור 2.2ב).



איור 2.2: התפלגות גאוסית עבור $X \sim N(0, 1)$

הוספת קבוע וכפל בקבוע (תכונה 2.10):

$$(2.23א) \quad X \sim N(0, b) \Rightarrow \sigma X \sim N(0, b\sigma^2)$$

$$(2.23ב) \quad X \sim N(a, 1) \Rightarrow \mu + X \sim N(a + \mu, 1)$$

$$(2.23ג) \quad X \sim N(0, 1) \Rightarrow \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

מעבר ל- $N(0, 1)$ (תכונה 2.11):

$$(2.24) \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \Pr(Y < a) = \Phi \left(\frac{a - \mu}{\sigma} \right)$$

הוכחה.

$$(2.25) \quad Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

$$(2.26) \quad \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim N(0, 1)$$

Q-function (הגדרה 2.10):עבור $X \sim N(0, 1)$, ניתן להגדירשימושי מאוד
במקום CDF

$$(2.27) \quad Q(x) = \Pr(x < X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds.$$

מאפיינים של Q-function (תכונה 2.12):

$$(א2.28) \quad Q(x) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$$

$$(ב2.28) \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$

$$(ג2.28) \quad Q(0) = \frac{1}{2}$$

עבור תוחלת ושונות שרירותיים (תכונה 2.13): בהניתן משתנה אקראי גאوسی,
 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$(2.29) \quad \Pr(Y > y) = Q\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

דוגמה 2.9: נתון קשר

$$Y = X + a,$$

כאשר a הוא קבוע, $X \sim N(0, \sigma^2)$. מהי הסתברות $\Pr(Y \leq 0)$?

פתרון: בהתאם לאיור 2.3

$$Y \sim N(a, \sigma^2)$$

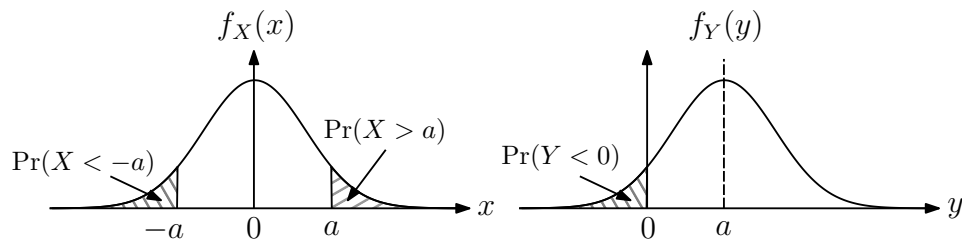
$$\begin{aligned} \Pr(Y < 0) &= F_Y(0) = \Phi\left(\frac{0 - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right) \\ &= Q\left(\frac{a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

הפתרון המספרי חלופי הוא ע"י ביצוע של מספר מספיק גדול של ניסויים אקראיים. שלבים:

□ להגדיל N ערכים של משתנה אקראי X .□ לחשב Y .

□ לבדוק מספר תוצאות ניסויים העומדים בקריטריון $Y < 0$. נסמן את התוצאה ב- n .

$$\Pr(Y < 0) \approx \frac{n}{N} \quad \square$$



איור 2.3: ציור נלווה לדוגמה 2.9.

משפט הגבול המרכזי (תכונה 2.14): נתונים n משתנים אקראיים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות כלשהי $X_1, X_2, \dots, X_n$, בעלי תוחלת μ ושונות σ^2 . בהתאם למשפט, הממוצע מתפלגת גאוסית

$$(2.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$$

בפועל, עבור $n \gtrsim 30$, המשפט יתקיים בקירוב סביר עבור כל סוג התפלגות, לרבות התפלגויות בדידות.

למה גאוסית כזה נפוץ?

2.3 היסטוגרמה

מטרה: שיערוך/הצגה של PDF/CDF מתוך תוצאות הניסוי.

2.3.1 סוג count

מטרה: הצגה של מספר תוצאות ניסוי מכל סוג.

נתון ניסוי:

□ בעל k תוצאות אפשריות $x_1, x_2, \dots, x_k$, כאשר ערך של k הוא יחסית קטן.

□ סה"כ N תוצאות ניסוי

□ בניסוי התקבלו:

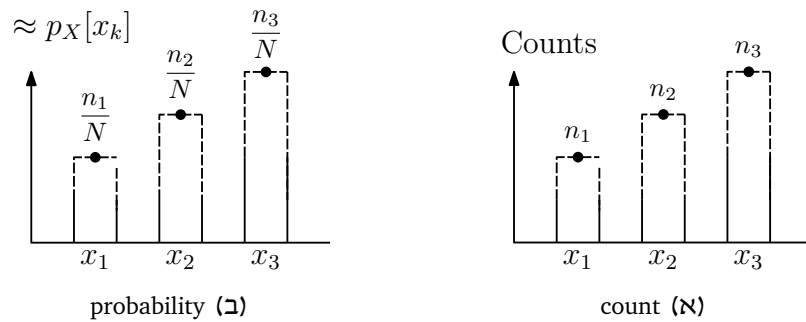
- n_1 תוצאות מסוג x_1 ,

- n_2 תוצאות מסוג x_2 ,

- ... וכך הלאה.

$$\text{כאשר } \sum_i n_i = N.$$

דרך גרפית להציג את תוצאות הניסוי היא בדוגמאת איור 2.4(א).



איור 2.4: דוגמא להיסטוגרמה מסוג: count (א), probability (ב).

2.3.2 סוג probability

מטרה: הצגה של שכיחות יחסית של תוצאות ניסוי, שהוא קירוב ל-PDF.

קירוב ל-PDF (תכונה 2.15): הסתברות של תוצאה מסויימת היא יחסית למספר תוצאות הניסוי עם אותה תוצאה חלקי סה"כ הניסויים,

$$(2.31) \quad p_X[x_i] \approx \frac{n_i}{N} \quad i = 1, \dots, k$$

ניתן להראות, שהתוצאה המתקבלת מקיימת דרישה לתחום וסכום ערכים (תכונות 1.2.1, 1.2.1).
כמובן, תמיד עדיף $N \rightarrow \infty$.

דרך גרפית להציג את תוצאות הניסוי היא בדוגמאת איור 2.4(ב).

מספר תוצאות ניסוי גדול

עבור k גדול (מאות ויותר) ישנם 2 בעיות מרכזיות:

□ קושי להציג תוצאות בצורה נוחה

□ מיעוט תוצאות מסוגים מסויימים בגלל התסברות יחסית נמוכה שלהם.

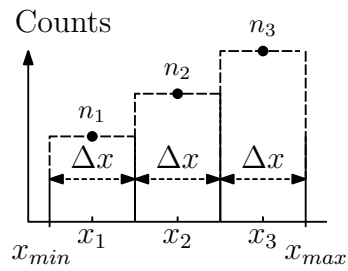
הדרך להציג תוצאות הניסוי היא באופן הבא:

1. נסמן ערכים מקסימליים ומינימליים (הגדולים והמזעריים) ע"י x_{max}, x_{min} .

2. נחלק את המקטע $[x_{min}, x_{max}]$ ל- k מקטעים ברוחב אחיד של Δx .

3. נסמן ב- n_1 את מספר התוצאות שהתקבלו במקטע הראשון, ב- n_2 את מספר התוצאות במקטע השני, וכך הלאה.

דוגמא להיסטוגרמה מסוג count מופיע באיור 2.5.



איור 2.5: היסטוגרמה מסוג count עבור מספר גדול של תוצאות ניסוי.

2.3.3 סוג pdf

מטרה: קירוב ל-PDF של משתנה רציף.

אופן חישוב

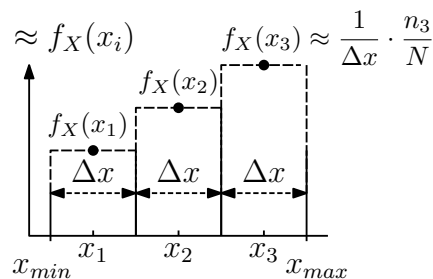
בנוסף לשיטה של קבלת ערכי n_i ע"י חלוקה למקטעים, ישנה דרך נוספת, שהיא קירוב ל-PDF סוג שלישי של מתנה רציף.

קירוב ל-PDF של משתנה אקראי רציף ע"י היסטוגרמה (תכונה 2.16):

$$(2.32) \quad f_X(x_i) \approx \frac{n_i}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} \quad i = 1, \dots, k$$

יש לשים לב לגורם נירמול של $1/\Delta x$ המבדיל ממקרה של משתנה בדיד במשוואה (2.31).

דוגמה גרפית מופיע באיור 2.6.



איור 2.6: היסטוגרמה מסוג pdf.

דוגמה 2.10: נתונות תוצאות של ניסוי אקראי,

$$[16, 98, 96, 49, 81, 14, 43, 92, 80, 96]$$

מעוניינים להציג את ה-PDF של התוצאות בצורה גרפית ע"י היסטוגרמה בעלת 3 נקודות חישוב ($k = 3$).

פתרון:

$$N = 10$$

$$x_{\min} = 14, \quad x_{\max} = 98$$

$$x_{\max} = x_{\min} + k\Delta x = 98 \Rightarrow \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{84}{3} = 28$$

מספר תוצאות בכל מקטע:

$$n_1 = 2, \quad \leftarrow \{14, 16\} \in [x_{\min}, x_{\min} + \Delta x] = [14, 42]$$

$$n_2 = 2 \quad \leftarrow \{43, 49\} \in [x_{\min} + \Delta x, x_{\min} + 2\Delta x] = (42, 70]$$

$$n_3 = 6 \quad \leftarrow \{80, 81, 92, 96, 96, 98\} \in [x_{\max} - \Delta x, x_{\max}] = (70, 98]$$

כאשר $n_3 = 10 - n_1 - n_2$ מרכזים של כל מקטע

$$x_1 = x_{\min} + \Delta x/2 = 28$$

$$x_2 = x_{\min} + \Delta + \Delta x/2 = 56$$

$$x_3 = x_{\min} + 2\Delta + \Delta x/2 = x_{\max} - \Delta x/2 = 84$$

לסיכום,

$$f_X(x_i) \approx \frac{n_i}{N \cdot \Delta x} = n_i \frac{1}{10 \cdot 28}$$

תאוריה והוכחה

מבוסס על העיקרון של

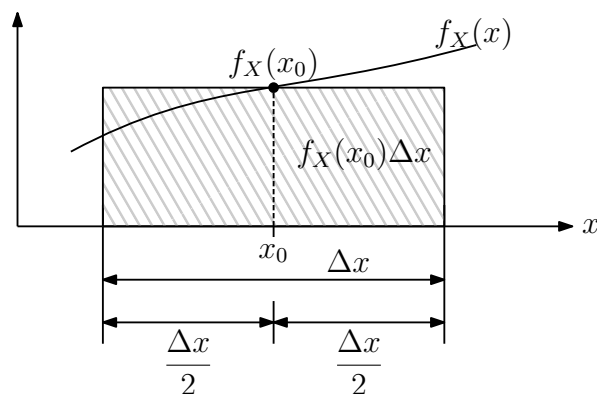
$$(2.33) \quad \Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

ניתן לחשב את ההסתברות בקירוב ע"י (איור נלווה 2.7):

$$(2.34) \quad p\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \int_{\Delta x} f_X(x) dx$$

$$(2.35) \quad \approx f_X(x_0) \Delta x$$

$$(2.36) \quad f_X(x_0) \approx p\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{1}{\Delta x}$$



איור 2.7: איור נלווה להצגת עיקרון היסטוגרמה.

הסתברות עבור מקטע (תכונה 2.17): הערך של $p\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ הוא מספר יחסי של תוצאות הניסוי (שכיחות יחסית) במקטע ברוחב Δx ועם המרכז בנקודה x_0 .

עבור מקטע i עם נקודה מרכזית x_i , ההסתברות להיות בתוך המקטע היא בקירוב (דומה מאוד למשוואה (2.31))

$$(2.37) \quad p\left(x_i - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx \frac{n_i}{N} \quad i = 1, \dots, k$$

ההצבה של המשוואה (2.37) בתוך משוואה (2.36) היא בסיס לתכונה 2.3.3.

ניתן להשתמש לבניית הסטוגרמה בנוסחא (2.37), ופירושה יהיה הסתברויות עבור כל אחד מהמקטעים. החיסרון הוא חוסר יכולת להשוות את התוצאה להתפלגויות רציפות, בעלי ערכי PDF מנורמלים.

2.3.4 סיכום

שלושה סוגי היסטוגרמה דרכים להצגה של התוצאות הניסוי:

- גרף של ערכי n_i (בשפות תכנות בד"כ מסומן ב-"count").
- גרף של ערכי n_i/N (בשפות תכנות בד"כ מסומן ב-"probability").
- גרף של ערכי $\frac{n_i}{N\Delta x}$ (בשפות תכנות בד"כ מסומן ב-"pdf" או "density").

2.4 שאלות

2.1 (חישוב הסתברות) נתונה פונקציית PDF של משתנה אקראי X , מהצורה

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{2x}; \quad -\infty < x < \ln(a)$$

יש למצוא:

(א) ערך של המקדם a

(ב) $F_X(x)$

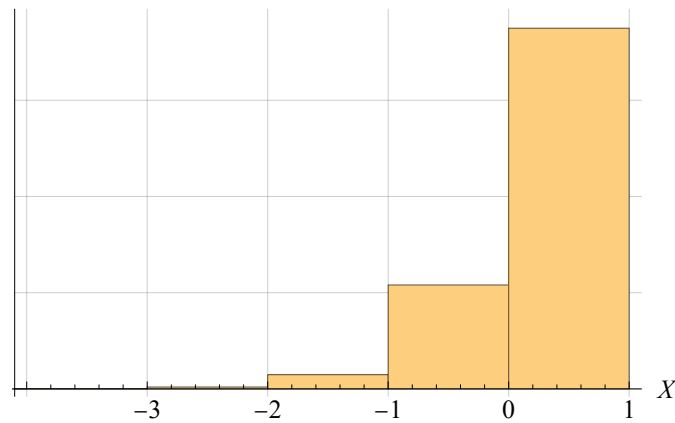
(ג) $E[X]$

(ד) $E[X^2]$

(ה) $\Pr(X < 0)$

(ו) ערך חציון

(ז) נתונה היסטוגרמה (איור 2.8) עבור ערכים אקראיים המתפלגים לפי X . ציר x מחושב עם מרווחים של $\Delta x = 1$, כמתואר באיור 2.8.



איור 2.8: היסטוגרמה של משתנה X .

עבור ההיסטוגרמה, יש לחשב את הערכים הבאים:

(1) מהו מספר הערכים התאורטי במרווח בין 0 ל-1 בתוך ההיסטוגרמה, מתוך סה"כ 100,000 הערכים (סוג count)?

(2) מהי הסתברות לערכים במרווח בין 0 ל-1, בתוך ההיסטוגרמה (סוג probability)?

(3) מהו הערך התאורטי של $\hat{f}_X(0.5)$ עבור ההיסטוגרמה (סוג pdf)?

תזכורת:

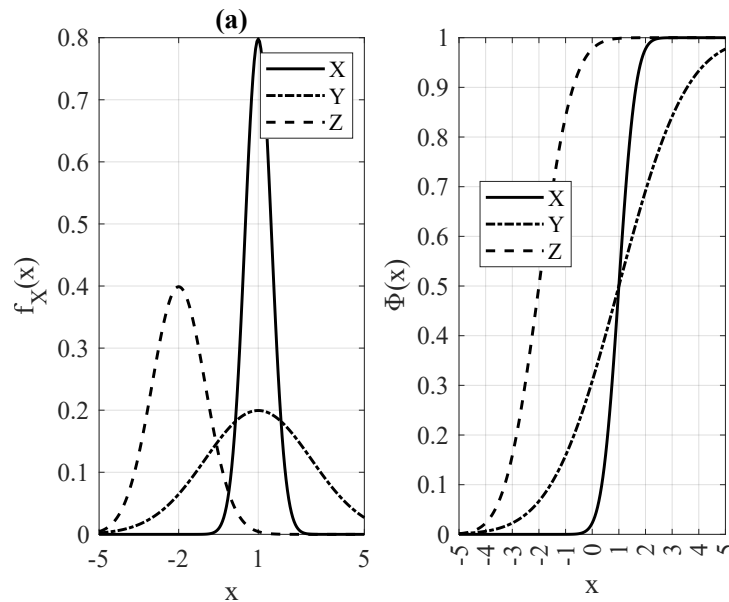
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x \rightarrow 0, \quad e^{\ln(a)} = a, \quad \ln(2) \approx 0.69314718$$

2.2 נתונים גרפים של CDF של משתנים אקראיים גאומיים.

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$$



(א) ציין מהי התוחלת של כל אחד מהמשתנים, μ_X, μ_Y, μ_Z . יש לנמק את תשובתך!

(ב) סדר את הגרפים לפי ערך סטיית תקן שלהם $i, j, k \in \{X, Y, Z\}$, $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_k$, בסדר יורד. יש לנמק את תשובתך!

2.3 (כולל סימולציה) נתונים משתנים אקראיים,

$$(2.38) \quad X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$(2.39) \quad Y = X^2 + 1$$

(א) חשבו $E[Y], \text{Var}[Y]$.

(ב) עבור $\lambda = 1/2$, שרטטו $E[Y], \text{Var}[Y]$ מחושבים ע"י סימולציה נומרית, כפונקציה של מספר ניסויים אקראיים $N \leq 10^6$. השתמשו בציר לוגריתמי עבור N . השוו ערכים המתקבלים לתוצאות אנליטיות שהתקבלו בסעיף הקודם.

(ג) שרטטו PDF המתקבל של Y ע"י היסטוגרמה.

2.4 (סימולציה) הגרל רצף מספרים בעלי התפלגות Bernoulli, $X \sim \text{Ber}(p)$. ספור מספר הגרלות ברצף עד להופעת 1 הראשון. שרטט התפלגות (PDF) של מספר ההגרלות המתקבל. השווה את התוצאה ל-PDF של התפלגות גאומטרית.

2.5 (סימולציה) נתון $X \sim U[0, 1]$. יש להראות ע"י סימולציה את הקשר

$$\Pr\left(X^{\frac{1}{4}} < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = 0.0625$$

פרק 3

זוג משתנים אקראיים

מטרה: לאפיין ניסוי אקראי בעל שתי תוצאות (בדידות או רציפות), והקשר בין התוצאות האלה.

תוכן הפרק

34	3.1	משתנים אקראיים בדידים	34
34	3.1.1	אפיון משותף	34
35	3.1.2	התפלגות שולית	35
37	3.1.3	אי תלות סטטיסטית	37
38	3.2	משתנים אקראיים רציפים	38
38	3.2.1	אפיון משותף	38
40	3.2.2	תוחלת	40
41	3.2.3	התפלגות אחידה	41
42	3.3	שונות משותפת	42
42	3.3.1	הקדמה	42
46	3.4	שאלות	46

3.1 משתנים אקראיים בדידים

3.1.1 אפיון משותף

ניתן להגדיר **התפלגות משותפת** (joint distribution) של זוג משתנים אקראיים באופן הבא: **התסברות עבור זוג תוצאות**

PDF (הגדרה 3.1):

התסברות עבור תוצאת ניסוי בעלת זוג ערכים, המוגדרת עבור כל ערכים האפשריים של התוצאות,

(3.1)
$$p_{XY}[x_k, y_j] = p[X = x_k, Y = y_j]$$

כאשר מדובר בכל קומבינציות האפשריות של j, k . בעצם מדובר בחיתוך מאורעות $\{X = x_k\} \cap \{Y = y_j\}$

תכונות PDF (תכונה 3.1): תחום ערכים ו"סכום" ערכים

$$(א3.2) \quad 0 \leq p_{XY}[x_k, y_j] \leq 1 \quad \forall i, k$$

$$(ב3.2) \quad \sum_{j,k} p_{XY}[x_k, y_j] = 1$$

כאשר הסכימה היא עבור כל קומבינציות האפשריות של j, k .

דוגמה 3.1: עבור תוצאת של זריקה של 2 קוביות, מתקבל הביטוי

$$(3.3) \quad p_{XY}[x_k, y_j] = \Pr[X = j] \cdot \Pr[Y = k] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

CDF (הגדרה 3.2):

CDF של התפלגות משותפת

$$(3.4) \quad F_{XY}(x, y) = p(X \leq x, Y \leq y)$$

קשר בין PDF ל-CDF (תכונה 3.2): הקשר דומה מאוד למקרה של משתנה יחיד ונתון ע"י

$$(3.5) \quad F_{XY}(x, y) = \sum_{\substack{j,k \\ x_k \leq x \cap y_j \leq y}} p_{XY}[x_k, y_j]$$

תוחלת של פונקציה של משתנים אקראיים (תכונה 3.3):

$$(3.6) \quad E[g(X, Y)] = \sum_j \sum_k g(x_k, y_j) p_{XY}[x_k, y_j]$$

דוגמה 3.2: מקרה פרטי הנפוץ:

$$(3.7) \quad E[XY] = \sum_j \sum_k x_k y_j p_{XY}[x_k, y_j]$$

3.1.2 התפלגות שולית

מטרה: לקבל/לאפניין PDF/CDF של כל אחד מהמשתנים בנפרד, מתוך PDF/CDF משותף,

$$p_{XY}[x_k, y_j] \rightarrow p_X[x_k], p_Y[y_j]$$

$$F_{XY}(x, y) \rightarrow F_X(x), F_Y(y)$$

התפלגות שולית (הגדרה 3.3):

התפלגות שולית (marginal distribution)

$$(א3.8) \quad p_X[x_k] = \sum_j p_{XY}[x_k, y_j]$$

$$(ב3.8) \quad p_Y[y_j] = \sum_k p_{XY}[x_k, y_j]$$

$$(ג3.8) \quad F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$$

$$(ד3.8) \quad F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

מהתפלגות
דו-ממדית
לחד-ממדית

דוגמה 3.3: לניסוי 5 זוגות של תוצאות אפשריות, בעלי הסתברות זהה:

x_k	y_j	$p_{XY}[x_k, y_j]$
1	1	1/5
1	2	1/5
1	3	1/5
2	1	1/5
2	2	1/5

(א) יש למצוא הסתברויות $p_X[1], p_Y[3]$.(ב) יש למצוא $F_{XY}(1.5, 2.5)$.(ג) יש למצוא $E[X], E[X^2], \text{Var}[X], E[Y], E[Y^2], \text{Var}[Y], E[XY]$.

פתרון: בהתאם לנוסחא של הסתברות שולית,

$$p_X[1] = \sum_j p_{XY}[1, y_j] = p_{XY}[1, 1] + p_{XY}[1, 2] + p_{XY}[1, 3] = \frac{3}{5}$$

$$p_Y[3] = \sum_k p_{XY}[x_k, 3] = p_{XY}[1, 3] + p_{XY}[2, 3] = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5}$$

$$\{x_k \leq 1.5\} \cap \{y_j \leq 2.5\} = (1, 1), (1, 2)$$

$$F_{XY}(1.5, 2.5) = p_{XY}[1, 1] + p_{XY}[1, 2] = \frac{2}{5}$$

$$E[X] = \sum_i x_i p_X[x_i] \quad \leftarrow \text{הגדרה 1.2.2}$$

$$= 1 \cdot p_X[1] + 2 \cdot p_X[2] = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 p_X[x_i]$$

$$= 1^2 \cdot p_X[1] + 2^2 \cdot p_X[2] = 1 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{11}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$$

$$E[Y] = 1 \cdot p_Y[1] + 2 \cdot p_Y[2] + 3 \cdot p_Y[3] = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$E[Y^2] = 1^2 \cdot p_Y[1] + 2^2 \cdot p_Y[2] + 3^2 \cdot p_Y[3] = \frac{19}{5}$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{19}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

$$E[XY] = \sum_j \sum_k x_k y_j p_{XY}[x_k, y_j] \quad \leftarrow \text{משוואה (3.7)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$$

מאחר ומצב $X = 2, Y = 3$ לא מופיע בטבלה, היסתברותו היא אפס.

3.1.3 אי תלות סטטיסטית

מטרה: לאפיין מצב של תוצאות ניסוי בלתי תלויות.

משתנים בלתי תלויים סטטיסטית (הגדרה 3.4):

משתנים X, Y נקראים בלתי תלויים סטטיסטית אם ורק אם מתקיים

$$(א3.9) \quad p_{XY}[x_k, y_j] = p_X[x_k]p_Y[y_j]$$

$$(ב3.9) \quad F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

בלתי תלויים

השאלה היא, האם ניתן לקבל מתוך התפלגויות שוליות התפלגות המשותפת, $p_{XY}[x_k, y_j] \stackrel{?}{\leftarrow} p_X[x_k]p_Y[y_j]$

□ התפלגות משותפת $\Leftarrow$ התפלגות שולית.

□ התפלגות משותפת $\Leftrightarrow$ התפלגות שולית רק במקרה של משתנים בלתי תלויים (חץ דו-כיווני).

דוגמה 3.4: זוג משתנים בדוגמא 3.3 הם תלויים, מאחר ולא ניתן לקבל התפלגות משותפת מהתפלגויות שוליות.

דוגמה 3.5: עבור זוג ניסויי Bernoulli בלתי תלויים, $X, Y \sim \text{Ber}(p)$, מהו $p_{XY}[x_k, y_j], F_{XY}(x, y)$

פתרון: בדיקה, האם התפלגות משותפת היא מכפלה של התפלגויות שוליות,

$$(א3.10) \quad p_{XY}[0, 0] = p_X[0]p_Y[0] = (1-p)^2$$

$$(ב3.10) \quad p_{XY}[0, 1] = p_X[0]p_Y[1] = (1-p)p$$

$$(ג3.10) \quad p_{XY}[1, 0] = p_X[1]p_Y[0] = p(1-p)$$

$$(ד3.10) \quad p_{XY}[1, 1] = p_X[1]p_Y[1] = p^2$$

התפלגות שולית ניתן לראות גם כסכימה לפי שורה או עמודה בטבלה. כמובן שהתפלגות

שולית היא התפלגות Bernoulli, מאחר ומדובר במשתנים בלתי תלויים.

$$(3.11) \quad p_X[0] = p_{XY}[0, 0] + p_{XY}[0, 1] = (1-p)^2 + (1-p)p = 1-p$$

$$(3.11) \quad p_X[1] = p_{XY}[1, 0] + p_{XY}[1, 1] = (1-p)p + p^2 = p$$

:CDF

$$(3.12) \quad F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, y < 0 \\ p_{XY}[0, 0] & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ p_{XY}[0, 0] + p_{XY}[0, 1] & 0 \leq x < 1, 1 \leq y \\ p_{XY}[0, 0] + p_{XY}[1, 0] & 1 \leq x, 0 \leq y < 1 \\ 1 & 1 \leq x, 1 \leq y \end{cases}$$

כמובן, הפונקציה רציפה מימין.

		X	
		0	1
Y	0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
	1	$(1-p)p$	p^2

3.2 משתנים אקראיים רציפים

מטרה: לאפיין ניסוי אקראי בעל שתי תוצאות רציפות, והקשר בין התוצאות האלה.

דוגמה 3.6: דוגמאות לניסויים אקראיים בעל שתי תוצאות רציפות:

□ גובה ומשקל של הנוכחים בכיתה

□ קריאות "רועשות" של מתח וזרם על אותו נגד.

3.2.1 אפיון משותף

CDF (הגדרה 3.5):

הגדרה של CDF זהה עבור התפלגויות משותפות רציפות ובדידות

$$(3.13) \quad F_{XY}(x, y) = p(X \leq x, Y \leq y)$$

PDF (הגדרה 3.6):

הקשר בין CDF ל-PDF

$$(3.14) \quad f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

קשר בין PDF ל-CDF (תכונה 3.4):

$$(3.15) \quad F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(s, p) dp ds$$

תכונות PDF (תכונה 3.5): תחום ערכים ו"סכום" ערכים

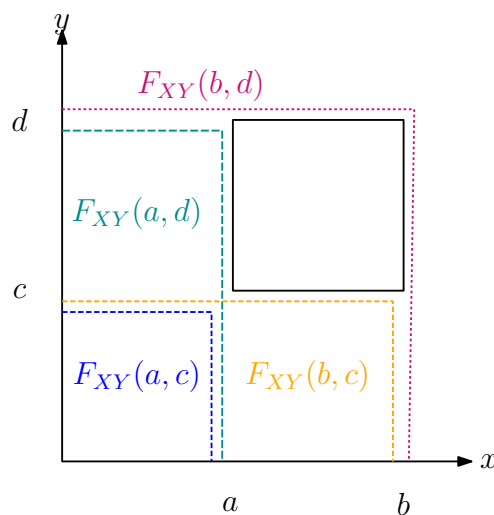
$$(3.16) \quad f_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$(3.16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 = F_{XY}(\infty, \infty)$$

דוגמה 3.7: נתון מלבן $B = (a, b] \times (c, d]$. בהינתן $F_{XY}(x, y)$, חשב הסתברות $p(X, Y \in B)$.

פתרון: בהמשך לאיור 3.1,

$$(3.17) \quad \begin{aligned} p(X, Y \in B) &= p(a < X \leq b, c < Y \leq d) \\ &= F_{XY}(b, d) - F_{XY}(a, d) - F_{XY}(b, c) + F_{XY}(a, c) \end{aligned}$$



איור 3.1: איור עבור דוגמה 3.7.

תוחלת של פונקציה של משתנים אקראיים (תכונה 3.6):

$$(3.18) \quad E[g(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

דוגמה 3.8: מקרה נפוץ:

$$(3.19) \quad E[XY] = \iint_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy$$

התפלגות שולית (הגדרה 3.7):

$$(א3.20) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$(ב3.20) \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

$$(ג3.20) \quad F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$$

$$(ד3.20) \quad F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

משתנים בלתי תלויים סטטיסטית (הגדרה 3.8):

משתנים נקראים בלתי תלויים סטטיסטית אם ורק אם מתקיים

$$(א3.21) \quad f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$(ב3.21) \quad F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

במקרה זה בלבד ניתן לקבל התפלגות משותפת מתוך התפלגויות שוליות.

3.2.2 תוחלת

לינאריות של התוחלת (תכונה 3.7):

$$(3.22) \quad E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

הוכחה. הוכחה עבור $a = b = 1$ (משתנים רציפים)

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy + \iint_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy}_{f_X(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx}_{f_Y(y)} dy \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

תוחלת עבור משתנים בלתי תלויים (תכונה 3.8):

עבור זוג משתנים בלתי-תלויים ופונקציה מהצורה $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ התוחלת נתונה ע"י הקשר

$$(3.23) \quad E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)] E[g_2(Y)]$$

מקרה פרטי חשוב עבור משתנים בלתי תלויים בלבד

$$(3.24) \quad E[XY] = E[X] E[Y]$$

הוכחה. בהתאם למשוואה (3.21א)

$$(3.25) \quad \begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \underbrace{f_{XY}(x, y)}_{f_X(x)f_Y(y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \end{aligned}$$

3.2.3 התפלגות אחידה**התפלגות אחידה (הגדרה 3.9):**

PDF של התפלגות דו-ממדית אחידה של זוג משתנים בלתי-תלויים נתון ע"י

$$(3.26) \quad f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{d-c} & a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

דוגמה 3.9: עבור התפלגות דו-ממדית אחידה:

(א) לחשב $E[X]$ ע"פ נוסחא של תוחלת של פונ' (משוואה (3.18)).

(ב) יש להוכיח, שמדובר בזוג משתנים בלתי-תלויים $X \sim U[a, b]$, $Y \sim U[c, d]$.

פתרון:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x \\ E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \int_c^d dy = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$E[XY] = E[X] E[Y] = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} \int_c^d \frac{1}{d-c} dy = \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לסיכום, ניתן להראות, שמתקיים התנאי במשוואה (3.21).

דוגמה 3.10: עבור התפלגות דו-ממדית אחידה עם פרמטרים $a = c = 0, b = d = 1$, מהו ה-CDF?

פתרון:

$$(3.27) \quad F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, y < 0 \\ \int_0^y \int_0^x dx dy = xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \int_0^1 \int_0^x dx dy = x & 0 \leq x \leq 1, 1 < y \\ y & 1 < x, 0 \leq y \leq 1 \\ \int_0^1 \int_0^1 dx dy = 1 & 1 < x, 1 < y \end{cases}$$

3.3 שונות משותפת

3.3.1 הקדמה

דוגמה 3.11: חשב $\text{Var}[X + Y]$.

פתרון:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\ &= E\left[\left((X - E[X]) + (Y - E[Y])\right)^2\right] \\ &= E\left[\underbrace{(X - E[X])^2}_{\text{Var}[X]} + \underbrace{(Y - E[Y])^2}_{\text{Var}[Y]} + 2 \underbrace{(X - E[X])(Y - E[Y])}_{\text{Cov}[X, Y]}\right] \end{aligned}$$

מטרה: לאפיין קשר (לינארי) בין שתי משתנים אקראיים.

שונות משותפת (covariance) (הגדרה 3.10):

$$(3.29) \quad \text{Cov}[X, Y] = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

ביטוי נפוץ נוסף הוא:

$$(3.30) \quad \text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] \\ (3.31) \quad &= E[XY] - E[XE[Y]] - E[YE[X]] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

תכונות של שונות משותפת (תכונה 3.9):

$$(א3.32) \quad \text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$$

$$(ב3.32) \quad \text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$$

$$(ג3.32) \quad \text{Cov}[X, a] = 0$$

$$(ד3.32) \quad \text{Cov}[aX, bY] = ab\text{Cov}[X, Y]$$

$$(ה3.32) \quad \text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[X + a, Y + b]$$

$$(ו3.32) \quad \text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \pm 2\text{Cov}[X, Y]$$

משתנים בלתי תלויים (תכונה 3.10): עבור משתנים בלתי-תלויים $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

הוכחה. בהתאם למשוואות (3.24) ו-(3.31).

שונות של משתנים בלתי תלויים (בלכד) (תכונה 3.11):

$$(3.33) \quad \text{Var}[aX + bY] = a^2\text{Var}[X] + b^2\text{Var}[Y]$$

שונות, באופן כללי, היא לא לינארית, כמו שניתן לראות להלן בנוסחה (13.32).

אי שיוויון Cauchy-Schwartz (תכונה 3.12):

$$(3.34) \quad E^2[XY] \leq E[X^2] E[Y^2]$$

$$(3.35) \quad \text{Cov}[X, Y] \leq \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}$$

הוכחה. נבחן אי-שיוויון

$$(3.36) \quad E[(aX + Y)^2] = E[X^2] + 2aE[XY] + a^2E[Y^2] \geq 0$$

הערך המינימלי מתקבל עבור

$$(3.37) \quad a = -\frac{E[XY]}{E[Y^2]}$$

הצבה חזרה במשוואה (3.36)

$$(3.38) \quad E[X^2] - 2\frac{E[XY]}{E[Y^2]}E[XY] + \left(\frac{E[XY]}{E[Y^2]}\right)^2 E[Y^2] \geq 0$$

בסיכום, העברת אגפים היא התוצאה המתבקשת. בנוסף, עבור covariance החישוב מתבסס על החלפה $X \rightarrow X - \mu_X, Y \rightarrow Y - \mu_Y$.

מקדם קורלציה (הגדרה 3.11):

מקדם קורלציה (ידוע גם בשם מקדם מתאם) או בשמו המלא Pearson product-moment correlation coefficient נתון ע"י שונות משותפת מנורמלת

$$(3.39) \quad \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}}$$

כאשר מתיים $|\rho_{XY}| \leq 1$ (ע"פ תכונה 3.3.1).

תלות לינארית (תכונה 3.13): עבור $\rho_{XY} = \pm 1$ משתנים הינם בעלי תלות לינארית.

תלויים
לינארית

חסר קורלציה (הגדרה 3.12):

עבור X, Y חוסרי קורלציה (אין קשר לינארי) מתקיים

$$(3.40) \quad \text{Cov}[X, Y] = \rho_{XY} = 0$$

חסרי קורלציה

קשר בין אי תלות לחוסר קורלציה (תכונה 3.14): כאשר X, Y הם בלתי תלויים, הם גם חוסרי קורלציה.

בלתי תלויים $\Leftarrow$ חסרי קורלציה - החץ הוא רק בכיוון אחד (בפרט למקרה פרטי של התפלגות גאוסית, בהמשך).

אורטוגונליות (הגדרה 3.13):

במצב של

$$(3.41) \quad E[XY] = 0$$

משתנים X, Y נקראים אורטוגונליים.

דוגמה 3.12: עבור דוגמה 3.3, חשב ρ_{XY} .

פתרון: הפתרון דורש חישוב כל שלבי הביניים לעיל.

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X] E[Y] = \frac{12}{5} - \frac{7}{5} \cdot \frac{9}{5} = -\frac{3}{25}$$

$$\rho_{XY} = \frac{-\frac{3}{25}}{\sqrt{\frac{6}{25} \cdot \frac{14}{25}}} = -\frac{\sqrt{21}}{14} \approx -0.327326835353988571899146$$

מטרה: ניתוח משתנים בעלי קשר לינארי.

דוגמה 3.13: חשב $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$, $\text{Var}[X + Y]$, $\text{Cov}[X, Y]$, ρ_{XY} עבור

$$X \sim U[0, 1]$$

$$Y = -X$$

פתרון:

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[(-1) \cdot X] = (-1)^2 \text{Var}[X] = \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X - X] = 0$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[X, -X]$$

$$= E[X(-X)] - E[X]E[-X]$$

$$= -(E[X^2] - E^2[X])$$

$$= -\text{Var}[X]$$

$$\rho_{XY} = -\frac{\text{Var}[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[X]}} = -\frac{\text{Var}[X]}{|\text{Var}[X]|} = -1$$

מטרה: משתנים תלויים, אבל חסרי קורלציה.

דוגמה 3.14: יש לחשב $\text{Cov}[X, Y]$, ρ_{XY} עבור

$$X \sim U[-1, 1]$$

$$Y = X^2$$

פתרון:

$$E[X] = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \cancel{E[X]}^0 E[Y] = E[XY]$$

$$E[XY] = E[X^3] = \int_{-1}^1 \underbrace{x^3}_{g(x)} \underbrace{\frac{1}{1 - (-1)}}_{f_X(x)} dx = 0$$

$$= \text{Cov}[X, Y] = \rho_{XY} = 0$$

לסיכום, מדובר במשתנים תלויים וחסרי קורלציה.

3.4 שאלות

3.1 (שונות) נתונים קשרים הבאים בין המשתנים X, Y :

$$(3.42) \quad \text{Var}[X + 2Y] = 40$$

$$(3.43) \quad \text{Var}[X - 2Y] = 20$$

$$(3.44) \quad \text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$$

חשב מספרית את $\text{Var}[X], \text{Cov}[X, Y]$ (כל האיברים של מטריצת covariance בין המשתנים (X, Y)).

3.2 (מקדם קורלציה של משתנים בדידים) נתונה התפלגות משותפת של משתנה אקראיים בדידים X, Y בעלי התפלגות להלן. חשב את מקדם הקורלציה ρ_{XY} .

$$p_{XY}[x, y] = \begin{cases} p[X = 0, Y = -1] = \frac{1}{3} \\ p[X = -1, Y = 0] = \frac{1}{3} \\ p[X = 1, Y = 1] = \frac{1}{6} \\ p[X = -1, Y = -1] = \frac{1}{6} \end{cases}$$

3.3 נתונים n משתנים אקראיים בלתי-תלויים $X_i \sim U[0, 1], i = 1 \dots, n$. נגדיר

$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

יש לחשב $E[Y], \text{Var}[Y], E[Z], \text{Var}[Z]$.

3.4 (מקדם קורלציה) נתונה פונקציית צפיפות משותפת,

$$f_{XY}(x, y) = \exp\left(-\frac{4x+y}{2}\right) u(x)u(y),$$

כאשר $u(x)$ פונקציית מדרגה. מצא מקדם קורלציה, ρ_{XY} .

3.5 נתון קשר בין משתנים אקראיים, $Y = -6X + 22$, כאשר

$$(3.45) \quad E[X] = 3$$

$$(3.46) \quad \text{Var}[X] = 2$$

(א) חשב $E[Y], \text{Var}[Y]$.

(ב) חשב $\text{Cov}[X, Y]$ ומקדם קורלציה בין X, Y . הסבר/נמק את התוצאה המתקבלת.

3.6 נתונים 3 משתנים אקראיים בלתי-תלויים בעלי התפלגות Bernoulli: $X_1 \sim \text{Ber}(p_1), X_2 \sim \text{Ber}(p_2), X_3 \sim \text{Ber}(p_3)$.

(א) חשב התסברויות:

$$p(X_1 + X_2 + X_3 = 1) \quad (\text{א})$$

$$p(X_1 + X_2 + X_3 = 2) \quad (\text{ב})$$

(ב) יש לבדוק את התוצאה ע"י סימולציה עבור ערכי $p_i \neq 0.5$.

3.7 (סימולציה) נתונים משתנים אקראיים בלתי-תלויים $X, Y \sim U[0, 1]$. יש להראות ע"י סימולציה את הקשר

$$\Pr\left(X^{\frac{1}{3}} > \frac{Y}{2}\right) = \frac{31}{32} = 0.96875$$

3.8 נתונות מדידות רדיוס של מעגלים. ידועה שרדיוסים מתפלגים $r \sim U[a = 1, b = 3]$ ושגיאת מדידה היא $n \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.01)$. המדידה ושגיאת מדידה בלתי תלויות. תוצאת המדידה היא $X = r + n$. היקף הוא $C = 2\pi X$, ושטח הוא $A = \pi X^2$. יש לחשב:

(א) מהו היקף הממוצע של המעגל הנמדד, $E[C]$?

(ב) מהי שונות של היקף של המעגל הנמדד, $\text{Var}[C]$?

(ג) מהו שטח הממוצע של המעגל הנמדד, $E[A]$?

(ד) יש לחשב $\text{Cov}[X, r]$.

3.9 נגדיר, $\Theta \sim U[-\pi, \pi]$,

$$(3.47) \quad X = \cos(\Theta)$$

$$(3.48) \quad Y = \sin(\Theta)$$

(א) יש להוכיח שמשתנים X, Y הם חסרי קורלציה.

(ב) יש לחשב $E[X^2], E[Y^2]$.

(ג) יש להראות ע"י דוגמה, שמודבר במשתנים שהם לא בלתי תלויים. רמז: ניתן להיעזר במשוואה

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)] E[g_2(Y)]$$

שמתקיימת עבור משתנים בלתי תלויים בלבד.

פרק 4

חיזוי לינארי

תוכן הפרק	
48	4.1 חיזוי ע"י קבוע
49	4.2 חיזוי לינארי דו-ממדי
55	4.3 חיזוי לינארי רב-ממדי
55	4.3.1 חישוב תאורטי
57	4.4 שאלות

4.1 חיזוי ע"י קבוע

מטרה: ערך הכי צפוי של משתנה אקראי.

מקרה פרטי מעניין הוא חיזוי ע"י קבוע, כמפורט להלן.

מקור למושג תוחלת (expectation)

חיזוי ע"י קבוע (הגדרה 4.1):

חיזוי מהצורה

(4.1) $\hat{Y} = b,$

כאשר x הוא מקרה פרטי של X עבורו נעשה חיזוי.

מדד לביצועי החיזוי הוא שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית.

שגיאה ריבועית ממוצעת (הגדרה 4.2):

שגיאה ריבועית (square error, SE) של החיזוי מוגדרת ע"י

מדד לביצועים

(4.2) $se(b) = E[(\hat{Y} - Y)^2].$

חיזוי במובן שגיאה ריבועית מינימלית (הגדרה 4.3):

הביצועים של החיזוי נמדדים ע"י שגיאה ריבועית ממוצעת (minimum SE, MSE), כאשר

הדרישה היא לערך של b , עבורו שגיאה ריבועית היא מינימלית,

$$(4.3) \quad b = \arg \min_b se(b)$$

במקרה הנידון, SE נתון ע"י

$$(4.4) \quad se(b) = E[(Y - b)^2].$$

פתיחת סוגריים

$$(4.5) \quad \begin{aligned} se(b) &= E[(Y - b)^2] \\ &= E[Y^2 - 2bY + b^2] \\ &= E[Y^2] - 2bE[Y] + b^2 \end{aligned}$$

הערך של b עבורו השגיאה היא מינימלית ניתן לקבל ע"י גזירה והשוואה של הנגזרת לאפס,

$$(4.6) \quad \frac{\partial se(b)}{\partial b} = -2E[Y] + 2b = 0$$

שמביאים לתוצאה

$$(4.7) \quad b_{opt} = E[Y]$$

שגיאת ריבועית מינימלית (minimum square error, MSE) של החיזוי במקרה זה היא השונות

משמעות
נוספת של
שונות

$$(4.8) \quad se_{min} = E[(Y - E[Y])^2] = \text{Var}[Y].$$

ניתן לסכם את הדברים האופן הבא.

חיזוי ע"י קבוע (תכונה 4.1): במקרה של החיזוי ע"י קבוע,

□ תוחלת היא החיזוי האופטימלי עבור שגיאה ריבועית מינימלית.

□ שונות זוהי שגיאת החיזוי המתקבלת.

4.2 חיזוי לינארי דו-ממדי

מטרה: להשתמש בקשר לינארי בין המשתנים כדי ליצור חיזוי מאחד לשני.

חיזוי לינארי (הגדרה 4.4):

חיזוי מהצורה

$$(4.9) \quad \hat{Y} = ax + b,$$

כאשר x הוא מקרה פרטי של X עבורו נעשה חיזוי [Ⓜ].

[Ⓜ]מכונה גם קו מגמה לינארי (linear trendline) או רגרסיה לינארית (linear regression).

צורת חיזוי

הביצועים של החיזוי נמדדים ע"י שגיאה ריבועית ממוצעת (minimum SE, MSE), כאשר הדרישה

היא למינימום שגיאה היא מהצורה,

$$(4.10) \quad a, b = \arg \min_{a, b} se(a, b)$$

הערכים a, b עבורם השגיאה היא מינימלית ניתן לקבל ע"י גזירה והשוואה של הנגזרת לאפס, כלהלן.

$$\begin{aligned} se(a, b) &= E[(\hat{Y} - Y)^2] \\ &= E[(Y - aX - b)^2] \\ (4.11) \quad &= E[Y^2 - 2aXY + a^2X^2 - 2bY + 2abX + b^2] \\ &= E[Y^2] - 2aE[XY] + a^2E[X^2] - 2bE[Y] + 2abE[X] + b^2 \end{aligned}$$

את המינימום ניתן לקבל ע"י הגזירה, תוך שימוש בכלל השרשרת, $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial se(a, b)}{\partial a} &= E[2(Y - aX - b)(-X)] \\ (4.12) \quad &= -2E[XY] + 2aE[X^2] + 2bE[X] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial se(a, b)}{\partial b} &= E[2(Y - aX - b)(-1)] \\ (4.13) \quad &= -2E[Y] + 2aE[X] + 2b = 0 \end{aligned}$$

ניתן לרשום בצורה מטריציאווית

$$(4.14) \quad \begin{bmatrix} E[X^2] & E[X] \\ E[X] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[XY] \\ E[Y] \end{bmatrix}.$$

הפתרון המתקבל הוא

$$(4.15) \quad a_{opt} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - E^2[X]} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}$$

$$(4.15) \quad b_{opt} = E[Y] - \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}E[X]$$

לסיכום,

חיזוי לינארי בין זוג משתנים (תכונה 4.2): חיזוי לינארי בין זוג משתנים אקראיים

סיכום

נתון ע"י

$$\begin{aligned}
 \hat{Y} &= a_{opt}x + b_{opt} \\
 (4.16) \quad &= \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}x + E[Y] - \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}E[X] \\
 &= E[Y] + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}(x - E[X])
 \end{aligned}$$

שגיאת חיזוי - שגיאה ריבועית ממוצעת (תכונה 4.3): שגיאת החיזוי נתונה ע"י

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad se_{min} &= E\left[(Y - (a_{opt}X + b_{opt}))^2\right] = \text{Var}[Y] \left(1 - \rho_{XY}^2\right) \\
 &\text{השווה לתוצאה במשוואה (4.8). השיפור הוא פי } (1 - \rho_{XY}^2)!
 \end{aligned}$$

קשר בין
שגיאת חיזוי
למקדם
קורלציה

שגיאת חיזוי - שגיאה ממוצעת (תכונה 4.4):

$$(4.18) \quad E[Y - (a_{opt}X + b_{opt})] = 0$$

במקרה של משתנים חסרי קורלציה, המצב נהיה זהה לחיזוי ע"י קבוע.

דוגמה 4.1: נתונים זוג משתנים אקראיים בלתי תלויים $W_1, W_2 \sim U[0, 1]$ עבורם מתקיים

$$\begin{aligned}
 X &= W_1 \\
 Y &= 0.9W_1 + 0.1W_2
 \end{aligned}$$

חשב $E[X], E[Y], \text{Var}[X], \text{Var}[Y], E[XY], \text{Cov}[X, Y], \rho_{XY}$.

פתרון: המחשה גרפית של הפתרון מופיעה באיור 4.1.

$$E[X] = E[W_1] = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = 0.9E[W_1] + 0.1E[W_2]$$

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[W_1] = \text{Var}[W_2] = \frac{1}{12}$$

$$\text{Var}[Y] = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \text{Var}[W_1] + \frac{1}{10^2} \text{Var}[W_2] = \frac{81}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{27}{400} \approx 0.0675$$

$$E[XY] = 0.9E[W_1^2] + 0.1E[W_1W_2]$$

$$\begin{aligned}
 0.9E[W_1^2] &= 0.9 \times \left\{ \text{Var}[W_1] + E^2[W_1] = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right\} \\
 &= 0.9 \times \left\{ \int_0^1 x^2 \frac{1}{1-0} dx = \frac{1}{10} x^3 \Big|_0^1 \right\} = \frac{9}{10}
 \end{aligned}$$

$$0.1E[W_1]E[W_2] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{40}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{40} = 0.075$$

$$\rho_{XY} = \frac{3/40}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{41}{600}}} = \frac{9}{\sqrt{82}} \approx 0.99388$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{2} + \frac{3/40}{1/12} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

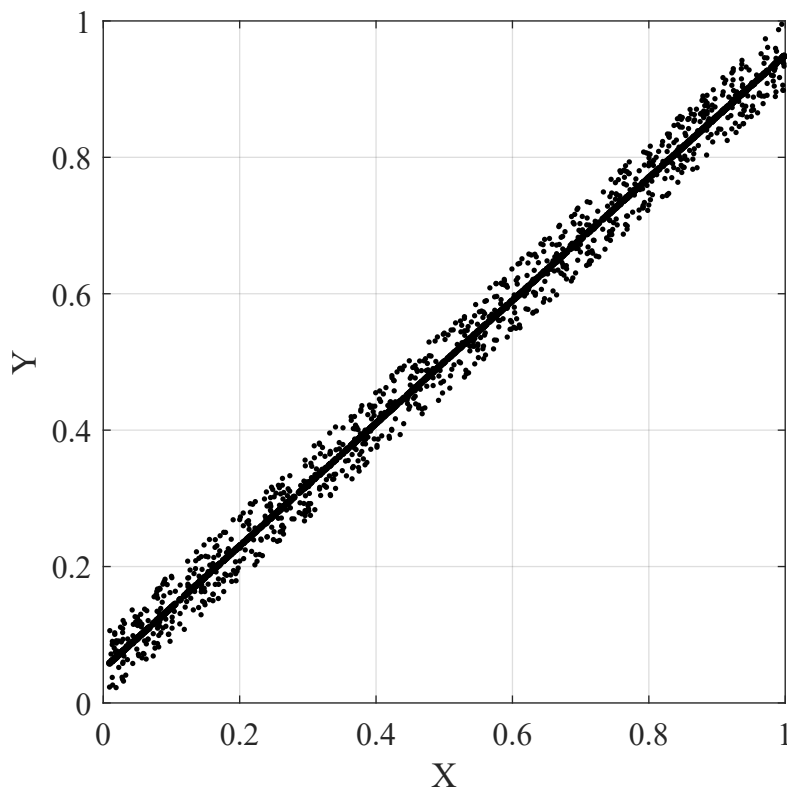
$$mse = \text{Var}[Y] \left(1 - \rho_{XY}^2\right) = \frac{41}{600} \left(1 - \frac{81}{82}\right) = \frac{1}{1200} \approx 8.33 \times 10^{-4}$$

```

N = 1e3;
W1 = rand(1,N);
W2 = rand(1,N);
X = W1;
Y = 9/10*W1+1/10*W2;
Yh = 1/2+9/10*(X-1/2);

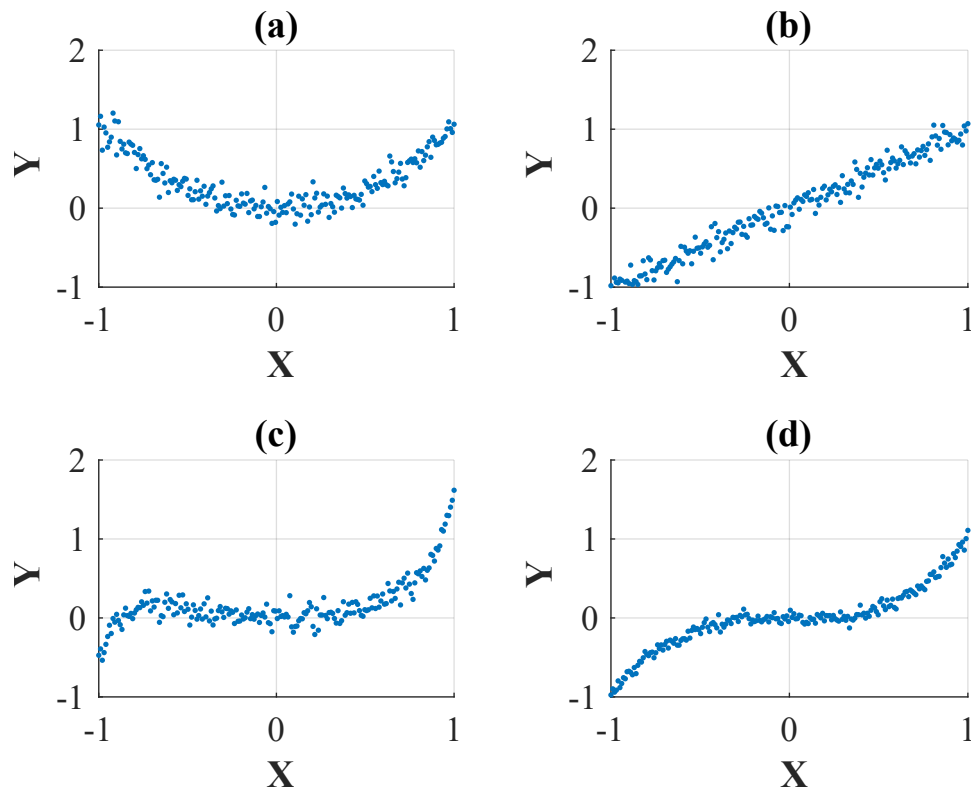
```

הפקודות עבור הסימולציה:



איור 4.1: הצגה גרפית עבור הדוגמה 4.1.

דוגמה 4.2: באיור 4.2 נתונות תוצאות של 4 ניסויים דו-ממדיים שונים. יש למיין מהגבוה לנמוך את הסדר של הניסויים ע"פ ערך מוחלט של המקדם הקורלציה בין X, Y , $|\rho_{XY}|$. יש להסביר/לנמק את תשובתך.



איור 4.2: יש לרשום את הסדר של הניסויים ע"פ ערך מוחלט של המקדם הקורלציה, מהגבוה לנמוך בתהתאם לדוגמה 4.2.

פתרון: באופן כללי,

□ עבור קו "ישר" יותר $|\rho_{XY}|$ יותר קרוב ל-1.

□ עבור קו ישר, עבור פיזור "קטן" יותר $|\rho_{XY}|$ יותר קרוב ל-1.

מקדמי קורלציה לא ניתן לחשב ישירות מתוך השרטוט. הערכים הם:

1. (b) 0.98621

2. (d) 0.90839

3. (c) 0.6233

4. (a) -0.037787

דוגמה 4.3: נתון בסיס נתונים של גובה (Height) ומשקל (Weight) של שחקני בייסבול אמריקאיים מקצועיים⁸. נסמן אותם ע"י X, Y בהתאמה.

(א) חשב $Cov[X, Y]$, ρ_{XY} .

(ב) בצע חיזוי לינארי בין X, Y וחשב את השגיאת חיזוי המתקבלת (mse).

פתרון: החישוב מתוך תוצאות הניסוי הוא ע"י שימוש בממוצע במקום תוחלת (תכונה 1.2.4),

כלהלך:

$$E[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - E[X])^2$$

$$E[XY] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

יתר החישובים של $\text{Cov}[X, Y]$, $\text{Var}[Y]$ נעשים באופן דומה ו/או ע"י הצבה.

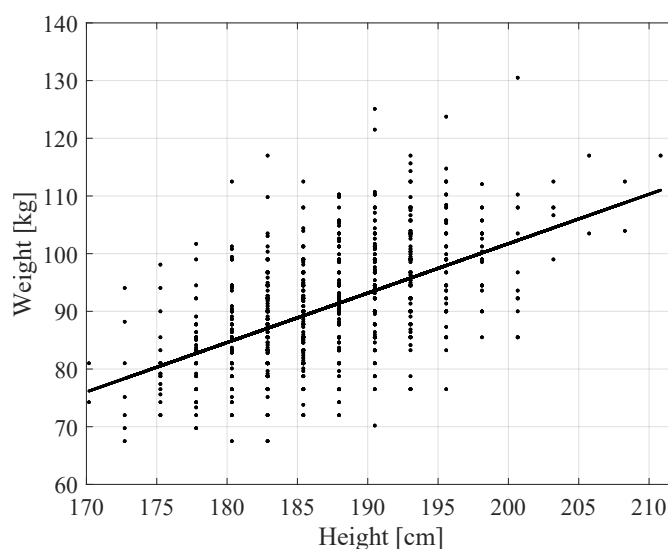
פירוט הפקודות עבור חישוב ע"י Matlab:

```
Ex = mean(X); % E[X]
Ey = mean(Y); % E[Y]
Cxy = mean(X.*Y) - Ex*Ey; %Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]
Vx = var(X); % Var[X]
Vy = var(Y); % Var[Y]
Yh = Ey+Cxy/Vx*(X-Ex);

Rho = Cxy/sqrt(Vx*Vy)
e = Y - Yh; % errors
mean(e) % mean error: 0 in theory
mse = mean(e.^2)
mse_theory = Vy*(1-Rho^2)
```

שרטוט התוצאה המתקבלת ע"ג פיזור של ערכי X, Y מוצג באיור 4.3.

מתוך http://wiki.stat.ucla.edu/socr/index.php/SOCR_Data_MLB_Heig htsWeights (נבדק 01-11-2020)



איור 4.3: קו מגמה המקשר בין גובה למשקל של שחקני בייסבול אמריקאי מקצועיים.

4.3 חיזוי לינארי רב-ממדי

מטרה: חיזוי של משתנה אקראי מתוך משתני אקראיים ע"י שימוש בקשרים סטטיסטיים ביניהם.

4.3.1 חישוב תאורטי

נתון וקטור אקראי N -ממדי מהצורה $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$. בלי הגבלת הכלליות, נניח $E[X_i] = 0$.

חיזוי לינארי (הגדרה 4.5):

נדרש חיזוי לינארי של משתנה אקראי Y מתוך וקטור אקראי $\mathbf{X}$ (משתנים $X_1, X_2, \dots, X_N$), מהצורה

$$(4.19) \quad \hat{Y} = a_1 X_1 + \dots + a_N X_N$$

ניתן לרשם את החיזוי גם בצורה

$$(4.20) \quad \hat{Y} = \mathbf{a}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{bmatrix}$$

כאשר $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$ הינם מקדמי החיזוי.

כל משתנה אקראי ניתן להפוך למשתנה עם תוחלת 0 ע"י החסרת תוחלת, $X_i \leftarrow X_i - E[X_i]$. ללא הנחה של תוחלת 0, החיזוי הוא מהצורה

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_N X_N$$

שגיאה ריבועית ממוצעת (הגדרה 4.6):

ניתן לרשום את שגיאה ריבועית (הגדרה 4.1) בצורה

$$(4.21) \quad \begin{aligned} se(\mathbf{a}) &= E \left[(Y - \hat{Y})^2 \right] = E \left[(Y - \mathbf{X}^T \mathbf{a})^2 \right] \\ &= E \left[\{Y - (a_1 X_1 + \dots + a_N X_N)\}^2 \right] \end{aligned}$$

חיזוי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (הגדרה 4.7):

ניתן לנסח את שגיאה ריבועית ממוצעת (הגדרה 4.1) בצורה

$$(4.22) \quad \mathbf{a} = \arg \min_{\mathbf{a}} se(\mathbf{a}),$$

כאשר המטרה היא לחשב מקדמי חיזוי.

ניתן לחשב את את מקדמי החיזוי ע"י חישוב נגזרת

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_0} se(\mathbf{a}) &= E \left[2 (Y - (a_1 X_1 + \dots + a_N X_N)) (-X_1) \right] = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial a_1} se(\mathbf{a}) &= E \left[2 (Y - (a_1 X_1 + \dots + a_N X_N)) (-X_2) \right] = 0 \\
 &\dots \\
 \frac{\partial}{\partial a_N} se(\mathbf{a}) &= E \left[2 (Y - (a_1 X_1 + \dots + a_N X_N)) (-X_N) \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

או ע"י רישום בצורת מטריצה

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} E[X_1^2] & E[X_1 X_2] & \dots & E[X_1 X_N] \\ E[X_1 X_2] & E[X_2^2] & \dots & E[X_2 X_N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E[X_1 X_N] & E[X_2 X_N] & \dots & E[X_N^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E[X_1 Y] \\ E[X_2 Y] \\ \vdots \\ E[X_N Y] \end{bmatrix} \\
 E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] \mathbf{a} &= E[\mathbf{X}\mathbf{y}]
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

שגיאת חיזוי (תכונה 4.5): שגיאה המתקבלת היא

$$se_{min} = E[Y^2] - \sum_{i=1}^N a_i E[X_i Y]
 \tag{4.25}$$

דוגמה 4.4: נתון $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות (identically and independently distributed) עם תוחלת m ושונות σ^2 . נסמן

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\
 Y_j &= X_j - \bar{X}, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

יש להוכיח:

$$\begin{aligned}
 E[Y_j] &= 0 \\
 E[\bar{X} Y_j] &= 0
 \end{aligned}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 E[Y_j] &= E[X_j - \bar{X}] = E[X_j] - E[\bar{X}] = m - E[\bar{X}] \\
 E[\bar{X}] &= \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m = m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y_j] &= m - m = 0 \\
 E[\bar{X}Y_j] &= E[\bar{X}(X_j - \bar{X})] = E[\bar{X}X_j] - E[\bar{X}\bar{X}] \\
 E[\bar{X}\bar{X}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_iX_j] \\
 (4.26) \quad E[X_iX_j] &= \begin{cases} m^2 & i \neq j \\ \sigma^2 + m^2 & i = j \end{cases} \leftarrow E[X_i^2] = \text{Var}[X_i] + E^2[X_i] \\
 E[\bar{X}\bar{X}] &= \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{i \neq j} E[X_iX_j]}_{n^2 - n \text{ איברים}} + \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{i=j} E[X_iX_i]}_{n \text{ איברים}} \\
 &= \frac{1}{n^2} (n(n-1)m^2 + n(\sigma^2 + m^2)) \\
 &= \frac{\sigma^2}{n} + m^2 \\
 E[\bar{X}X_j] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_iX_j] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} E[X_iX_j] + \frac{1}{n} E[X_jX_j] \\
 &= \frac{1}{n} [(n-1)m^2 + (\sigma^2 + m^2)] = \frac{\sigma^2}{n} + m^2
 \end{aligned}$$

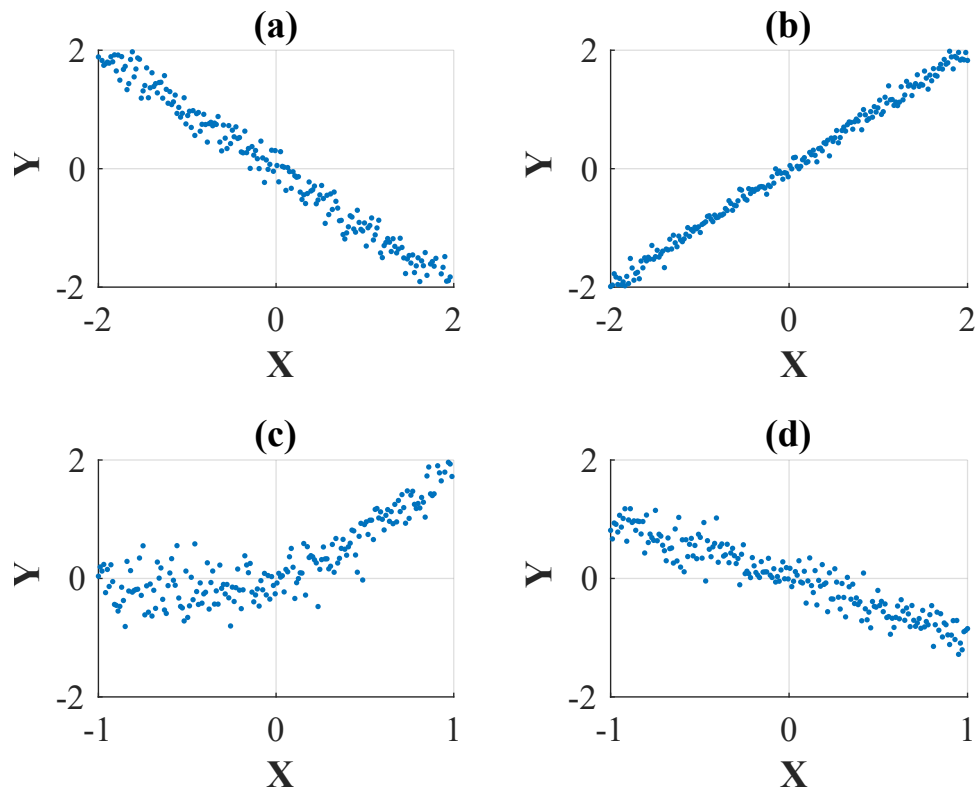
4.4 שאלות

4.1 באיור 4.4 נתונות תוצאות של 4 ניסויים דו-ממדיים שונים. יש למיין מהגבוה לנמוך את הסדר של הניסויים ע"פ ערך מוחלט של המקדם הקורלציה בין X, Y , $|\rho_{XY}|$.

4.2 נתונים שני משתנים אקראיים רציפים $X, Y \sim U[0, 1]$ בלתי-תלויים סטטיסטית המגדירים צלעות של מלבן. יהיו C היקף המלבן ו- A שטח המלבן. ענו על הסעיפים הבאים:

1. רשמו ביטויים ל- C ו- A .
2. חשבו את הקווריאנס בין C ל- A .
3. הציעו דרך לשערך לינארי של היקף המלבן מתוך שטחו.
4. מהי השגיאה הריבועית הממוצעת המינימלית של השערך הלינארי?

4.3 (חיזוי) נתון חזאי לינארי של Y מתוך $X = x$ מהצורה $\hat{Y} = ax$



איור 4.4: יש לרשום את הסדר של הניסויים ע"פ ערך מוחלט של המקדם הקורלציה, מהגבוה לנמוך בתהתאם לשאלה 4.1.

(א) יש לחשב ערך אופטימלי של a במובן של שגיאה ריבועית מינימלית.

(ב) יש לחשב שגיאה ממוצעות המתקבלת, $E[Y - \hat{Y}]$.

(ג) יש לחשב שגיאה ריבועית ממוצעות המתקבלת, $E[(Y - \hat{Y})^2]$.

4.4 (חיזוי לא-לינארי) נתון חזאי ממשתנה אקראי X למשתנה אקראי Y , מהצורה $\hat{Y} = ax^2$.

(א) חשב מקדם a אופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית. חשב ביטוי לשגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית המתקבלת עבור מקדם a אופטימלי.

עבור סעיפים הבאים, נתונים משתנים אקראיים X, Y מהצורה

$$\begin{aligned} X &= 0.9W_1 + 0.1W_2 \\ Y &= W_1^2 \end{aligned}$$

כאשר $W_1, W_2 \sim U[0, 1]$ ובלתי תלויים.

(ב) חשב ערך מספרי של שגיאת חיזוי המתקבלת.

נוסחאות עזר:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

(ג) חשב את הערך של שגיאת חיזוי לינארי מהצורה $\hat{Y} = ax + b$. השוואה את התוצאה המתקבלת לתוצאה של הסעיף הקודם ונמק.

4.5 (חיזוי לינארי של משתנים בדידים) נתון משתנה אקראי דו-ממדי בעל ערכים

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

בעלי הסתברות זהה. יש לחשב:

(א) התפלגויות השוליות

(ב) תוחלת ושונות של התפלגויות שוליות

(ג) שונות משותפת ומקדם קורלציה

(ד) חיזוי לינארי בין המשתנים

4.6 (חיזוי לינארי של משתנים בדידים) נתונה טבלה של תוצאות ניסוי אפשריות בעלי הסתברות

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

זהה:

(א) מהו חיזוי הלינארי של Y עבור $x = 1$?

(ב) מהו מקדם קורלציה בין X, Y ?

(ג) מהי שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית של החיזוי של Y מתוך x שרירותי?

4.7 (חיזוי לינארי של משתנים בדידים)

נתון זוג משתנים בדידים, X, Y . טבלה של הסתברויות עבור תוצאות אפשריות עבורם מופיעה בטבלה 4.1. לדוגמה, ע"פ הטבלה $\Pr[X = 1, Y = 3] = 0.2$.

Y				
3	2	1		
0.2	0	0	1	X
0.1	0.2	0	2	
0	0.2	0.1	3	
0	0	0.2	4	

טבלה 4.1: טבלה עבור השאלה 4.7.

נדרש לחשב:

(א) ρ_{XY}

(ב) חיזוי לינארי של Y עבור $x = 3$.

4.8 נתונים זוג משתנים אקראיים בלתי תלויים, $X \sim \text{Ber}(p_1), Y \sim \text{Ber}(p_2)$, בעלי התפלגות משותפת,

$$p_{XY}[0, 0] = 0.08$$

$$p_{XY}[0, 1] = 0.32$$

$$p_{XY}[1, 0] = 0.12$$

$$p_{XY}[1, 1] = 0.48$$

(א) מהם ערכי p_1, p_2 ?

עבור יתר הסעיפים, יש להשאיר p_1, p_2 כפרמטרים.

(ב) נדרש חיזוי של X ע"י קבוע b_x עבורו שגיאה ריבועית היא מינימלית. מהי שגיאת החיזוי המתקבלת?

(ג) נתון הקשר,

$$(4.27) \quad Z = aX + cY$$

נדרש חיזוי של Z ע"י קבוע b_z עבורו מתקבלת שגיאה ריבועית מינימלית, ומהי שגיאת החיזוי?

(ד) האם קיימים קבועים $a \neq 0, c \neq 0$, כדי שהמשתנים Z, X יהיו חסרי קורלציה? אם כן, מהו התנאי המתקבל?

פרק 5

משתנים גאוסיים במשותף

מטרה: לאפיין מודל של זוג תוצאות ניסויי אקראיות גאוסיות והקשר ביניהם.

תוכן הפרק

5.1	מטריצת covariance רב-ממדית	61
5.2	התפלגות גאוסית דו-ממדית	64
5.2.1	PDF	67
5.3	התפלגות גאוסית רב-ממדית	69
5.3.1	PDF	69
5.4	שאלות	71

5.1 מטריצת covariance רב-ממדית

מטרה: להגדיר אוסף שונויות משותפות בין משתנים שונים.

מטריצת covariance (הגדרה 5.1):

בהינתן ווקטור משתנים אקראיים $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}} &= \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T] \\ &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}]^T \end{aligned}$$

(5.1)

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] & \cdots & \text{Cov}[X_1, X_N] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \text{Var}[X_2] & \cdots & \text{Cov}[X_2, X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_N, X_1] & \text{Cov}[X_N, X_2] & \cdots & \text{Var}[X_N] \end{bmatrix}$$

סימטריה (תכונה 5.1):

(5.2)

$$C_{\mathbf{X}} = C_{\mathbf{X}}^T \quad \text{Cov}[X_i, X_j] = \text{Cov}[X_j, X_i]$$

משתנים עם תוחלת 0 (תכונה 5.2): כאשר $E[\mathbf{X}] = 0$,

$$(5.3) \quad \mathbf{C}_X = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \begin{bmatrix} E[X_1^2] & E[X_1X_2] & \cdots & E[X_1X_N] \\ E[X_2X_1] & E[X_2^2] & \cdots & E[X_2X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_NX_1] & E[X_NX_2] & \cdots & E[X_N^2] \end{bmatrix}$$

במקרה הזה ניתן לרשום חיזוי לינארי בצורה

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{C}_X \mathbf{a} &= E[\mathbf{X}\mathbf{y}] \\ \mathbf{a} &= \mathbf{C}_X^{-1} E[\mathbf{X}\mathbf{y}] \end{aligned}$$

שונויות של סכום משתנים (תכונה 5.3):

$$(5.5) \quad \text{Var} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Cov}[X_i, X_j]$$

הוכחה. בהתאם להגדרה,

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] &= E \left[\left\{ \sum_{i=1}^N X_i - E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] \right\}^2 \right] \\ &= E \left[\left\{ \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N E[X_i] \right) \right\}^2 \right] \\ &= E \left[\left\{ \sum_{i=1}^N (X_i - E[X_i]) \right\}^2 \right] \\ U_i = X_i - E[X_i] \rightarrow &= E \left[\left(\sum_{i=1}^N U_i \right)^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_i U_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[U_i U_j] \end{aligned}$$

כאשר כל אחד מאיברי הסכום הוא

$$(5.6) \quad E[U_i U_j] = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = \text{Cov}[X_i, X_j]$$

דוגמה 5.1: שונות סכום של זוג משתנים אקראיים

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_1 + X_2] &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Cov}[X_i, X_j] \\
 &= \text{Cov}[X_1, X_1] + \text{Cov}[X_2, X_2] + \text{Cov}[X_1, X_2] + \text{Cov}[X_2, X_1] \\
 &= \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + 2\text{Cov}[X_1, X_2]
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

משתנים חסרי קורלציה (תכונה 5.4):

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{X}} &= \text{diag} [\text{Var}[X_1], \text{Var}[X_2], \dots, \text{Var}[X_N]] \\
 &= \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{Var}[X_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{Var}[X_N] \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

הוכחה.

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = 0, \quad i \neq j
 \tag{5.9}$$

קומבינציה לינארית (תכונה 5.5): בהינתן ווקטור מספרים $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$

$$\text{Var}[\mathbf{a}^T \mathbf{X}] = \mathbf{a}^T C_{\mathbf{X}} \mathbf{a}
 \tag{5.10}$$

מדובר במקרה כללי של הקשר במשוואה (5.5).

דוגמה 5.2: קומבינציה לינארית של זוג משתנים אקראיים

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[a_1 X_1 + a_2 X_2] &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \text{Var}[X_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\
 &= a_1^2 \text{Var}[X_1] + 2a_1 a_2 \text{Cov}[X_1, X_2] + a_2^2 \text{Var}[X_2]
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

כמובן, עבור $a_1 = a_2 = 1$ מתקבלת התוצאה במשוואה (5.7).

טרנספורמציה לינארית (תכונה 5.6): בהינתן מטריצה ממטית $\mathbf{A}$, והקשר $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$,

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \mu_{\mathbf{X}}
 \tag{5.12}$$

$$C_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} C_{\mathbf{X}} \mathbf{A}^T
 \tag{5.13}$$

עבור $\mathbf{X}$ שהוא משתנה גאوسي רב-ממדי, $\mathbf{Y} \sim N(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}})$.

הוכחה. עבור וקטור אקראי $\mathbf{X}$ בעל ממוצע $E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ כאשר,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}] = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T]$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{X}] &= E[(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})^T] \\ &= E[\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}^T] \\ &= \mathbf{A}E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\text{Cov}[\mathbf{X}] \mathbf{A}^T.\end{aligned}$$

5.2 התפלגות גאוסית דו-ממדית

מטרה: הגדרה של משתנה גאוס דו-ממדי (זוג משתנים גאוסיים במשותף).

משפט

סכום משתנים גאוסיים בלתי-תלויים הוא משתנה גאוס.

דוגמה 5.3: עבור משתנים בלתי תלויים $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$(5.14) \quad aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)$$

דוגמה 5.4: ניתן להראות קשר בין זוג משתנים גאוסיים בלתי תלויים, $W_1, W_2 \sim N(0, 1)$, באופן הבא.

זוג משתנים
גאוסיים
במשותף

$$(א5.15) \quad X_1 = \mu_1 + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2$$

$$(ב5.15) \quad X_2 = \mu_2 + \sigma_{21}W_1 + \sigma_{22}W_2$$

התפלגויות השוליות המתקבלות הן גאוסיות,

$$(א5.16) \quad X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$(ב5.16) \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

תוחלות,

$$(א5.17) \quad E[X_1] = \mu_1 + \sigma_{11}E[W_1] + \sigma_{12}E[W_2] = \mu_1$$

$$(ב5.17) \quad E[X_2] = \mu_2$$

הקשרים בין המשתנים הם

$$(א5.18) \quad \text{Cov}[X_1, X_1] = \text{Var}[X_1] = \sigma_{11}^2 \text{Var}[W_1] + \sigma_{12}^2 \text{Var}[W_2] = \sigma_1^2$$

$$(ב5.18) \quad \text{Cov}[X_2, X_2] = \text{Var}[X_2] = \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 = \sigma_2^2$$

$$(ג5.18) \quad E[X_1] E[X_2] = \mu_1 \mu_2$$

$$(ד5.18) \quad E[X_1 X_2] = E[(\mu_1 + \sigma_{11}W_1 + \sigma_{12}W_2)(\mu_2 + \sigma_{21}W_1 + \sigma_{22}W_2)]$$

$$= E \left[\begin{array}{ccc} \mu_1 \mu_2 & + \mu_1 \sigma_{21} W_1 & + \mu_1 \sigma_{22} W_2 \\ + \mu_2 \sigma_{11} W_1 & + \sigma_{11} \sigma_{21} W_1^2 & + \sigma_{11} \sigma_{22} W_1 W_2 \\ + \mu_2 \sigma_{12} W_2 & + \sigma_{11} \sigma_{21} W_1 W_2 & + \sigma_{12} \sigma_{22} W_2^2 \end{array} \right]$$

$$(ה5.18) \quad = \mu_1 \mu_2 + \sigma_{11} \sigma_{21} E[W_1^2] + \sigma_{12} \sigma_{22} E[W_2^2]$$

$$(ו5.18) \quad = \mu_1 \mu_2 + \sigma_{11} \sigma_{21} + \sigma_{12} \sigma_{22}$$

$$(ז5.18) \quad \text{Cov}[X_2, X_1] = \text{Cov}[X_1, X_2]$$

$$(ח5.18) \quad = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] = E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2$$

$$(ט5.18) \quad = \sigma_{11} \sigma_{21} + \sigma_{12} \sigma_{22}$$

ומקדם הקורלציה הוא

$$(5.19) \quad \rho = \frac{\text{Cov}[X_1, X_2]}{\sqrt{\text{Var}[X_1] \text{Var}[X_2]}} = \frac{\sigma_{11} \sigma_{21} + \sigma_{12} \sigma_{22}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

עבור וקטור אקראי $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, מטריצת covariance שלו נתונה ע"י

$$(5.20) \quad \mathbf{C}_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \text{Cov}[X_1, X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \text{Cov}[X_2, X_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

זוג משתנים גאוסיים במשותף (הגדרה 5.2):

וקטור של זוג משתנים אקראיים גאוסיים במשותף

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ניתן לאפיין ע"י התפלגות משותפת,

$$(5.21) \quad \mathbf{X} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\mathbf{X} \right)$$

משפט

משתנים אקראיים $X_1, X_2, \dots, X_N$ (תלויים או בלתי תלויים) הם גאוסיים במשותף (בעלי התפלגות גאוסית N-ממדית משותפת) אם ורק אם הקומבינציה לינארית $\sum_{m=1}^N a_m X_m$ היא מתלפגת גאוסית עבור $\forall a_m \in \mathbb{R}$.

דוגמה 5.5: נתונים זוג משתנים אקראיים, $X \sim N(0, \sigma^2), Y = 3X$,

(א) מהו מקדם קורלציה (בלי לחשב)?

(ב) הראה שמשתנים X, Y הם גאוסיים במשותף.

(ג) מהי מטריצת covariance? מהי התפלגות המשותפת שלהם?

פתרון: (א) בגלל קשר לינארי עם שיפוע חיובי, $\rho_{XY} = 1$.

(ב) קומבינציה לינארית של המשתנים היא גאוסית:

$$a_1X + a_2Y = a_1X + 3a_2X = (a_1 + 3a_2)X \sim N\left(0, (a_1 + 3a_2)^2\sigma^2\right)$$

(ג)

$$(5.22) \quad E[XY] = E[3X^2] = 3E[X^2] = \text{Cov}[X, Y] = 3\sigma^2$$

$$(5.23) \quad E[Y^2] = 3^2E[X^2] = \text{Var}[Y] = 9\sigma^2$$

$$(5.24) \quad C_{XY} = \begin{bmatrix} \text{Cov}[X, X] & \text{Cov}[X, Y] \\ \text{Cov}[Y, X] & \text{Cov}[Y, Y] \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(5.25) \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_X\right)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, C_X = \sigma^2, C_Y = \mathbf{a}^T C_X \mathbf{a}$$

דרך נוספת, היא ע"י הקשר $C_Y = \mathbf{a}^T C_X \mathbf{a}$

משתנים גאוסיים במשותף חסרי קורלציה (תכונה 5.7): כאשר משתנים גאוסיים במשותף הם חסרי קורלציה, הם גם בלתי תלויים (חסרי קורלציה $\Leftrightarrow$ בלתי תלויים).

דוגמה 5.6: נתונים משתנים אקראיים X, Y עם $\text{Cov}[X, Y] \neq 0$. נגדיר

$$Z = aX + Y$$

כאשר a הוא קבוע דטרמיניסטי.

(א) האם ייתכן מצב של $\text{Cov}[X, Z] = \rho_{XZ} = 0$?

(ב) חזור על הסעיף הקודם עבור X, Y גאוסיים במשותף.

פתרון:

$$\text{Cov}[X, Z] = E[XZ] - E[X]E[Z]$$

$$E[Z] = aE[X] + E[Y]$$

$$E[XZ] = aE[X^2] + E[XY]$$

$$\text{Cov}[X, Z] = aE[X^2] + E[XY] - aE^2[X] - E[X]E[Y]$$

$$= a\text{Var}[X] + \text{Cov}[X, Y] = 0$$

$$a = -\frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}$$

עבור X, Y גאוסיים במשותף:

□ משתנה Z הוא גאوسی (קומבינציה לינארית של המשתנים גאוסיים במשותף).

□ משתנים X, Z הם בלתי תלויים (ע"פ תכונה 5.2)!

הערה: ניתן לרשום את התרגיל גם בצורה של הכפלה במטריצה,

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

דוגמה 5.7: נתונים משתנים

$$\text{בלתי תלויים} \begin{cases} X \sim N(0, 1) \\ W = p(W = \pm 1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y = WX$$

□ X, Y בעלי התפלגות שולית גאוסית

□ X, Y חסרי קורלציה

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - \underbrace{E[X]}_0 E[Y] = E[X^2 W] = E[X^2] \underbrace{E[W]}_{E[W]=1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2}} = 0$$

□ תלויים, $|X| = |Y|$.

□ אינם בעלי התפלגות גאוסית משותפת.

- עבור התפלגות גאוסית משותפת, משתנים חסרי קורלציה הם גם בלתי תלויים.

- מצב של $p(X + Y = 0) = \frac{1}{2}$ לא יכול לקרות עבור התפלגות רציפה (בוודאי גם גאוסית).

סיכום: מדובר במשתנים בעלי התפלגות גאוסית, אבל לא במשותף.

חיזוי לינארי אופטימלי (הגדרה 5.3):

עבור משתנים גאוסיים במשותף, החיזוי לינארי הוא חיזוי אופטימלי (מיטבי), שאין חיזוי יותר טוב ממנו.

זוג משתנים גאוסיים במשותף PDF (הגדרה 5.4):

ה-PDF המשותף של זוג משתנים גאוסיים

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right)$$

נתון ע"י

$$(5.26) \quad f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right)$$

התפלגויות שוליות (תכונה 5.8): התפלגויות השוליות של משתנים גאוסיים במשותף הן גאוסיות.

צורת ה-PDF (תכונה 5.9): ניתן לשים לב, שביטוי בתוך $\exp()$ הוא אליפסה מהצורה

$$(5.27) \quad \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] = c^2$$

עבור מקרי קצה

□ $\rho = 0$ המשתנים הם חסרי קורלציה, והצורה היא צורת מעגל.

□ $\rho = \pm 1$ קשר לינארי, והצורה היא קו ישר.

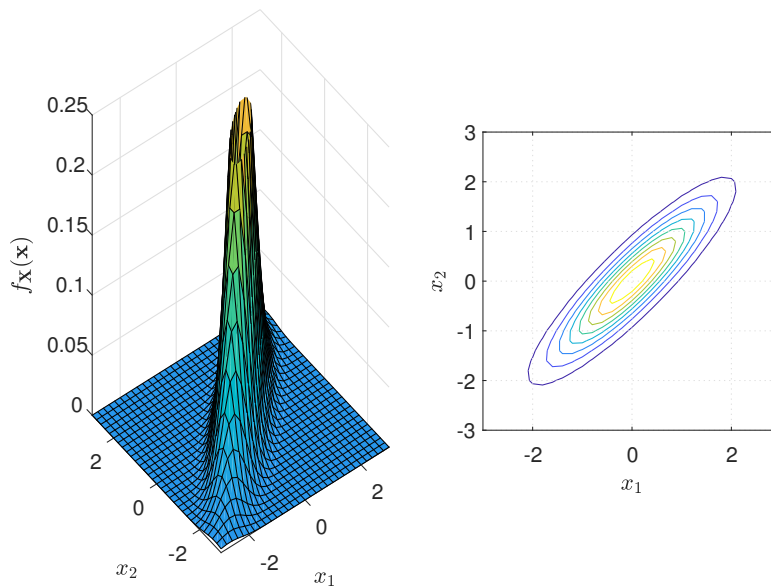
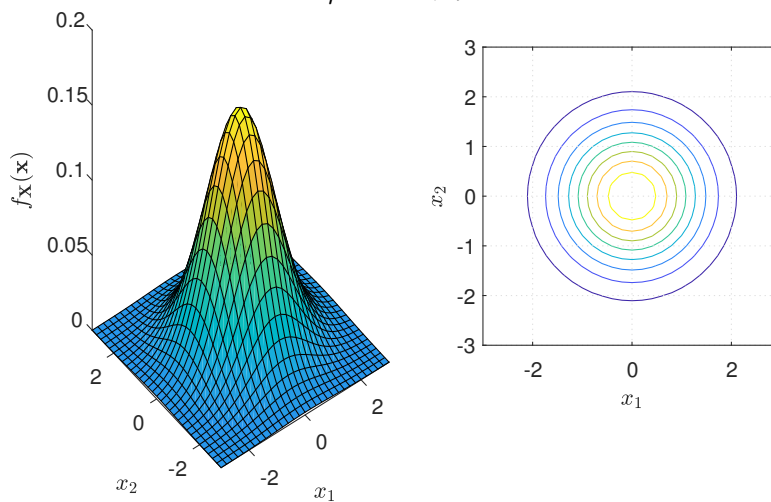
דוגמה ל-PDF של משתנה גאוס דו-ממדי, עבור $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$, מופיעה באיור 5.1.

דוגמה 5.8: נתון משתנה אקראי גאוס דו-ממדי, $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim$

כאשר תוחלות וערכי מטריצת covariance נתונים $N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right)$, בצורה מספרית. חשב ערך מספרי של $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ עבור נתונים.

פתרון: ניתן לביצוע ע"י חישוב מספרי בלבד. לדוגמא, באופן הבא:

```
mu = [mu1; mu2];
Cv = [sigma1^2 rho*sigma1*sigma2; ...
      rho*sigma1*sigma2 sigma2^2];
mvncdf([x1; x2], mu, Cv)
```

 $\rho = 0.9$ (א) $\rho = 0$ (ב)

איור 5.1: דוגמה ל-PDF של משתנה גאוסית דו-ממדי, $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, עבור $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

5.3 התפלגות גאוסית רב-ממדית

מטרה: להרחיב הגדרה דו-ממדית להגדרה בר-ממדית.

PDF 5.3.1

PDF של משתנה גאוסית (הגדרה 5.5):

PDF של משתנה גאוסית רב-ממדי $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ נתונה ע"י

$$(5.28) \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det[\mathbf{C}_{\mathbf{X}}]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

כאשר C_X זה מטריצת covariance, $\mu = E[X]$, לסיכום, $X \sim N(\mu, C_X)$.

מקרה פרטי של $X_k \sim N(0, 1)$ (תכונה 5.10): במקרה פרטי של $X_k \sim N(0, 1)$ בלתי תלויים מתקיים

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_N}(x_N) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

כאשר מטריצה $C_X = \mathbf{I}^{N \times N}$ היא מטריצת יחידה, ווקטור תוחלות מורכב מאפסים $\mu = \mathbf{0}^{N \times 1}$.

קומבינציה לינארית (תכונה 5.11): עבור קומבינציה לינארית של משתנים אקראיים גאאוסיים $X \sim N(\mu, C_X)$ מהצורה $Y = \mathbf{a}^T X$, כאשר $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ הוא וקטור ממשי, מתקיים

$$Y \sim N(\mathbf{a}^T \mu, \mathbf{a}^T C_X \mathbf{a}) \quad (5.30)$$

עבור מקרה פרטי של משתנים בלתי תלויים, כאשר $C_X = \text{diag}[\text{Var}[X_1], \text{Var}[X_2], \dots, \text{Var}[X_N]]$, $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$ מתקיים

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^N a_i \mu_i, \sum_{i=1}^N (a_i \sigma_i)^2\right). \quad (5.31)$$

דוגמה 5.9: נתונים משתנים בלתי תלויים $X_1, X_2, X_3 \sim N(\mu, \sigma^2)$ מהי התפלגות של $Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$?

פתרון:

$$\begin{aligned} E[Y] &= (1 + 2 + 3)\mu \\ \text{Var}[Y] &= (1^2 + 2^2 + 3^2) \sigma^2 \\ Y &\sim N(E[Y], \text{Var}[Y]) \end{aligned}$$

דוגמה 5.10: נתונים משתנים בלתי תלויים $X_1, X_2, X_3 \sim N(0, 1)$ מהי התפלגות המשותפת של

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ Y_2 &= X_1 - X_2 \\ Y_3 &= X_2 - X_3 \end{aligned}$$

פתרון: קומבינציה לינארית של משתנים אקראיים גאאוסיים היא משתנה אקראי גאאסי.

בנוסף, ניתן לרשום,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

באופן פרטני,

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_1] &= \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \text{Var}[X_3] = 3 \\ \text{Var}[Y_2] &= \text{Var}[X_1] + (-1)^2 \text{Var}[X_2] = 2 \\ \text{Cov}[Y_1, Y_3] &= E[Y_1 Y_3] \\ &= \cancel{E[X_1 X_2]} - \cancel{E[X_1 X_3]} + E[X_2^2] - \cancel{E[X_2 X_3]} + \cancel{E[X_2 X_3]} - E[X_3^2] \\ &= 0 \\ \text{Cov}[Y_2, Y_3] &= -E[X_2^2] + \cancel{\cdot} = -1 \end{aligned}$$

5.4 שאלות

5.1 (שונות) X, Y הם משתנים אקראיים כלשהם.

(א) הוכח ביטוי עבור $\text{Var}[X - Y]$.

(ב) נתון שמשתנים X, Y הם גאוסיים במשותף, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$,

חשב $E[X - Y], \text{Var}[X - Y]$ כפונקציה של פרמטרי ההתפלגות.

5.2 (משתנים דו-ממדים גאוסיים) נתונים משתנים אקראיים $X_1 \sim N(m, \sigma^2), X_2 \sim N(m, \sigma^2)$.
לא ניתן להניח אי תלות בין X_1, X_2 ! נגדיר משתנים חדשים:

$$(5.32) \quad V = X_1 \cos(\theta) + X_2 \sin(\theta)$$

$$(5.33) \quad W = -X_1 \sin(\theta) + X_2 \cos(\theta)$$

(א) מצא ערך של $-\pi \leq \theta \leq \pi$, עבורו משתנים V, W בלתי תלויים.

(ב) (סעיף כפול!) מהי התפלגות המשותפת של משתנים V, W , ומה הפרמטרים של התפלגות הזאת? בסעיף זה ניתן להניח $E[X_1 X_2] = b$. לא ניתן להניח ערך θ מסעיף הקודם.

5.3 (CDF) נתונים זוג משתנים גאוסיים $X \sim N(1/2, 1)$, $Y \sim N(1/2, 2^2)$, בעלי מקדם קורלציה של $1/2$ ביניהם. בהינתן פונקציות CDF מהצורה $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_{XY}(x, y)$, יש חשב הסתברויות:

$$\Pr(-1 < X < 1, Y < 1),$$

$$\Pr(X < 1, -1 < Y)$$

רמז: ניתן ליהעזר בדוגמה 3.7.

5.4 (תאוריה ו/או סימולציה) נתון רצף ניסויים $X_1, X_2, \dots, X_{200}$, כאשר הניסויים הם בלתי תלויים $X_i \sim N(1/2, 1/2^2)$. נגדיר

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$$

יש לחשב $\Pr(90 \leq Y \leq 110)$

5.5 (תאוריה) נתונים משתנים אקראיים גאוסיים, $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(1, 2)$, $X_3 \sim N(0, 1)$ (סימון $N(\mu, \sigma^2)$). ידוע, שמקדם קורלציה בין X_1, X_2 הוא $\rho_{X_1 X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. בנוסף,

$$Y_1 = X_2 + X_3 \sim N(1, 5)$$

$$Y_2 = -X_1 + 2X_3 \sim N(0, 3)$$

$$Y_3 = X_1 + 2X_2$$

$$Y_4 = 3X_1 + 2X_2$$

(א) מהו חיזוי אופטימלי במובן שגיאה ריבועית מינימלית של X_2 מתוך X_1 ?

(ב) מהו חיזוי אופטימלי במובן שגיאה ריבועית מינימלית של Y_3 מתוך Y_4 ?

(ג) לכל אחד מהזוגות משתנים, יש להוכיח, האם הם בלתי תלויים? רמז: ניתן להיעזר בהגדרות של Y_1, Y_2 .

$$(5.1) \quad X_1, X_3$$

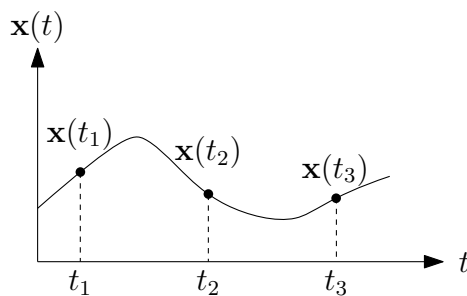
$$(5.2) \quad X_2, X_3$$

חלק II

תהליכים/אותות אקראיים

הקדמה לאותות אקראיים

כדי להמחיש את הדברים, נעשה שימוש בתהליך אקראי בזמן רציף, $x(t)$ (איור 5.2). כמובן, אותם שאלות ניתן לשאל על תהליך בזמן בדיד.



איור 5.2: דוגמה לתהליך אקראי.

רשימה חלקית של שאלות שנתעסק במהלך הקורס:

- ☐ מהי התפלגות של $x(t_1)$?
- ☐ האם התפלגות של $x(t_1)$ שונה מהתפלגות $x(t_2)$ ושל $x(t_3)$?
- ☐ מהי משמעות של תוחלת ושונות של $x(t)$?
- ☐ האם ניתן לחזות ערך של $x(t_3)$ מתוך $x(t_2)$?
- ☐ איך מחשבים הספק של $x(t)$?
- ☐ האם ניתן לחזות ערך של $x(t_3)$ טוב יותר, מתוך $x(t_1), x(t_2)$?
- ☐ האם יש שוני בחיזוי של $x(t_3)$ מתוך $x(t_2)$, לעומת בחיזוי של $x(t_2)$ מתוך $x(t_1)$?
- ☐ מה הקשר בין חיזוי לסינון ?
- ☐ איך מסננים רעש מהאות ?
- ☐ האם יש שוני בסינון במישור הזמן לעומת סינון במישור התדר ?

פרק 6

מבוא לאותות אקראיים

מטרה: לאפיין אותות אקראיים

תוכן הפרק	
75	6.1 סיווגים של אותות אקראיים
76	6.2 ערך בודד
77	6.3 זוג ערכים
78	6.3.1 Auto-correlation
79	6.3.2 Auto-covariance
80	6.3.3 דוגמאות
83	6.4 תהליכים סטציונריים
83	6.4.1 הקדמה
84	6.4.2 סטציונריות
85	6.4.3 תכונות תהליכי WSS
88	6.4.4 רעש לבן גאوسی
90	6.5 צפיפות הספק ספקטרלית
90	6.5.1 התמרות פוריה
91	6.5.2 הגדרה
93	6.5.3 רעש לבן גאوسی
94	6.6 שאלות

6.1 סיווגים של אותות אקראיים

סיווג הבסיסי הוא ע"פ ציר הזמן והתפלגות הערכים.

זמן (תכונה 6.1): בדיד או רציף.

ערך (תכונה 6.2): בדיד או רציף.

6.2 ערך בודד

מטרה: להגדיר ולאפיין ערך של אות אקראי בזמן מסויים.

ערך בודד (תכונה 6.3): ערך בודד של תהליך אקראי היא משתנה אקראי.

זמן t או n הוא פרמטר שרירותי, שניתן להציב עבורו כל ערך הנדרש. "ערך בודד" היא כוונה לנקודה שרירותית בזמן רציף או בדיד. אין הכוונה לפעולת דגימה כפי שהיא מוגדרת בעיבוד אותות ספרתי.

CDF (הגדרה 6.1):

ההגדרה זהה לתהליכים בזמן רציף/בדיד

$$(א6.1) \quad F_{\mathbf{x}}(x; t) = \Pr(\mathbf{x}(t) \leq x)$$

$$(ב6.1) \quad F_{\mathbf{x}}(x; n) = \Pr(\mathbf{x}[n] \leq x).$$

כמו משתנה
אקראי, רק
משתנה בזמן

PDF (הגדרה 6.2):

ההגדרה שונה עבור זמן רציף ובדיד, בדומה להגדרה עבור משתנה אקראי

$$(א6.2) \quad f_{\mathbf{x}}(x; t) = \frac{\partial}{\partial x} F_{\mathbf{x}}(x; t)$$

$$(ב6.2) \quad p_{\mathbf{x}}[x_k; n] = \Pr[\mathbf{x}[n] = x_k].$$

תוחלת (הגדרה 6.3):

תוחלת כפונקציה של זמן

$$(א6.3) \quad E[\mathbf{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}}(x; t) dx = \mu_{\mathbf{x}}(t)$$

$$(ב6.3) \quad E[\mathbf{x}[n]] = \sum_k x_k p_{\mathbf{x}}[x_k; n] = \mu_{\mathbf{x}}[n]$$

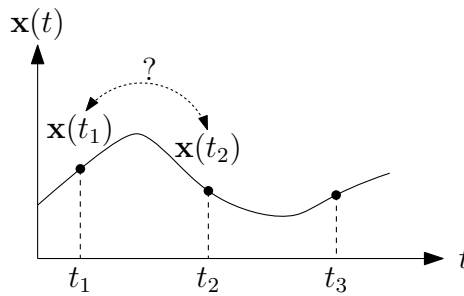
משמעות התוחלת היא מיצע של כל האפשרויות של תוצאה של ניסוי אקראי בנקודת זמן נתונה.

שונות (הגדרה 6.4):

שונות כפונקציה של זמן

$$(א6.4) \quad \text{Var}[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}^2(t)] - E^2[\mathbf{x}(t)] = \sigma_{\mathbf{x}}^2(t)$$

$$(ב6.4) \quad \text{Var}[\mathbf{x}[n]] = E[\mathbf{x}^2[n]] - E^2[\mathbf{x}[n]] = \sigma_{\mathbf{x}}^2[n]$$



איור 6.1: איך מאפיינים קשר סטטיסטי בין $x(t_1)$ לבין $x(t_2)$?

6.3 זוג ערכים

מטרה: להגדיר ולאפיין קשר בין זוג הדגימות בזמן של אות אקראי.

זוג ערכים (תכונה 6.4): זוג ערכים של תהליך אקראי זה זוג משתנים אקראיים.

ניתן להגדיר את התפלגות המשותפת של זוג הדגימות, בין היתר ע"י PDF ו-CDF.

התפלגות
משותפת

CDF (הגדרה 6.5):

ההגדרה זהה לתהליכים בזמן רציף/בדיד

$$(א6.5) \quad F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \Pr(\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2)$$

$$(ב6.5) \quad F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; n_1, n_2) = \Pr(\mathbf{x}[n_1] \leq x_1, \mathbf{x}[n_2] \leq x_2)$$

PDF (הגדרה 6.6):

בדומה למקרה של ערך בודד

$$(א6.6) \quad f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$(ב6.6) \quad p_{\mathbf{x}}[x_1, x_2; n_1, n_2] = \Pr[\mathbf{x}[n_1] = x_1, \mathbf{x}[n_2] = x_2].$$

כמובן, בלי הגבלת הכלליות ניתן להרחיב את ההגדרה ל- n דגימות, כאשר כתוצאה מכך מתקבלת התפלגות n -מימדית,

$$F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \Pr(\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2, \dots, \mathbf{x}(t_n) \leq x_n).$$

תכונות של זוג ערכים ניתן לראות כהרחבה של הקשר בין זוג משתנים. אם לסמן

$$X = \mathbf{x}(t_1)$$

$$Y = \mathbf{x}(t_2),$$

ניתן להגדיר את המקבילות של $E[XY]$, $\text{Cov}[X, Y]$, ρ_{XY} , לרבות מאפייניהם מיוחדים, כגון מצב של $t_1 = t_2$.

Auto-correlation 6.3.1

אוטו-קורלציה (auto-correlation) (הגדרה 6.7):

ניתן להגדיר קשר בין הדגימות ע"י

$$\begin{aligned}
 (א6.7) \quad R_x(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} f_x(s, v; t_1, t_2) s v ds dv
 \end{aligned}$$

$$(ב6.7) \quad R_x[n_1, n_2] = E[x[n_1]x[n_2]]$$

סימטריה בזמן (תכונה 6.5): הקשר בין $x[n_1]$ לבין $x[n_2]$ זהה לזה של $x[n_2]$ לבין $x[n_1]$.

$$(א6.8) \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$$

$$(ב6.8) \quad R_x[n_1, n_2] = R_x[n_2, n_1]$$

זמנים זהים (תכונה 6.6): עבור $t_1 = t_2 = t$ (או $n_1 = n_2 = n$)

$$(א6.9) \quad R_x(t, t) = E[x^2(t)]$$

$$(ב6.9) \quad R_x[n, n] = E[x^2[n]]$$

אורטוגונליים (הגדרה 6.8):

עבור $x(t_1), x(t_2)$ אורטוגונליים מתקיים

$$(א6.10) \quad R_x(t_1, t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2$$

$$(ב6.10) \quad R_x[n_1, n_2] = 0 \quad n_1 \neq n_2.$$

בלתי תלויים (הגדרה 6.9):

עבור $x(t_1), x(t_2)$ בלתי תלויים מתקיים

$$(א6.11) \quad R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)]E[x(t_2)]$$

$$(ב6.11) \quad R_x[n_1, n_2] = E[x[n_1]]E[x[n_2]]$$

חשוב לשים לב, שגם עבור תהליכים בלתי תלויים

טעות נפוצה

$$R_x(t_1, t_1) = E[x^2(t_1)] \neq E[x(t_1)]E[x(t_1)] = E^2[x(t_1)]$$

Auto-covariance 6.3.2

שונות משותפת (auto-covariance) (הגדרה 6.10):

בהמשך להגדרה של שונות משותפת בהגדרה 3.3.1.

$$\begin{aligned} (א6.12) \quad C_x(t_1, t_2) &= E \left[\{x(t_1) - E[x(t_1)]\} \{x(t_2) - E[x(t_2)]\} \right] \\ &= E[x(t_1)x(t_2)] - E[x(t_1)] E[x(t_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ב6.12) \quad C_x[n_1, n_2] &= E \left[\{x[n_1] - E[x[n_1]]\} \{x[n_2] - E[x[n_2]]\} \right] \\ &= E[x[n_1]x[n_2]] - E[x[n_1]] E[x[n_2]] \end{aligned}$$

קשר לאוטו-קורלציה (תכונה 6.7): שונות משותפת היא סוג של אוטו-קורלציה מנורמלת

$$(א6.13) \quad C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - E[x(t_1)]E[x(t_2)]$$

$$(ב6.13) \quad C_x[n_1, n_2] = R_x[n_1, n_2] - E[x[n_1]] E[x[n_2]]$$

סימטריה בזמן (תכונה 6.8): הקשר בין $x[n_1]$ לבין $x[n_2]$ זהה לזה של $x[n_2]$ לבין $x[n_1]$.

$$(א6.14) \quad C_x(t_1, t_2) = C_x(t_2, t_1)$$

$$(ב6.14) \quad C_x[n_1, n_2] = C_x[n_2, n_1]$$

זמנים זהים (תכונה 6.9): עבור $t_1 = t_2 = t$ (או $n_1 = n_2 = n$) שונות משותפת של אותה הדגימה בזמן היא שונות רגילה

$$(א6.15) \quad C_x(t, t) = \text{Var}[x(t)]$$

$$(ב6.15) \quad C_x[n, n] = \text{Var}[x[n]]$$

מקדם קורלציה בין הדגימות (תכונה 6.10): ניתן להגדיר מקדם קורלציה בין זוג הדגימות

$$(א6.16) \quad \rho_x(t_1, t_2) = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{C_x(t_1, t_1)C_x(t_2, t_2)}} = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\text{Var}[x(t_1)] \text{Var}[x(t_2)]}}$$

$$(ב6.16) \quad \rho_x[n_1, n_2] = \frac{C_x[n_1, n_2]}{\sqrt{C_x[n_1, n_1]C_x[n_2, n_2]}} = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\text{Var}[x[n_1]] \text{Var}[x[n_2]]}}$$

כמובן, מתקיים $|\rho_x| \leq 1$.

חסרי קורלציה (הגדרה 6.11):עבור $x(t_1), x(t_2)$ חסרי קורלציה מתקיים

$$(א6.17) \quad C_x(t_1, t_2) = 0 \quad t_1 \neq t_2$$

$$(ב6.17) \quad C_x[n_1, n_2] = 0 \quad n_1 \neq n_2$$

בעלי תוחלת 0 (הגדרה 6.12):במקרה של $E[x(t_1)] = 0$ או $E[x(t_2)] = 0$ מתקיים

$$(א6.18) \quad C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

$$(ב6.18) \quad C_x[n_1, n_2] = R_x[n_1, n_2]$$

6.3.3 דוגמאות

דוגמה 6.1: מתנד עם אמפליטודה אקראית קבועה: נתון אות $x(t) = A \cos(2\pi t)$, כאשר A הוא משתנה אקראי. ניתן להניח $E[A]$, $E[A^2]$ ידועים. נדרש לחשב: $E[x(t)]$, $\text{Var}[x(t)]$, $R_x(t_1, t_2)$, $C_x(t_1, t_2)$, $\rho_x(t_1, t_2)$.

פתרון: ראו גם איור 6.2א.

$$E[x(t)] = E[A] \cos(2\pi t)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] &= E[x^2(t)] - E^2[x(t)] \\ &= E[A^2] \cos^2(2\pi t) - E^2[A] \cos^2(2\pi t) \\ &= (E[A^2] - E^2[A]) \cos^2(2\pi t) = \text{Var}[A] \cos^2(2\pi t) \end{aligned}$$

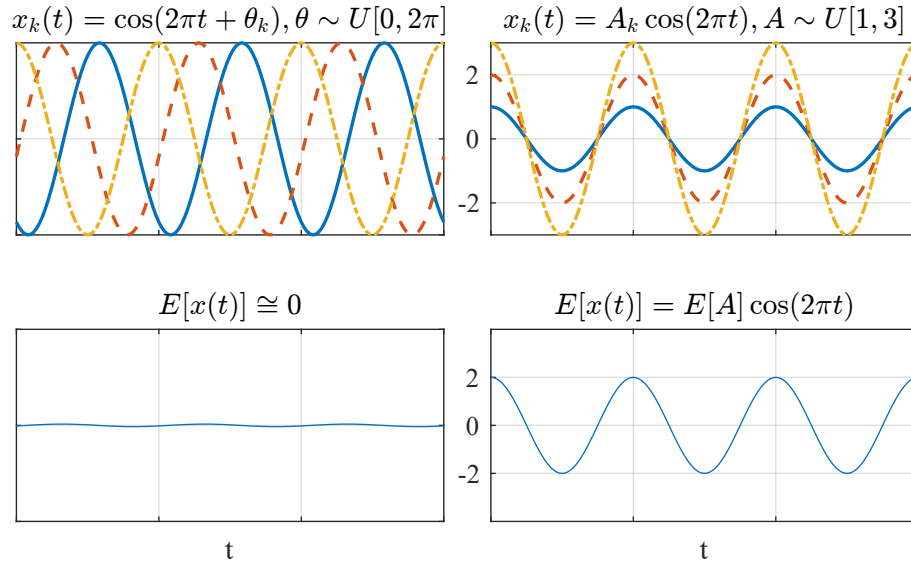
$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\ &= E[A \cos(2\pi t_1) A \cos(2\pi t_2)] \\ &= E[A^2] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_x(t_1, t_2) &= R_x(t_1, t_2) - E[x(t_1)]E[x(t_2)] \\ &= E[A^2] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) - E[A] \cos(2\pi t_1) E[A] \cos(2\pi t_2) \\ &= (E[A^2] - E^2[A]) \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) \\ &= \text{Var}[A] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) \end{aligned}$$

$$C_x(t, t) = \text{Var}[x(t)]$$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= \frac{C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)}{\sqrt{C_{\mathbf{x}}(t_1, t_1)C_{\mathbf{x}}(t_2, t_2)}} = \frac{\text{Var}[A] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2)}{\sqrt{\text{Var}[A] \cos^2(2\pi t_1) \text{Var}[A] \cos^2(2\pi t_2)}} \\ &= \text{sgn} [\cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2)] = \pm 1\end{aligned}$$

חיזוי לינארי מושלם הינו אפשרי עבור $\cos(2\pi t_i) \ni 0$. מאידך, לא ניתן לחזות שום דבר מועיל מתוך ערך $x(t) = 0$.



6.1 (ב) דוגמה

6.2 (א) דוגמה

איור 6.2: איורים עבור דוגמאות 6.1, 6.2.

דוגמה 6.2: מתנד עם מופע (פאזה) אקראית קבועה: נתון אות $\mathbf{x}(t) = \cos(2\pi t + \theta)$, כאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$. חשב:

$$E[\mathbf{x}(t)], \text{Var}[\mathbf{x}(t)], R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2), C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2), \rho_{\mathbf{x}}(t_1, t_2).$$

פתרון: ראו גם איור 6.2. התוחלת מתאפסת בגלל שמדובר בכל האפשרויות של פאזה, לרבות פאזות מנוגדות.

$$\begin{aligned}E[\mathbf{x}(t)] &= E[\cos(2\pi t + \theta)] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi t + \theta) f_{\theta}(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t + \theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)] \\ &= E[\cos(2\pi t_1 + \theta) \cos(2\pi t_2 + \theta)] \leftarrow \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{2} E[\cos(2\pi [t_1 - t_2])] + \underbrace{\frac{1}{2} E[\cos(2\pi [t_1 + t_2] + 2\theta)]}_{=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cos(2\pi [t_1 - t_2]) \\
&= C_x(t_1, t_2) \\
\text{Var}[\mathbf{x}(t)] &= C_x(t, t) = \frac{1}{2} \\
\rho_x(t_1, t_2) &= \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{C_x(t_1, t_1)C_x(t_2, t_2)}} \\
&= \cos(2\pi [t_1 - t_2])
\end{aligned}$$

דוגמה 6.3: תהליך אקראי בשם הילך אקראי (random walk): נתון אות מהצורה

Random Walk

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}[i],$$

כאשר $\mathbf{w}[n] \sim A$ ועבור כל n נערכת הגרלה מחדש, $\mathbf{w}[m], \mathbf{w}[k]$ בלתי תלויים.
חשב:

$$E[\mathbf{x}[n]], \text{Var}[\mathbf{x}[n]] \quad (\text{א})$$

(ב) מהי התפלגות של הדגימה n ?

(ג) בהנחה של $E[A] = 0$ יש לחשב $R_x[n, m]$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
(6.19) \quad E[\mathbf{x}[n]] &= E\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{w}[i]\right] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\mathbf{w}[i]] = nE[A]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6.20) \quad \text{Var}[\mathbf{x}[n]] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{w}[i]\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Var}[\mathbf{w}[i]] = n\text{Var}[A]
\end{aligned}$$

עבור n מספיק גדול בהתאם למשפט גבול המרכזי מתקיים

$$(6.21) \quad \mathbf{x}[n] \sim N(nE[A], n\text{Var}[A])$$

$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{x}}[n, m] &= E \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{w}[i] \sum_{j=1}^m \mathbf{w}[j] \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{E[\mathbf{w}[i] \mathbf{w}[j]]}_{\begin{cases} E^2[A] = 0 & i \neq j \\ E[A^2] & i = j \end{cases}} \\
 &= \min(n, m) E[A^2]
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

דוגמה בקוד:

```

n = 50; % number of variables
N = 1e6; % number of experiments
X = (randi(2, [n N]) - 1.5) * 2;
% X = exprnd(1, n, N); % experiment results
Y = sum(X, 1);
histogram(Y, 'Normalization', 'pdf')
title(['Mean = ' num2str(mean(Y)) ', Var = ' num2str(var(Y))])

```

6.4 תהליכים סטציונאריים

מטרה: תת-סיווג של תהליכים אקראיים המשמש כמודל למגוון אותות בתחום הנדסת חשמל. מדובר באותות שתכונות הסטטיסטיות שלהן לא משתנות בזמן.

הקדמה חיזוי לינארי של $x[n_2]$ מתוך $x[n_1]$ נתון ע"י,

$$\hat{x}[n_2] = E[x[n_2]] + \frac{C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2]}{C_{\mathbf{x}}[n_1, n_1]} (x[n_1] - E[x[n_1]])
 \tag{6.23}$$

החישוב הזה לא מעשי, פרט למצב מסויים של אי-תלות בזמן להלן.

6.4.1 הקדמה

כפי הידועה, כל ערך של אות אקראי בזמן נתון הינו משתנה אקראי (תכונה 6.2).

ערך בודד נחזור לתכונות המתקבלות עבור ערך בודד (פרק 6.2), כאשר כל התכונות הסטטיסטיות של $x(t)$ הן קבועות בזמן, עבור הזזה שרירותית בזמן $x(t+c)$. לדוגמה, מתקבל:

$$F_{\mathbf{x}}(x; t) = F_{\mathbf{x}}(x; t + c) = F_{\mathbf{x}}(x)
 \tag{א6.24}$$

$$f_{\mathbf{x}}(x; t) = f_{\mathbf{x}}(x; t + c) = f_{\mathbf{x}}(x)
 \tag{ב6.24}$$

זוג ערכים נחזור לתכונות המתקבלות עבור ערך בודד (פרק 6.3), כאשר כל התכונות הסטטיסטיות של $x(t)$ הן קבועות עבור הזזה שרירותית בזמן $x(t+c)$, עבור כל זמני t אפשריים. לדוגמה, מתקבל:

$$(א6.25) \quad F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_x(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c)$$

$$(ב6.25) \quad f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c).$$

בלי הגבלת הכלליות, ניתן לבחור $c = -t_1$ או $c = -t_2$ ולרשום

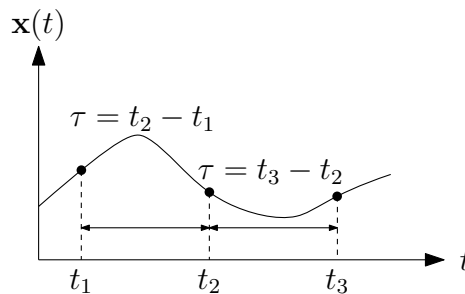
$$(א6.26) \quad F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_x(x_1, x_2; \tau)$$

$$(ב6.26) \quad f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2; \tau),$$

כאשר

$$(6.27) \quad \tau = t_2 - t_1.$$

מצב זה מופיע באיור 6.3.



איור 6.3: הקשר בין $x(t_1)$ לבין $x(t_2)$ זהה לזה בין $x(t_2)$ לבין $x(t_3)$ בתהליכי WSS.

6.4.2 סטציונריות

תהליך סטציונרי במובן הרחב (הגדרה 6.13):

התהליכים, נקראים סטציונריים במובן הרחב אם ורק אם מתקיימות משוואות (6.24), (6.25). סימון המקובל לתהליכים אלו הוא WSS, ראשי תיבות של wide sense stationary.

משמעות ההגדרה היא, שהזזה במזמן לא משנה תכונות סטטיסטיות של $x(t)$ לעומת $x(t+\tau)$.

תהליך סטציונרי במובן צר (הגדרה 6.14):

תהליכים, עבורם התפלגות n -מימדית משותפת של n דגימות קבוע בזמן, עבור כל ערכים אפשריים של הזמנים t_i , ועבור $\forall n, n > 2$ מתקיים

$$(6.28) \quad F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

נקראים תהליכים סטציונריים במובן צר. סימון המקובל לתהליכים אלו הוא SSS, ראשי תיבות של strict sense stationary.

בשביל הרבה שימושים פרקטיים ניתן להסתפק בתכונת WSS בלבד, ללא צורך בהרחבה ל-WSS. לרוב נסתפק בהגדרת ה-WSS, עבור $n = 2$.

הוכחת סטציונריות (תכונה 6.11): התהליך הוא סטציונארי (WSS) אם ורק אם מתקיימות בו-זמנית המשוואות (6.24), (6.25). בפועל, יש להוכיח את הקשרים הבאים:

□ תוחלת בלתי-תלויה בזמן (תכונה 6.4.2).

□ אוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד (תכונה 6.4.2).

בדיקה האם
WSS?!

תוחלת (תכונה 6.12): תוחלת בלתי תלויה בזמן

$$(א6.29) \quad E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}(0)] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const}$$

$$(ב6.29) \quad E[\mathbf{x}[n]] = E[\mathbf{x}[0]] = \mu_{\mathbf{x}} = \text{const}$$

אוטו-קורלציה (תכונה 6.13): אוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד

$$(א6.30) \quad R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)] = R_{\mathbf{x}}(\tau)$$

$$(ב6.30) \quad R_{\mathbf{x}}[n, n + k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n + k]] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

כאשר בגלל סימטריה (תכונה 6.4.3 להלן), הקשר $\tau = t_2 - t_1$ הורחב ל- $\tau = |t_2 - t_1|$. דרך נוספת לרישום היא

$$(א6.31) \quad R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau = |t_2 - t_1|), \quad \forall t_1, t_2$$

$$(ב6.31) \quad R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = R_{\mathbf{x}}(k = |n_2 - n_1|), \quad \forall n_1, n_2,$$

דוגמה 6.4: האות בדוגמא 6.2 הוא WSS.

דוגמה 6.5: רמת DC אקראית, $\mathbf{x}[n] = A$, כאשר $A \sim N(0, 1)$ הוא משתנה אקראי גאוס. האם מדובר בתהליך WSS?

פתרון:

$$E[\mathbf{x}[n]] = E[A] = 0$$

$$R_{\mathbf{x}}[n, n + k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n + k]] = E[A^2] = R_{\mathbf{x}}[k] = 1$$

שתי הערכים המתקבלים בלתי תלויים בזמן.

6.4.3 תכונות תהליכי WSS

להלן תוכנות העיקריות של תהליכי WSS.

סימטריה בזמן (תכונה 6.14):

$$(א6.32) \quad R_x(-\tau) = R_x(\tau) \qquad R_x[-k] = R_x[k]$$

$$(ב6.32) \quad C_x(-\tau) = C_x(\tau) \qquad C_x[-k] = C_x[k]$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} R_x(-\tau) &= E[x(t)x(t-\tau)] \\ (6.33) \quad &= E[x(t-\tau)x(t)] \leftarrow t = t + \tau \\ &= E[x(t)x(t+\tau)] \end{aligned}$$

קשר בין שונות משותפת לאוטו-קורלציה (תכונה 6.15): התוצאה המתבקשת מתכונה הוקדמת היא

$$(א6.34) \quad C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$$

$$(ב6.34) \quad C_x[k] = R_x[k] - \mu_x^2$$

הספק ממוצע (הגדרה 6.15):

הספק ממוצע של אות אקראי סטציונרי נתון ע"י

הספק

$$(א6.35) \quad P_x = R_x(0) = E[x(t)^2] = E[x(0)^2]$$

$$(ב6.35) \quad P_x = R_x[0] = E[x[n]^2] = E[x[0]^2]$$

שונות (תכונה 6.16): קשר בין שונות לשונות משותפת בנקודת זמן מסויימת

$$(א6.36) \quad \text{Var}[x(t)] = C_x(t, t) = C_x(0) = \sigma_x^2$$

$$(ב6.36) \quad \text{Var}[x[n]] = C_x[n, n] = C_x[0] = \sigma_x^2$$

מקדם קורלציה (תכונה 6.17): מקדם קורלציה בהפרש זמנים τ

$$(א6.37) \quad \rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{C_x(0)}$$

$$(ב6.37) \quad \rho_x[k] = \frac{C_x[k]}{C_x[0]}$$

ערך מקסימלי (תכונה 6.18):

$$(א6.38) \quad R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$

$$(ב6.38) \quad R_x[0] \geq |R_x[k]|$$

הערה: סימן $\geq$ הוא עבור אותות מחזוריים אינסופיים בזמן בלבד (כגון בדוגמה 6.6), אחרת מדובר בסימן $>$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq E \left[(R_x(t) \pm R_x(t + \tau))^2 \right] \\
 (6.39) \quad &= E \left[R_x^2(t) \right] \pm 2E \left[R_x(t)R_x(t + \tau) \right] + E \left[R_x^2(t + \tau) \right] \\
 &= 2R_x(0) \pm 2R_x(\tau) \geq 0
 \end{aligned}$$

יתרה מזאת, עבור אותות לא מחזוריים ו/או סופיים בזמן מתקיים

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau), \rho_x(\tau) &\rightarrow 0 \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_x(\tau) &\rightarrow \mu_x
 \end{aligned}$$

אורטוגונליים (הגדרה 6.16):

עבור $x(t_1), x(t_2)$ אורטוגונליים מתקיים

$$(6.40) \quad R_x(\tau) = P_x \delta(\tau) \quad R_x[k] = P_x \delta[k] = \begin{cases} P_x & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

חסרי קורלציה (הגדרה 6.17):

עבור $x(t_1), x(t_2)$ חסרי קורלציה מתקיים

$$(6.41) \quad C_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau) \quad C_x[k] = \sigma_x^2 \delta[k] = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

דוגמה 6.6: נתון אות $x(t) = A \cos(2\pi t + \theta)$, כאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ ו- A משתנה אקראי בלתי תלוי ב- θ .

פתרון: ראה גם דוגמה 6.2.

$$\begin{aligned}
 E[x(t)] &= E[A \cos(2\pi t + \theta)] \\
 &= E[A] E[\cos(2\pi t + \theta)] \\
 &= E[A] \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t + \theta) f_{\theta}(\theta) d\theta \\
 &= E[A] \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0
 \end{aligned}$$

$$R_x(t, t + \tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad \downarrow \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[A \cos(2\pi t + \theta) A \cos(2\pi(t + \tau) + \theta) \right] \\
&= \frac{1}{2} E \left[A^2 \right] \left(E[\cos(2\pi\tau)] + E[\cos(2\pi(2t + \tau) + 2\theta)] \right) \\
&= \frac{1}{2} E \left[A^2 \right] \cos(2\pi\tau) = R_x(\tau)
\end{aligned}$$

החישוב לפי $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$ מופיע בתרגיל 6.1.

6.4.4 רעש לבן גאוס

רעש לבן גאוס (הגדרה 6.18):

תהליך אקראי $x[n] \sim N(0, \sigma^2)$, כאשר $x[n], x[m]$ חסרי קורלציה (ובלתי תלויים) נקרא רעש לבן גאוס.

תכונות רעש לבן גאוס (תכונה 6.19):

$$(6.42) \quad E[x[n]] = 0$$

$$(6.43) \quad \text{Var}[x[n]] = \sigma^2$$

$$(6.44) \quad R_x[n_1, n_2] = \sigma^2 \delta[n_1 - n_2] = \begin{cases} 0 & n_1 \neq n_2 \\ \sigma^2 & n_1 = n_2 \end{cases}$$

$$(6.45) \quad = C_x[n_1, n_2] = C_x[k]$$

כל דגימות בלתי תלויות וחסרי קורלציה.

לרעש לבן בזמן רציף, הגדרה ותכונות בהתאם.

דוגמה 6.7: נתון תהליך אקראי

$$(6.46) \quad x[n] = \frac{1}{2}w[n] + \frac{1}{2}w[n-1],$$

כאשר $w[n]$ הוא רעש לבן גאוס. דרך נוספת לרישום התרגיל: $x[n] = h[n] * w[n]$, כאשר $h[n] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$.

□ האם $x[n]$ הוא WSS?

□ יש לחשב $\rho_x[k]$.

פתרון: הפתרון להלן הוא בשני הדרכים:

$$(6.47) \quad R_x[n, n+k] = R_x[k]$$

$$(6.48) \quad R_x[n_1, n_2] = R_x(k = |n_2 - n_1|)$$

כמובן, התוצאה תהיה זהה.

$$E[\mathbf{x}[n]] = \frac{1}{2}E[\mathbf{w}[n]] + E\left[\frac{1}{2}\mathbf{w}[n-1]\right] = 0$$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] &= R_{\mathbf{x}}[n_1, n_2] = E[\mathbf{x}[n_1]\mathbf{x}[n_2]] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{w}[n_1] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n_1-1]\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{w}[n_2] + \frac{1}{2}\mathbf{w}[n_2-1]\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(E[\mathbf{w}[n_1]\mathbf{w}[n_2]] + E[\mathbf{w}[n_1]\mathbf{w}[n_2-1]]\right. \\ &\quad \left.+ \underbrace{E[\mathbf{w}[n_1-1]\mathbf{w}[n_2]]}_{R_{\mathbf{w}}[n_1-1, n_2] = \sigma^2\delta[n_1-n_2-1]} + E[\mathbf{w}[n_1-1]\mathbf{w}[n_2-1]]\right) \\ &= \frac{1}{4}(R_{\mathbf{w}}[n_1, n_2] + R_{\mathbf{w}}[n_1, n_2-1] + R_{\mathbf{w}}[n_1-1, n_2] + \underbrace{R_{\mathbf{w}}[n_1-1, n_2-1]}_{R_{\mathbf{w}}[n_1, n_2]}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\delta[n_1 - n_2] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[n_1 - n_2 - 1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[n_1 - n_2 + 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{x}}[n, n+k] &= R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] \\ &= \frac{1}{4}E[(\mathbf{w}[n] + \mathbf{w}[n-1])(\mathbf{w}[n+k] + \mathbf{w}[n+k-1])] \\ &= \frac{1}{4}\left(E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]] + E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k-1]]\right. \\ &\quad \left.+ \underbrace{E[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k]]}_{\sigma^2\delta[k+1]} + E[\mathbf{w}[n-1]\mathbf{w}[n+k-1]]\right) \\ &= \frac{1}{4}(R_{\mathbf{w}}[n, n+k] + R_{\mathbf{w}}[n, n+k-1] + R_{\mathbf{w}}[n-1, n+k] + \underbrace{R_{\mathbf{w}}[n-1, n+k-1]}_{R_{\mathbf{w}}[k]}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1] = \left\{\frac{\sigma^2}{4}, \underset{\uparrow}{\frac{\sigma^2}{2}}, \frac{\sigma^2}{4}\right\} \\ &= C_{\mathbf{x}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{x}}[k] &= \frac{C_{\mathbf{x}}[k]}{C_{\mathbf{x}}[0]} = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1] = \{1/2, \underset{\uparrow}{1}, 1/2\} \\ &= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{1}{2} & k = \pm 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \end{aligned}$$

```

N = 1e5;      % Signal length
sigma = 2;    % Noise std
w = sigma*randn(1,N); % Noise realization
y = filter([1/2 1/2],1,w); % Filtered noise
[c, lg] = xcorr(y,5,'biased'); % Auto-covariance C_x[k], for |k| <= 5
stem(lg,c)

```

סימולציה ב-matlab עבור $R_x[k], C_x[k]$

6.5 צפיפות הספק ספקטראלית

מטרה: אפיון בתדר של אותות סטציאונריים

6.5.1 התמרות פוריה

התמרת פוריה בזמן רציף (הגדרה 6.19):

התמרת פוריה של אות $x(t)$ בזמן רציף נתונה ע"י

$$(6.49) \quad X(F) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft} dt,$$

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$.

תזכורת
להתמרת פוריה
רגילה

התמרת פוריה בזמן בדיד (הגדרה 6.20):

התמרת פוריה בזמן בדיד (DTFT) נתונה ע"י

$$(6.50) \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn},$$

כאשר f הוא תדר מנורמל.

קיימת הגדרה נוספת נפוצה,

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt,$$

כאשר Ω הוא תדרות זוויתית "אנלוגית" ביחידות $[rad/sec]$. ההגדרה המשלימה של DTFT היא

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

כאשר ω הוא תדרות זוויתית ביחידות $[rad]$.

הגדרה נוספת
המופיע
בספרות

6.5.2 הגדרה

מאחר ופונקציית $R_x(\tau), R_x[k]$ היא דטרמיניסטית, ניתן להיעזר בה להגדרה של ספקטרום של תהליך אקראי.

צפיפות הספק ספקטראלי (הגדרה 6.21):

צפיפות הספק ספקטראלית של התהליך מוגדרת ע"י התמרת פוריה של פונ' אוטו-קורלציה.

$$(א6.51) \quad S_x(F) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$$(ב6.51) \quad S_x(f) = \text{DTFT}\{R_x[k]\}$$

כמובן, מתקיים גם הקשר ההפוך. סימון המקובל לתהליכים אלו הוא PSD, ראשי תיבות של power spectral density, ביחידות $\frac{V^2}{Hz}$ או $\frac{W}{Hz}$. הקשר להלן גם נקרא משפט Wiener-Khinchin-Einstein.

PSD

תכונות PSD (תכונה 6.20): כצפוי, צפיפות הספק היא חיובית וממשית,

$$(א6.52) \quad S_x(F) = S_x(-F)$$

$$(ב6.52) \quad S_x(F) \geq 0, \forall F$$

$$(ג6.52) \quad S_x(F) \in \mathbb{R}$$

$$(ד6.52) \quad S_x(f) = S_x(-f)$$

$$(ה6.52) \quad S_x(f) \geq 0, \forall f$$

$$(ו6.52) \quad S_x(f) \in \mathbb{R}$$

$$(ז6.52) \quad S_x(f) = S_x(f + 1)$$

הוכחה. הוכחה של משוואה (א6.52):

$$\begin{aligned} S_x(F) &= \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi Ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi Ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin(2\pi Ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi Ft) dt \end{aligned}$$

האינטרגל השני מתאפס מאחר ו- $R_x(\tau)$ פונקציה זוגית ו- $\sin$ אי זוגי.

הספק ממוצע (הרחבה של הגדרה 6.4.3) (הגדרה 6.22):

הספק ממוצע של האות מוגדר ע"י

$$(א6.53) \quad P_x = E[x^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) dF$$

$$(ב6.53) \quad P_x = E[x^2[n]] = R_x[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f) df$$

הוכחה. בהתאם להגדרה,

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(F)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) e^{j2\pi F\tau} dF$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) e^{j2\pi F(\tau=0)} dF = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) dF$$

דוגמה 6.8: נתון אות מאופנן DSB מהצורה

$$z(t) = x(t) \sin(2\pi F_0 t + \theta),$$

כאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$, $x(t)$ הוא סטציונארי (WSS) עם $R_x(\tau)$ ידועה, ובלתי תלוי ב- θ .
הוכח, ש- $z(t)$ הוא WSS וחשב P_z , $S_z(F)$.

פתרון:

$$E[z(t)] = E[x(t)] E[\sin(2\pi F_0 t + \theta)] = 0$$

$$R_z(t, t + \tau) = E[z(t)z(t + \tau)] \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$= E[x(t) \sin(2\pi F_0 t + \theta) x(t + \tau) \sin(2\pi F_0(t + \tau) + \theta)] \leftarrow (3.23)$$

$$= E[x(t)x(t + \tau)] E[\sin(2\pi F_0 t + \theta) \cdot \sin(2\pi F_0(t + \tau) + \theta)]$$

$$= R_x(\tau) E\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) - \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 [2t + \tau] + 2\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi F_0 \tau)$$

$$P_z = R_z(0) = \frac{R_x(0)}{2} = \frac{P_x}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(F) dF$$

$$S_z(F) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ R_x(\tau) \left(\frac{e^{j2\pi F_0 \tau}}{2} + \frac{e^{-j2\pi F_0 \tau}}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} [S_x(F + F_0) + S_x(F - F_0)]$$

דוגמה 6.9: (ראה גם דוגמה 6.7) נתון תהליך אקראי $x[n] = \frac{1}{2}w[n] + \frac{1}{2}w[n-1]$, כאשר $w[n]$ הוא רעש לבן גאוס. חשב $S_x(f)$, P_x .

פתרון: בהמשך לדוגמה 6.7

$$R_x[k] = \frac{\sigma^2}{2}\delta[k] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4}\delta[k+1]$$

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \text{DTFT} \{R_x[k]\} \\ &= \frac{\sigma^2}{4} \text{DTFT} \left\{ 1, 2, 1 \right\}_{\uparrow} \\ &= \frac{\sigma^2}{4} (e^{j2\pi f} + 2 + e^{-j2\pi f}) = \frac{\sigma^2}{4} \left(2 + 2 \frac{e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}}{2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (1 + \cos(2\pi f)) \quad \leftarrow S_x(f) \text{ ממשי וחיובי} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x = R_x[0] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_y(f) df = \int_0^1 S_y(f) df = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} S_y(f) df \\ &= \sigma^2 \int_0^{\frac{1}{2}} [1 + \cos(2\pi f)] df \leftarrow \int [1 + \cos(2\pi x)] dx = x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

6.5.3 רעש לבן גאוס

רעש לבן (הגדרה 6.23):

תהליך אקראי WSS, עבורו מתקיים

$$(א6.55) \quad E[\mathbf{n}[n]] = 0$$

$$(א6.54) \quad E[\mathbf{n}(t)] = 0$$

$$(ב6.55) \quad R_n[k] = \sigma^2 \delta[k]$$

$$(ב6.54) \quad R_n(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

ה-PSD הוא

$$(א6.56) \quad S_n(F) = \sigma^2 \quad \forall F$$

$$(ב6.56) \quad S_n(f) = \sigma^2 \quad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$$

רעש לבן גאוס הוא מקרה פרטי של רעש לבן.

רעש לבן גאוס (הגדרה 6.24):

מקרה פרטי של רעש לבן בעל התפלגות גאוסית,

$\mathbf{n}(t) \sim N(0, \sigma^2)$ נהוג לסמן

$$(6.57) \quad \frac{N_0}{2} = \sigma^2,$$

כך שמתקבל

$$(6.58) \quad R_{\mathbf{n}}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_{\mathbf{n}}(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

סימון המקובל לתהליך זה הוא WGN, ראשי תיבות של white Gaussian noise.

הדגימות של רעש לבן חסרי קורלציה

$$(6.59) \quad R_{\mathbf{n}}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1 \neq t_2 \quad R_{\mathbf{n}}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1 \neq n_2$$

היות ומשתנים גאוסיים חסרי קורלציה הם בלתי תלויים, דגימות של WGN הן גם בלתי תלויות.

רעש לבן תאורטי הוא בעל הספק אינסופי. דוגמה מעשית לרעש כזה הוא רעש טרמי (Johnson-Nyquist noise) שמקורו בתנועה אקראית של נושאי מטען חשמלי (אלקטרונים) במוליך. צפיפות הספק ספקראלית של הרעש טרמי היא $\left[\frac{V^2}{Hz} \right] \approx 1.7 \times 10^{-20} R$, כאשר $\frac{N_0}{2}$, כאשר R הוא גודל הנגד. הרעש זה מתקיים עד לתדרים של $10^{13} Hz$, ויכול להיות משמעותי עבור אותות ברוחב פס גדול.

6.6 שאלות

6.1 (דוגמה 6.6) חזור על החישוב בדוגמה 6.6 בהתבסס על $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{x}}(\tau)$.

6.2 (סטציאונריות) נתונים זוג תהליכים אקראיים

$$\mathbf{x}[n] = A$$

$$\mathbf{y}[n] = (-1)^n A,$$

כאשר A הינו משתנה אקראי בעל תוחלת 0 ושונות 1.

(א) האם תהליך $\mathbf{x}[n]$ הינו WSS?

(ב) האם תהליך $\mathbf{y}[n]$ הינו WSS?

רמז: חשב $R_{\mathbf{y}}[n, n+k]$

(ג) האם תהליכים $\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]$ הינם WSS במשותף?

6.3 (תכונות תהליכים) נתון תהליך אקראי בדיד, $\mathbf{x}[n]$, בעלת תוחלת 0 ובעל צפיפות הפסק ספקטראלית (PSD) מהצורה $S_{\mathbf{x}}(f) = 1 + \cos(2\pi f)$. האם הדגימות של התהליך הן חסרי קורלציה?

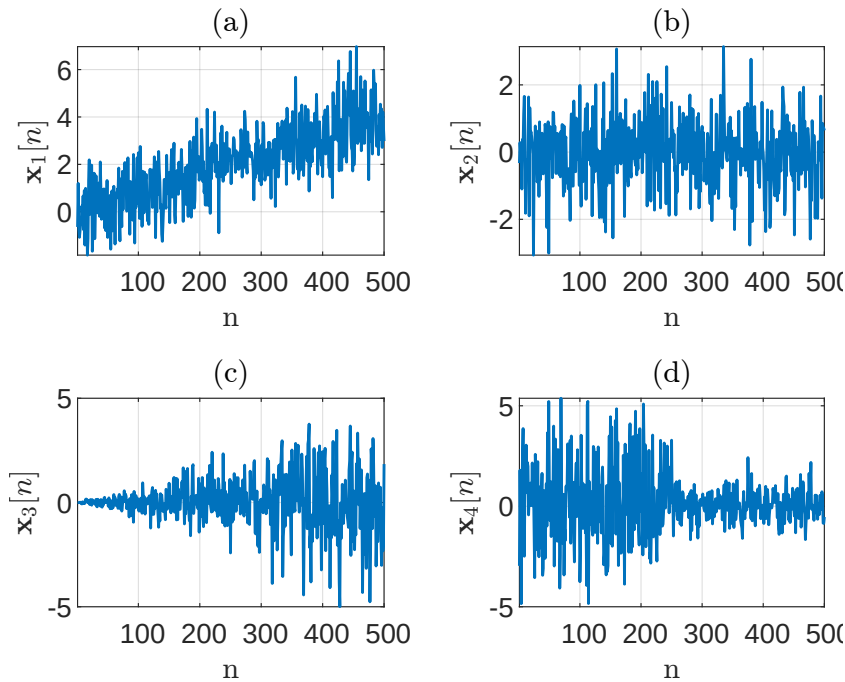
6.4 (סטציאונריות) נתון תהליך אקראי בדיד, $\mathbf{x}[n]$, מהצורה $\mathbf{x}[n] = \mathbf{w}[n] - \mu$, כאשר $\mathbf{w}[n]$ הינו רעש לבן עם תוחלת 0 ושונות σ_w^2 ו- μ זה קבוע ממשי. מהי פוקציה אוטו-קורלציה, $R_{\mathbf{x}}[n, n+k]$. האם מדובר בתהליך סטציאונרי?

6.5 (תכונות ומאפיינים של תהליכים אקראיים) נתון תהליך אקראי, $x(t)$, מהצורה

$$x(t) = Aw(t),$$

כאשר $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ו- $w(t)$ הינו רעש לבן עם $R_w(\tau) = \sigma_w^2 \delta(\tau)$ (בלתי תלויים). מהי צפיפות הספק ספטרלית, $S_x(F)$?

6.6 נתונות תוצאות של 4 ניסויים שונים של אותות אקראיים. עבור כל אחד מהאותות, יש לציין ולנמק האם מדובר באות סטציאונרי.

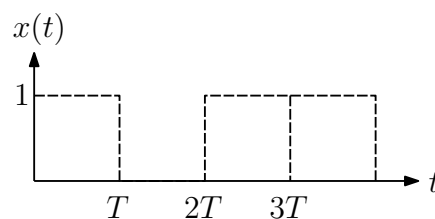


איור 6.4: יש לציין/לנמק האם מדובר באות סטציאונרי עבור שאלה 6.6.

6.7 (אות תקשורת) נתון אות ספרתי בינארי מסוג non-return to zero (NRZ), מהצורה

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

כאשר $a_n \in \{0, 1\}$, $\Pr(a_n = 0) = \Pr(a_n = 1) = \frac{1}{2}$ והאות $g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ הינו פולס בגובה 1 ברוחב T . דוגמא של האות מופיעה באיור להלן.



יש לחשב:

$$E[x(t)] \quad \text{(א)}$$

איור 6.5: דוגמא לאות $x(t)$.

(ב) הספק ממוצע ושונות, $P_x, \text{Var}[x(t)]$

פרק 7

קשר בין תהליכים

מטרה: להגדיר ולאפיין קשר בין הדגימות של זוג תהליכים שונים, בדומה לקשר בין הדגימות של אותו תהליך.

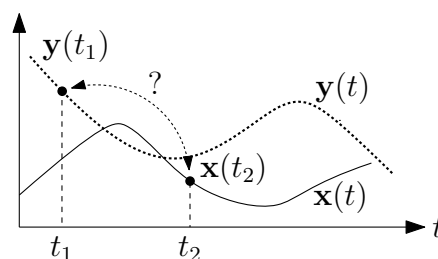
שאלה מתבקשת, האם ניתן לעשות חיזוי לינארי בין אותות שונים?

תוכן הפרק

97	הגדרות	7.1
99	תהליכים סטציונריים במשותף	7.2
99	תכונות במישור הזמן	7.2.1
101	תכונות במישור התדר	7.2.2
104	שאלות	7.3

7.1 הגדרות

מטרה: לאפיין קשר לינארי בין $x(t_1)$ לבין $x(t_2)$ (איור 7.1).



איור 7.1: איך מאפיינים קשר סטטיסטי בין $y(t_1)$ לבין $x(t_2)$?

קרוס-קורלציה (הגדרה 7.1):

עבור תהליכים אקראיים $x(t), y(t)$

$$(א7.1) \quad R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

$$(ב7.1) \quad R_{xy}[n_1, n_2] = E[x[n_1]y[n_2]]$$

:(7.2) Cross-covariance (הגדרה)עבור תהליכים אקראיים $x(t), y(t)$

$$(א7.2) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - E[x(t_1)] E[y(t_2)]$$

$$(ב7.2) \quad C_{xy}[n_1, n_2] = R_{xy}[n_1, n_2] - E[x[n_1]] E[y[n_2]]$$

אבחונים

הקשר בין תהליכים (לאו דווקא סטציאונריים במשותף) יכול להיות:

:(7.3) אורטוגונליים (הגדרה)עבור תהליכים אקראיים $x(t), y(t)$ אורטוגונליים אם ורק אם מתקיים

$$(א7.3) \quad R_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$$

$$(ב7.3) \quad R_{xy}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1, n_2.$$

:(7.4) חוסרי קורלציה (הגדרה)עבור תהליכים אקראיים $x(t), y(t)$ חוסרי קורלציה מתקיים

$$(א7.4) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2$$

$$(ב7.4) \quad C_{xy}[n_1, n_2] = 0 \quad \forall n_1, n_2$$

:(7.5) בלתי תלויים (הגדרה)עבור $x(t), y(t)$ בלתי תלויים מתקיים

$$(א7.5) \quad R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)] E[y(t_2)]$$

$$(ב7.5) \quad R_{xy}[n_1, n_2] = E[x[n_1]] E[y[n_2]]$$

קשר בין אי-תלות לקורלציה (תכונה 7.1): תהליכים בלתי תלויים הם גם חסרי קורלציה, פרט למקרה של התפלגות גאוסית משותפת שאז הקשר הוא דו-כיווני.

הוכחה.

$$(7.6) \quad C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - E[x(t_1)] E[y(t_2)] = 0$$

7.2 תהליכים סטציונריים במשותף

תהליכים סטציונריים במשותף (הגדרה 7.6):

ניתן להגדיר סטציונריות משותפת (joint-WSS) בין תהליכים $x(t), y(t)$, אם ורק אם מתקיימים כל התנאים להלן:

□ $x(t)$ סטציונרי (WSS)

□ $y(t)$ סטציונרי (WSS)

□ הקשר בין האותות תלוי בהפרש הזמנים בלבד,

$$(א7.7) \quad R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)]$$

$$(ב7.7) \quad R_{xy}[k] = E[x[n]y[n + k]] .$$

אין קשר בין הגדרות של סטציונריות לבין חוסר קורלציה, או אי תלות וכד'.

7.2.1 תכונות במישור הזמן

סימטריה (תכונה 7.2): בשונה מסימטריה עבור אותות WSS (תכונה 6.4.3),

$$(א7.8) \quad R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad R_{xy}[k] = R_{yx}[-k]$$

$$(ב7.8) \quad R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad R_{xy}[-k] = R_{yx}[k]$$

הוכחה.

$$(7.9) \quad \begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t + \tau)] \\ &= E[x(t - \tau)y(t)] = E[y(t)x(t - \tau)] \\ &= R_{yx}(t, t - \tau) = R_{yx}(-\tau) \end{aligned}$$

ישנם ספרים, שמשתמשים בהגדרה $\tau = t_1 - t_2$ במקום $\tau = t_2 - t_1$. הדבר חשוב בגלל ש-
 $R_{xy}(t_2 - t_1) \neq R_{xy}(t_1 - t_2)$
 תוכנת Matlab משתמשת בהגדרה $!!!\tau = t_1 - t_2$

אורטוגונליים (הגדרה 7.7):

עבור תהליכים אקראיים $x(t), y(t)$ אורטוגונליים אם ורק אם מתקיים

$$(7.10) \quad R_{xy}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \quad R_{xy}[k] = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

זהויות הספק (תכונה 7.3):

$$(7.11) \quad |R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$$

$$(7.11) \quad |R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_x(0) + R_y(0)]$$

התכונות בזמן בדיד הן זהות, בהתאמה.

Cross-covariance (תכונה 7.4):

$$(7.12) \quad C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y$$

מקדם קורלציה (הגדרה 7.8):

מקדם קורלציה בין $x(t)$ לבין $y(t)$,

$$(7.13) \quad \rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}}$$

דוגמה 7.1: נתון זוג אותות,

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \phi_1)$$

$$y[n] = \cos(\omega_0 n + \phi_2)$$

כאשר $\phi_1, \phi_2 \sim U[-\pi, \pi]$ ובלתי תלויים. בנוסף, גם $x[n]$ וגם $y[n]$ הם WSS (דוגמאות 6.2, 6.6). יש לחשב $R_{xy}[k]$ ולהראות שמדובר בזוג תהליכים WSS במשותף.

פתרון: מדובר באותות אורטוגונליים,

$$\begin{aligned} E[x[n]y[n+k]] &= E[\cos(\omega_0 n + \phi_1) \cos(\omega_0(n+k) + \phi_2)] \leftarrow (3.23) \\ &= E[\cos(\omega_0 n + \phi_1)] E[\cos(\omega_0(n+k) + \phi_2)] \\ &= 0 = R_{xy}[k] \quad \forall k \end{aligned}$$

הפתרון מתבסס על התכונה 3.2.2 (נוסחא (3.23)). הפתרון מבוסס על הנוסחא $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ הוא הרבה פחות מוצלח.

דוגמה 7.2: (ראה גם דוגמה 6.7) נתון תהליך אקראי $y[n] = x[n] + bx[n-1]$, כאשר $x[n]$ הוא תהליך אקראי WSS עם $R_x[k]$, $E[x[n]] = 0$. האם $y[n]$ הוא WSS (דוגמא 6.7)? יש לחשב $R_{xy}[k]$ ולהראות שמדובר בזוג תהליכים WSS במשותף.

פתרון:

$$E[y[n]] = E[x[n]] + bE[x[n-1]] = 0$$

$$\begin{aligned}
 R_y[k] &= E[y[n]y[n+k]] \\
 &= E[(x[n] + bx[n-1])(x[n+k] + bx[n-1+k])] \\
 &= R_x[k] + bR_x[k+1] + bR_x[k-1] + b^2R_x[k] \\
 R_{xy}[k] &= E[x[n]y[n+k]] \\
 &= E[x[n](x[n+k] + bx[n-1+k])] \\
 &= E[x[n]x[n+k]] + bE[x[n]x[n+k-1]] \\
 &= R_x[k] + bR_x[k-1]
 \end{aligned}$$

7.2.2 תכונות במישור התדר

Cross-PSD (הגדרה 7.9):

$$(7.14) \quad S_{xy}(F) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

סימטריה של PSD (תכונה 7.5): בשונה מתכונה 6.5.2, ובהתבסס על תכונה 7.2.1,

$$(א7.15) \quad S_{xy}(F) = S_{yx}(-F) = S_{xy}^*(-F)$$

$$(ב7.15) \quad S_{xy}(-F) = S_{xy}^*(F)$$

$$(ג7.15) \quad S_{yx}(F) = S_{xy}^*(F)$$

coherence (הגדרה 7.10):

מקדם קורלציה במישור התדר, בין $X(F)$ לבין $Y(F)$,

$$(7.16) \quad \gamma_{xy}(F) = \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}}$$

כאשר מתקיים $|\gamma_{xy}(F)| \leq 1$.

מטרה: מטרה של הדוגמה להלן היא להוכיח את האפשרות של סינון הרעש במישור התדר.

7.3 דוגמה נתון אות

$$y(t) = x(t) + n(t),$$

כאשר $x(t)$, $n(t)$ הם סטציונריים (WSS), בלתי תלויים, בעלי $\mu_x, \mu_n, R_x(\tau), R_n(\tau)$ ידועים.

יש לחשב: $C_{xn}(t, t + \tau), C_{xy}(t, t + \tau), R_y(t, t + \tau), C_y(t, t + \tau)$.

בהנחה של $\mu_x = \mu_n = 0$, יש לחשב $S_y(F)$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{x}\mathbf{n}}(\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{n}(t+\tau)] \\
&= E[\mathbf{x}(t)] E[\mathbf{n}(t+\tau)] = \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}} \\
C_{\mathbf{x}\mathbf{n}}(\tau) &= 0 \leftarrow \text{7.1 תכונה} \\
R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] \\
&= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{n}(t+\tau)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + E[\mathbf{x}(t)] E[\mathbf{n}(t+\tau)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}} \\
C_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau) &= R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau) - E[\mathbf{x}(t)] E[\mathbf{y}(t+\tau)] \\
&= R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau) - E[\mathbf{x}(t)] E[(\mathbf{x}(t+\tau) + \mathbf{n}(t+\tau))] \\
&= \underbrace{R_{\mathbf{x}}(t, t+\tau) + \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}}_{R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau)} - \underbrace{E[\mathbf{x}(t)]E[\mathbf{x}(t+\tau)]}_{\mu_{\mathbf{x}}^2} - \underbrace{E[\mathbf{x}(t)]}_{\mu_{\mathbf{x}}} \underbrace{E[\mathbf{n}(t+\tau)]}_{\mu_{\mathbf{n}}} \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) - \mu_{\mathbf{x}}^2 \\
&= C_{\mathbf{x}}(\tau) \\
R_{\mathbf{y}}(t, t+\tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] \\
&= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] + E[\mathbf{x}(t)] E[\mathbf{n}(t+\tau)] \\
&\quad + E[\mathbf{n}(t)] E[\mathbf{x}(t+\tau)] + E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) + 2\mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}} \\
C_{\mathbf{y}}(t, t+\tau) &= R_{\mathbf{y}}(\tau) - E[\mathbf{y}(t)] E[\mathbf{y}(t+\tau)] \\
&= \underbrace{R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) + 2\mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{n}}}_{R_{\mathbf{y}}(\tau)} - \underbrace{(\mu_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{n}})^2}_{E^2[\mathbf{y}(t)]} \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) - \mu_{\mathbf{x}}^2 + R_{\mathbf{n}}(\tau) - \mu_{\mathbf{n}}^2 \\
&= C_{\mathbf{x}}(\tau) + C_{\mathbf{n}}(\tau) \\
C_{\mathbf{y}}(t, t+\tau) &= R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{n}}(\tau) \leftarrow \mu_{\mathbf{x}} = \mu_{\mathbf{n}} = 0 \\
S_{\mathbf{y}}(F) &= \mathcal{F}\{R_{\mathbf{y}}(\tau)\} = S_{\mathbf{x}}(F) + S_{\mathbf{n}}(F)
\end{aligned}$$

מטרה: מטרה של הדוגמה להלן היא להציג שיטה לחישוב הפרש זמן בין שני אותות דומים.

דוגמה 7.4: נתון תהליך אקראי $\mathbf{x}(t)$, סטציונארי (WSS), עם תוחלת $E[\mathbf{x}(t)] = \mu_{\mathbf{x}} = 0$ ובעל $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ ידוע. נתון הקשר $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$.

חישוב הפרש
זמנים בין
אותות

$$\begin{aligned}
C_{\mathbf{x}}(\tau), R_{\mathbf{y}}(\tau), C_{\mathbf{y}}(\tau), S_{\mathbf{y}}(F), R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t, t+\tau), C_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(\tau), R_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(\tau), C_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(\tau), \quad \square \text{ חשב} \\
R_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(-\tau) = R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(\tau), S_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(F), S_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(F), \gamma_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(F), \rho_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(\tau)
\end{aligned}$$

$\square$ חשב $R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[k], \rho_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[k]$ כאשר $\mathbf{x}[n]$ הוא רעש לבן גאוס בדיד, עם שונות σ^2 .

פתרון:

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2 = R_x(\tau)$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] \\ &= E[x(t-t_0)x(t-t_0+\tau)] \\ &= R_x(\tau) = C_y(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(F) &= \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \\ &= S_x(F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t+\tau) &= E[x(t)y(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x(t+\tau-t_0)] = R_x(t, t+\tau-t_0) \\ &= R_x(\tau-t_0) = R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x^2 = R_{xy}(\tau) = R_x(\tau-t_0)$$

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x(t+\tau)] \\ &= E[x(t-t_0)x(t+\tau)] \\ &= R_x(\tau+t_0) = C_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(-\tau) = R_x(-\tau-t_0) = R_x(\tau+t_0) = R_{yx}(\tau)$$

$$R_{yx}(-\tau) = R_x(t_0-\tau) = R_x(-(t_0-\tau)) = R_x(\tau-t_0) = R_{xy}(\tau)$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(F) &= \mathcal{F}\{R_x(\tau-t_0)\} \\ &= S_x(F)e^{-j2\pi Ft_0} \end{aligned}$$

$$S_{yx}(F) = S_x(F)e^{j2\pi Ft_0} = S_{xy}(-F)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(F) &= \frac{S_{xy}(F)}{\sqrt{S_x(F)S_y(F)}} = \frac{S_x(F)e^{-j2\pi Ft_0}}{\sqrt{S_x(F)^2}} \\ &= \text{sign}(S_x(F))e^{-j2\pi Ft_0} \Rightarrow |\gamma_{xy}(F)| = 1 \quad \forall S_x(F) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}} = \frac{R_{xy}(\tau)}{R_x(0)} = \frac{R_x(\tau-t_0)}{R_x(0)}$$

עבור רעש לבן $R_x[k] = \sigma^2\delta[k]$, לכן

$$R_{xy}[k] = R_x[k-k_0] = \sigma^2\delta[k-k_0]$$

$$\rho_{xy}[k] = \delta[k-k_0]$$

תובנות חשובות:

□ הקשר בין תדרים הוא, כצפוי, לינארי.

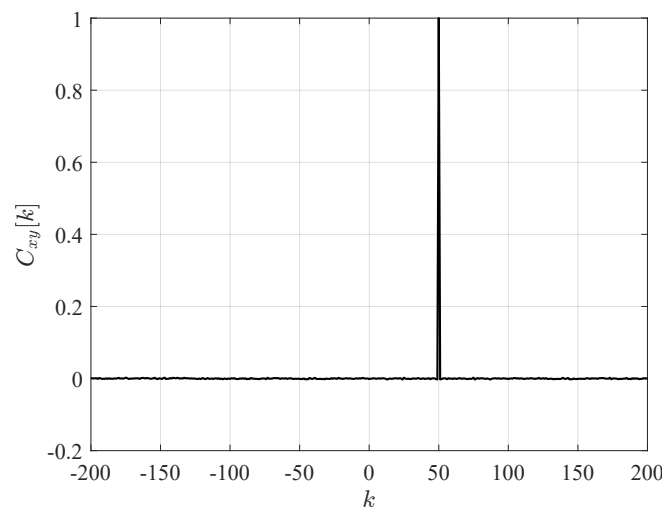
□ ניתן לזהות חוסר סימטריה של $R_{xy}(\tau)$ וכד'.

□ חיזוי "מתקלקל" עם הרחקת ערך של τ מ- t_0 .

□ בגלל התכונה של ערך המקסימלי (משוואה 6.38), החישוב של $\rho_{xy}(\tau)$ או $C_{xy}(\tau)$ ללא נירמול) משמש לזיהוי הפרש זמנים, $t_0 = \tau$, בין אותות דומים מוזנים בזמן.⁸

דוגמת Matlab לחישוב הפרש זמנים עבור $y[n] = x[n] - 50$ מופיעה באיור 7.2. יש לשים לב לסדר שונה של x, y בתוך הפקודה בגלל אופן הפוך של הגדרת הפרש זמנים (הערה 7.2.1).

```
x = randn(1,1e6);
y = [x(51:end) zeros(1,50)]; %y[n] = x[n-50]
[C, lags] = xcov(y,x,200,'biased');
plot(lags,C)      % k0 = 50
```



איור 7.2: דוגמה לחישוב הפרש זמנים עבור $y[n] = x[n] - 50$.

⁸ראה דוגמה בתוך הסברים של הפקודה xcov.

7.3 שאלות

7.1 (סטציונריות) נתונים תהליכים

$$(7.17) \quad y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$(7.18) \quad z(t) = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t),$$

כאשר $x_1(t), x_2(t)$ הם WSS במשותף. האם $y(t), z(t)$ הם גם WSS במשותף?

7.2 (תכונות ומאפיינים של תהליכים אקראיים) נתונים תהליכים אקראיים הבאים:

$$x(t) = At^2$$

$$y(t) = A^2 t^2$$

כאשר $A \sim U[0, 1]$, אחיד, המתפלג אקראי.

חשב:

$$1. E[\mathbf{x}(t)], R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2), E[\mathbf{y}(t)], R_{\mathbf{xy}}(t, t + \tau), C_{\mathbf{xy}}(t, t + \tau)$$

2. האם התהליך $\mathbf{x}(t)$ הוא סטציאונרי?3. האם תהליכים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ הם סטציאונריים במשותף?

$$4. \text{חשב } p(\mathbf{y}(t) > 3 | \mathbf{x}(t) = 2)$$

7.3 (תכונות ומאפיינים של תהליכים אקראיים) נתונים תהליכים אקראיים $\mathbf{x}(t)$ ו- $\mathbf{y}(t)$, בלתי תלויים, WSS, בעלי

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t)] &= E[\mathbf{y}(t)] = 1 \\ \text{Var}[\mathbf{x}(t)] &= \sigma_{\mathbf{x}}^2 \\ \text{Var}[\mathbf{y}(t)] &= \sigma_{\mathbf{y}}^2 \end{aligned}$$

מתוכם מייצרים תהליכים חדשים a קבוע ממשי):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{x}(t) + a\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{w}(t) &= \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

1. האם $\mathbf{v}(t)$ הוא WSS?2. האם $\mathbf{w}(t)$ הוא WSS?3. חשב $R_{\mathbf{vw}}(t, t + \tau)$ או $R_{\mathbf{vw}}(t_1, t_2)$. האם מדובר בתהליכים סטציאונריים במשותף?4. חשב ערך של a עבורו $\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)$ אורטוגונליים, בהינתן $R_{\mathbf{x}}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau)$.

7.4 (קשר בין תהליכים) נתון אות אקראי $\mathbf{w}[n]$ בעל $R_{\mathbf{w}}[k] = \exp\left(-\frac{|k|}{10}\right)$, $E[\mathbf{w}[n]] = \mu_{\mathbf{w}} = \frac{1}{2}$, בעל ההתפלגות כלשהי, פרט לסעיף ד', ששם $\mathbf{w}[n]$ מוגדר אחרת.

(א) נתונים זוג אותות, כאשר $\Delta\omega, \omega_0$ קבועים וחיוביים.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{w}[n] \cos(\omega_0 n) \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{w}[n] \cos([\omega_0 + \Delta\omega] n) \end{aligned}$$

יש לחשב $E[\mathbf{y}[n]], \text{Var}[\mathbf{y}[n]]$. האם אותות $\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ב) נתונים זוג אותות, כאשר $\Delta\omega, \omega_0$ קבועים וחיוביים, וכאשר $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ בלתי תלוי ב- $\mathbf{w}[n]$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{w}[n] \cos(\omega_0 n + \theta) \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{w}[n] \cos([\omega_0 + \Delta\omega] n + \theta) \end{aligned}$$

יש לחשב $E[\mathbf{y}[n]], \text{Var}[\mathbf{y}[n]]$. האם אותות $\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ג) נתונים זוג אותות, כאשר ω_0 הוא קבוע וחיובי, וכאשר $\Delta\omega \sim U[-1, 1]$, $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ בלתי תלויים בינם וב- $w[n]$

$$x[n] = w[n] \cos(\omega_0 n + \theta)$$

$$y[n] = w[n] \cos([\omega_0 + \Delta\omega] n)$$

יש לחשב $E[y[n]]$ ולבדוק את התוצאה ע"י סימולציה.
האם אותות $x[n]$, $y[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ד) נתונים זוג אותות, כאשר ω_0 הוא קבוע וחיובי, וכאשר $w[n]$ הוא **רעש לבן** בעל התפלגות אחידה, $w[n] \sim U[-1, 1]$. זוית $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ בלתי תלויה ב- $w[n]$.

$$x[n] = w[n] \cos(\omega_0 n + \theta)$$

$$y[n] = \cos(\omega_0 n + w[n])$$

יש לחשב $E[y[n]]$ ולבדוק את התוצאה ע"י סימולציה.
האם אותות $x[n]$, $y[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

7.5 נתונה אות מוצא של מערכת תקשורת עם אפנון DSB ושגיאת פאזה בלתי תלויה בזמן במתנד, כאשר:

□ אות במוצא הגלאי הוא מהצורה

$$x[n] = w[n] \cos(\theta)$$

□ אות המידע $w[n]$ הוא אות אקראי בעל מאפיינים

$$E[w[n]] = \mu_w = \frac{1}{2}, R_w[k] = \exp\left(-\frac{|k|}{10}\right)$$

□ אות המידע $w[n]$ בעל התפלגות שרירותית.

□ $\theta \sim U[-\pi/10, \pi/10]$, בלתי תלוי ב- $w[n]$.

נדרש לחשב:

(א) $E[x[n]]$

(ב) הספק P_x

(ג) האם אות $x[n]$ הוא WSS?

(ד) יש לחזור על הסעיפים הקודמים עבור

$$y[n] = w[n] \cos(\theta[n])$$

כאשר $\theta[n]$ הוא **רעש לבן** בעל התפלגות אחידה, $\theta[n] \sim U[-\pi/10, \pi/10]$. הרעש בלתי תלוי ב- $w[n]$.

(ה) נתון האות

$$\mathbf{z}[n] = \mathbf{w}[n] \cos(\omega_0 n + \theta[n])$$

יש לחשב $E[\mathbf{z}[n]]$. האם התוצאה תלויה או בלתי-תלויה בזמן?

פרק 8

חיזוי לינארי של אותות

מטרה: חיזוי ערך עתידי של תהליך אקראי WSS, בהתבסס על דגימות ההווה והעבר.

תוכן הפרק

108	8.1 הקדמה
109	8.2 חיזוי לינארי - משוואות Wiener-Hopf
115	8.3 שאלות

8.1 הקדמה

נתון תהליך $x[n]$ שהינו בעל מאפיינים הבאים:

WSS □

□ בעלת תוחלת $\mu_x = 0$

□ $R_x[k]$ ידוע (או מחושב).

חיזוי לינארי (הגדרה 8.1):

נדרש חיזוי לינארי של התהליך עבור הזמן הבא, $n + 1$. החיזוי נעשה מתוך דגימות קודמות (דגימות העבר), $n, n - 1, n - 2, \dots$. החיזוי הוא מהצורה

$$\hat{x}[n + 1] = a_0x[n] + a_1x[n - 1] + \dots + a_Nx[n - N]$$
$$= \sum_{m=0}^N a_mx[n - m]$$

(8.1)

ניתן לרשום את החיזוי גם בצורה של קונבולוציה,

$$\hat{x}[n + 1] = h[n] * \{x[n], \dots, x[n - N]\} \longleftarrow h[n] = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$$

(8.2)

מטרה: לחשב ערכים של $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ עבור החיזוי.

דוגמה 8.1: נתון מודל חיזוי מהצורה

$$(8.3) \quad \hat{x}[n+1] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$$

יש למצוא פרמטרים a_0, a_1 עבורם שגיאה ריבועית היא מינימלית.

פתרון: שלבי הפתרון:

1. שגיאה ריבועית,

$$(8.4) \quad \begin{aligned} SE &= E \left[(x[n+1] - \hat{x}[n+1])^2 \right] \\ &= E \left[(x[n+1] - a_0 x[n] - a_1 x[n-1])^2 \right] \end{aligned}$$

2. מינימום של שגיאה הריבועית ע"י השוואת הנגזרת לאפס,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} SE &= E \left[2 (x[n+1] - a_0 x[n] - a_1 x[n-1]) (-x[n]) \right] = 0 \\ E[x[n]x[n+1]] &= a_0 E[x^2[n]] + a_1 E[x[n-1]x[n]] \\ R_x[1] &= a_0 R_x[0] + a_1 R_x[1] \\ \frac{\partial}{\partial a_1} SE &= 0 \Rightarrow R_x[2] = a_0 R_x[1] + a_1 R_x[0] \end{aligned} \quad (8.5)$$

הפתרון הוא זוג משוואות ב-2 נעלים.

8.2 חיזוי לינארי - משוואות Wiener-Hopf

מטרה: חישוב מקדמי חיזוי לינארי.

משוואות Wiener-Hopf (הגדרה 8.2):

ניתן להגדיר את הקשר בין המקדמים ע"י

$$(8.6) \quad R_x[k+1] = a_0 R_x[k] + a_1 R_x[k-1] + \dots + a_N R_x[k-N] = \sum_{k=0}^N a_k R_x[k].$$

הוכחה. 1. חישוב שגיאת חיזוי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית מהצורה

$$(8.7) \quad \begin{aligned} mse &= E \left[(x[n+1] - \hat{x}[n+1])^2 \right] \\ &= E \left[(x[n+1] - a_0 x[n] - a_1 x[n-1] - \dots - a_N x[n-N])^2 \right] \end{aligned}$$

2. חישוב הערכים של $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$, עבור שגיאה היא מינימלית ניתן לבצע ע"י הגזירה, תוך שימוש בכלל השרשרת (שימוש בנגזרת פנימית),

$$\left[f(g(x)) \right]' = f'(g(x)) g'(x)$$

המינימום מתקבל ע"י פתרון מערכת משוואות

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_k} mse &= E \left[2 \{ \mathbf{x}[n+1] - a_0 \mathbf{x}[n] - a_1 \mathbf{x}[n-1] - \dots - a_N \mathbf{x}[n-N] \} \mathbf{x}[n-k] \right] = 0 \\ &\Rightarrow E \underbrace{[\mathbf{x}[n+1] \mathbf{x}[n-k]]}_{R_x[k+1]} - a_0 E \underbrace{[\mathbf{x}[n] \mathbf{x}[n-k]]}_{R_x[k]} - \dots \\ &\quad - a_N E \underbrace{[\mathbf{x}[n-N] \mathbf{x}[n-k]]}_{R_x[k-N]} = 0 \end{aligned}$$

(8.8)

יש לשים לב לתכונת הסימטריה (תכונה 6.4.3) מהצורה $R_x[-k] = R_x[k]$.

שימוש במשוואות Wiener-Hopf (תכונה 8.1): מקרים פרטיים של משוואה (8.6) ניתן לרשום באופן הבא:

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow R_x[1] = a_0 R_x[0] + a_1 R_x[1] + \dots + a_N R_x[N] \\ k=1 &\rightarrow R_x[2] = a_0 R_x[1] + a_1 R_x[0] + \dots + a_N R_x[N-1] \\ &\dots \end{aligned}$$

(8.9)

$$k=N \rightarrow R_x[N+1] = a_0 R_x[N] + a_1 R_x[N-1] + \dots + a_N R_x[0]$$

ניתן למצוא את המקדמים a_m ע"י הפתרון של מערכת של $N+1$ משוואות לינאריות עם $N+1$ נעלמים.

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \dots & R_x[N] \\ R_x[1] & R_x[0] & \dots & R_x[N-1] \\ R_x[2] & R_x[1] & \dots & R_x[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[1] \\ R_x[N] & R_x[N-1] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x[1] \\ R_x[2] \\ R_x[3] \\ \vdots \\ R_x[N] \\ R_x[N+1] \end{bmatrix},$$

(8.10)

שגיאת חיזוי - שגיאה ממוצעת (תכונה 8.2): (ראה גם תכונה 4.2)

$$E[\mathbf{x}[n+1] - \hat{\mathbf{x}}[n+1]] = 0$$

(8.11)

שגיאת חיזוי - שגיאה ריבועית ממוצעת (תכונה 8.3): שגיאה ריבועית ממוצעת

מינימלית של החיזוי נתונה ע"י

$$(8.12) \quad mse_{min} = E \left[(x[n+1] - \hat{x}[n+1])^2 \right] = R_x[0] - \sum_{k=0}^N a_k R_x[k+1]$$

תובנות החשובות:

- בהתאם לקשר $R_x[0] > R_x[k]$ (תכונה 6.4.3), הגדלת N עשויה להביא לשיפור קטן מאוד בחיזוי עבור ערכים קטנים יחסית של $R_x[k]$.
- עבור ערכי $R_x[k] = 0, k > k_0$ הגדלת N לא תשפר את החיזוי בכלל.

הפתרון של משוואות Wiener-Hopf הוא חיזוי לינארי אופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (בדומה לפרק 4.2).

עבור תהליכים גאוסיים, הפתרון של משוואות Wiener-Hopf הוא חיזוי אופטימלי (אין דרך לחיזוי טוב יותר).

הפתרון היעיל של המערכת משוואות הלוקח בחשבון את הסימטריה המובנת נקרא אלגוריתם Levinson-Durbin.

שם נוספת לערכי a_m הוא linear prediction coefficients (LPC).

ניתן להוכיח, כי המטריצה R_x היא סימטרית, לא שלילית (positive semi-definite), הפיכה ובעלת ערכים עצמיים לא שליליים.

דוגמה 8.2: נתון מודל לחיזוי אות WSS מהצורה

$$(8.13) \quad \hat{x}[n] = a_k x[n-k]$$

מהו הערך של a_k ?

פתרון:

$$\begin{aligned} SE &= E \left[(x[n] - a_k x[n-k])^2 \right] \\ \frac{\partial}{\partial a_k} SE &= -E[x[n]x[n-k]] + a_k E[x^2[n-k]] = 0 \\ a_k &= \frac{R_x[k]}{R_x[0]} = \rho_x[k] \end{aligned}$$

משמעות התוצאה, שערכי $R_x[k]$ הם מקדמי חיזוי/קורלציה לא מנורמלים.

דוגמה 8.3: (בהמשך לדוגמה 7.2) נתון מודל

$$(8.14) \quad \hat{x}[n] = w[n] + b w[n-1]$$

כאשר $w[n]$ הוא רעש לבן גאوسي.

□ מהו בהכרח תוחלת של $x[n]$?

□ מהו הערך של $\rho_x[k]$?

□ ידוע, שערך $\rho_x[1] = r$ מהו הערך של b ?

פתרון:

$$\begin{aligned}
 E[x[n]] &= E[w[n]] + bE[w[n-1]] = 0 \\
 R_x[0] &= \text{Var}[x[n]] = 1\text{Var}[w[n]] + b^2\text{Var}[w[n]] = \sigma^2(1 + b^2) \\
 R_x[1] &= E[x[n]x[n-1]] \\
 &= E[(w[n] + bw[n-1])(w[n-1] + bw[n-2])] \\
 &= R_w[1] + bR_w[2] + bR_w[0] + b^2R_w[1] = b\sigma^2 \\
 R_x[k] &= 0 \quad k \geq 2 \\
 \rho_x[k] &= \frac{R_x[k]}{R_x[0]} \\
 r &= \frac{b}{1 + b^2} \\
 b &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}}{2r}, \quad r \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ישנה אפשרות לעשות חיזוי של אות על סמך קומבינציה של הרעש!

דוגמה 8.4: נתון תהליך אקראי $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$, כאשר $\theta \sim U[0, 2\pi]$ ו- f_0 ידוע.

בנוסף, ידוע (ראה דוגמא 6.2), שתוחלת ופונקציית אוטו-קורלציה של התהליך נתונים ע"י

$$\begin{aligned}
 E[x[n]] &= 0 \\
 R_x[k] &= \cos(2\pi f_0 k) = C_x[k] \\
 R_x[0] &= 1 \\
 R_x[1] &= \cos(2\pi f_0) \\
 R_x[2] &= \cos(4\pi f_0)
 \end{aligned}$$

נדרש לעשות חיזוי לינארי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (MMSE) עבור התהליך מהצורה

$$\hat{x}[n+1] = ax[n] \quad \square$$

$$\hat{x}[n+1] = ax[n] + bx[n-1] \quad \square$$

פתרון: בהתאם למשוואות (8.10), (8.12)

$$\hat{x}[n+1] = ax[n] \quad \square$$

$$R_x[0]a = R_x[1] \Rightarrow a = \frac{R_x[1]}{R_x[0]}$$

$$mse_{min} = R_x[0] - aR_x[1] = R_x[0] - \frac{R_x[1]}{R_x[0]}R_x[1]$$

$$= 1 - \cos^2(2\pi f_0) = \sin^2(2\pi f_0)$$

הערה: ניתן לראות גם הקבלה לתוצאה של חיזוי לינארי (ראה תכונות 4.2, 4.2).
לצורך החישוב, נסמן $X = \mathbf{x}[n], Y = \mathbf{x}[n+1]$

$$\hat{Y} = E[Y] + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]} (x - E[X]) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}[n+1] = \frac{R_{\mathbf{x}}[1]}{R_{\mathbf{x}}[0]} \mathbf{x}[n]$$

$$mse_{min} = \text{Var}[Y] (1 - \rho_{XY}^2) \Rightarrow R_{\mathbf{x}}[0] - \frac{R_{\mathbf{x}}[1]}{R_{\mathbf{x}}[0]} R_{\mathbf{x}}[1]$$

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = a\mathbf{x}[n] + b\mathbf{x}[n-1] \quad \square$$

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[0] & R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[1] & R_{\mathbf{x}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{x}}[1] \\ R_{\mathbf{x}}[2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi f_0) \\ \cos(2\pi f_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_0) \\ \cos(4\pi f_0) \end{bmatrix}$$

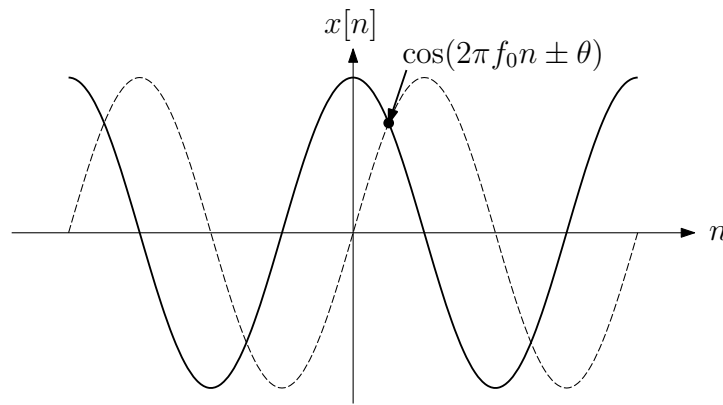
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(2\pi f_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} mse_{min} &= R_{\mathbf{x}}[0] - aR_{\mathbf{x}}[1] - bR_{\mathbf{x}}[2] \\ &= 1 - 2 \cos(2\pi f_0) \cos(2\pi f_0) + \cos(4\pi f_0) \\ &= 1 - \underbrace{2 \cos^2(2\pi f_0)}_{-\cos(4\pi f_0)} + \cos(4\pi f_0) = 0 \end{aligned}$$

סיכום: משוואת הפרשים לחיזוי

$$\hat{\mathbf{x}}[n+1] = 2 \cos(2\pi f_0) \mathbf{x}[n] + (-1) \mathbf{x}[n-1]$$

כשהחיזוי נעשה מתוך דגימה אחת בלבד, ישנה אי וודאות לגבי ערך הפאזה, כמתואר באיור 8.1. מאידך, בהינתן זוג נקודות, הפאזה ידועה באופן מדויק ולכן ניתן לבצע חיזוי מושלם.



איור 8.1: אי וודאות לגבי הפאזה בחיזוי מנקודה אחת בלבד.

דוגמא מספרית לחיזוי ב-matlab:

```

n = 1:20; f = 1/4;
x = cos(2*pi*f*n + rand(1)*2*pi);
for m = 2:max(n)-1
    hx(m+1) = 2*cos(2*pi*f)*x(m) - x(m-1);
end
mse = mean((hx(3:max(n)) - x(3:max(n))).^2)

```

דוגמה 8.5: נתונה מערכת בעלת משוואת הפרשים (דוגמה 11.3) מהצורה

$$x[n] = ax[n-1] + w[n],$$

כאשר $w[n] \sim N(0, \sigma_w^2 = 1)$ הוא רעש לבן גאוס, $|a| < 1$, $R_x[k] = \sigma_w^2 \frac{a^{|k|}}{1-a^2}$. נדרש חיזוי מהצורה

$$\hat{x}[n+1] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$$

פתרון: □ בהתאם למשוואה (8.10),

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x[1] \\ R_x[2] \end{bmatrix}$$

כמובן, שגיאת חיזוי היא בהתאם,

$$mse = R_x[0] - a_0 R_x[1] - a_1 R_x[2].$$

□

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{a}{1-a^2} \\ \frac{a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{1-a^2} \\ \frac{a^2}{1-a^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

התשובה היא מתבקשת, מאחר ומתקיים

$$x[n+1] = ax[n] + w[n+1].$$

□ כמובן, שגיאה חיזוי היא רעש הכניסה $w[n]$,

$$\begin{aligned} mse &= R_x[0] - a_0 R_x[1] - a_1 R_x[2] \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - a^2} - a \frac{\sigma_w^2 a}{1 - a^2} = \sigma_w^2 \end{aligned}$$

ניתן לבדוק את הדוגמה ע"י סימולציה:

```
n = 10000;
w = randn(1,n);
a = 1/2;
x = filter(1,[1 -a],w);
xhat(2:n) = a*x(1:n-1);
mean(x - xhat)
var(x - xhat)
```

8.3 שאלות

8.1 (מערכות FIR) נתונים תהליכים אקראיים

$$\begin{aligned} x[n] &= w[n] + w[n-1] \\ y[n] &= w[n] - w[n-1], \end{aligned}$$

כאשר $w[n]$ הוא רעש לבן גאוסני בעל שונות 1.

(א) חשב $R_x[n, n+k], C_x[n, n+k], R_y[n, n+k], C_y[n, n+k]$ האם מדובר בתהליכים סטציונריים? מהו הספק הממוצע של $x[n], y[n]$?

(ב) חשב $R_{xy}[n, n+k], C_{xy}[n, n+k]$ האם $x[n], y[n]$ סטציונריים במשותף?

האם $x[n], y[n]$ האם אורטוגונליים ו/או חסרי קורלציה ו/או בלתי תלויים? הוכח/נמק!

(ג) מהי התפלגות המשותפת של $x[2], x[3], y[4]$?

הערה: ניתן להשתמש בתשובות לסעיפים הקודמים בצורה פרמטרית, כגון שימוש ב-
 $R_x[n, n+k], R_y[n, n+k], R_{xy}[n, n+k]$ ללא חישוב ערך מספרי.

(ד) יש לבנות חזאי אופטימלי במובן שגיאה ריבוי מנימלית, של $y[n]$ מתוך $x[n]$, מהצורה

$$\hat{y}[n] = a_1 x[n] + a_2 x[n-1].$$

מהם הערכים של a_1, a_2 ?

הערה: ניתן להשתמש בתשובות לסעיפים הקודמים בצורה פרמטרית, כגון שימוש ב-
 $R_x[n, n+k], R_y[n, n+k], R_{xy}[n, n+k]$ ללא חישוב ערך מספרי.

8.2 (חיזוי לינארי) נתון תהליך $x[n]$, בעל תכונות הבאות: סטציונרי, גאוסני,

$$E[x[n]] = 0$$

$$R_x[k] = 4 \exp(-|k|)$$

נתון תהליך אקראי

$$y[n] = x[n] + 2x[n-2]$$

(א) חשב הסתברות עבור $p(x[n] < 4)$

(ב) מהו ערך מספרי של מקדם קורלציה בין משתנים אקראיים $x[1], x[3]$?

(ג) נתון תהליך אקראי $w[n] = x^2[n]$. חשב $E[w[n]]$.

(ד) הוכח, ש- $y[n]$ הינו תהליך WSS.

(ה) חשב הסתברות עבור $p(y[n] > 4), p(y[n] < 4)$

(ו) מהי מטריצת covariance בין משתנים אקראיים $y[1], y[3]$? ניתן להשאיר את התשובה כפונ' של $R_x[k]$ בלי להגיע לערך מספרי.

(ז) חשב $R_{xy}[n, n+k]$. האם תהליכים $x[n], y[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ח) מעוניינים לעשות חיזוי לינארי של $x[n]$ מתוך $y[n]$. עבור חיזוי מהצורה

$$\hat{x}[n+1] = a_0 y[n] + a_1 y[n-1]$$

חשב פרמטרית את הערכים של a_0, a_1 כפונקציה של $R_x[k], R_{xy}[k]$.

8.3 (חיזוי לינארי) נתון תהליך אקראי מהצורה

$$z[n] = x[n] \cos(\omega_0 n) + y[n] \sin(\omega_0 n),$$

כאשר ω_0 הוא תדר קבוע לא אקראי (דטרמיניסטי),

$$E[x[n]] = E[y[n]] = 0$$

$$R_x[k] = \exp\left(-\frac{|k|}{10}\right) = R_y[k]$$

$$R_{xy}[k] = 0$$

יש לחשב:

(א) הוכח, ש- $z[n]$ הוא WSS?

(ב) מהו הספק הממוצע של $z[n]$?

(ג) האם $z[n], x[n]$ הם סטציאונריים במשותף?

(ד) מהו מקדם קורלציה (ערך מספרי) בין $z[n], z[n+2]$ עבור $\omega_0 = \pi/2$?

(ה) (25 נק') בהינתן ערכים $z[n], z[n-1]$, מהו חיזוי אופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית (MMSE) של $z[n+2]$? ניתן לרשום את התשובה תוך שימוש (במידת הצורך) ב-

$$E[x[n]], E[y[n]], E[z[n]], R_x[k], R_y[k], R_z[k]$$

(ו) בהינתן, ש- $x[n], y[n]$ הם משתנים אקראיים גאוסיים, מהי התפלגות של $z[n]$, לרבות הפרמטרים (מספריים)?

הערה: לא חסרים נתונים בסעיף זה.

8.4 נתון תהליך אקראי מהצורה

$$z[n] = x[n] \cos(\omega_0 n + \theta) + y[n] \sin(\omega_0 n + \theta),$$

כאשר $x[n], y[n]$ הן אותות גאוסיים, ω_0 הוא תדר קבוע לא אקראי (דטרמיניסטי), פאזה מתפלגת אחיד $\theta \sim U[-\pi, \pi]$, באופן בלתי תלוי מהאותות. בנוסף, נתון

$$E[x[n]] = E[y[n]] = 0$$

$$R_x[k] = \exp\left(-\frac{|k|}{10}\right)$$

$$R_y[k] = \exp\left(-\frac{|k|}{5}\right)$$

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|k|}{5}\right)$$

נדרש לחשב/לבדוק:

(א) האם $z[n]$ הוא סטציונרי? מהו הספק P_z ?

(ב) האם $x[n], z[n]$ הם סטציונריים במשותף (joint-WSS)? האם ניתן לעשות חיזוי לינארי בין האותות?

(ג) מהי ההסתברות של $\Pr(z[n] > 0.5)$?

(ד) מהו ערך של הביטוי $E[(z[n] - z[n-1])^2]$?

8.5 נתונים תהליכים אקראיים:

$$\square x_1[n], \text{ מתפלג גאוסית, } x_1[n] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \text{ עם } R_1[k]$$

$$\square x_2[n], \text{ מתפלג גאוסית, } x_2[n] \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \text{ עם } R_2[k]$$

$$\square \text{ ניתן להניח אי תלות בין } x_1[n], x_2[n]$$

נתונים קשרים הבאים:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n-1]$$

$$z[n] = x_1[n-1] + x_2[n]$$

- (א) יש להוכיח, ש- $y[n]$ הוא WSS.
- (ב) מהו הספק P_y ? מהי הדרך לרשום הספק תוך שימוש בפרמטרים $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ בלבד?
- (ג) מהו $C_y[k]$?
- (ד) מהי התפלגות של $y[n]$?
- (ה) מהי התפלגות של $y[0] + y[1]$?
- (ו) האם $y[n], z[n]$ הם joint-WSS?
- (ז) עבור סעיף זה בלבד, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. מהו מקדם חיוזי לינארי אופטימלי a מהצורה $\hat{z}[n] = ay[n]$?

8.6 נתונים תהליכים אקראיים:

- $\square$ $x_1[n] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, מתפלג גאוסית, עם $R_1[k]$.
- $\square$ $x_2[n] \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, מתפלג גאוסית, עם $R_2[k]$.
- $\square$ $x_1[n], x_2[n]$ הם joint-WSS בעלי $R_{12}[k]$ (לא ניתן להניח אי תלות).
- נתונים קשרים הבאים:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n-1]$$

$$z[n] = x_1[n-1] + x_2[n]$$

- (א) יש להוכיח, ש- $y[n]$ הוא WSS, חשב הספק P_y .
- (ב) יש לחשב $C_y[k]$.
- (ג) מהי התפלגות של $y[n]$?
- (ד) מהי התפלגות של $y[0] + y[1]$?
- (ה) האם $y[n], z[n]$ הם joint-WSS?
- (ו) עבור $x_1[n], x_2[n]$ רעש לבן גאוס, מהו מקדם חיוזי לינארי אופטימלי a מהצורה $\hat{z}[n] = ay[n]$?

חלק III

מערכות

פרק 9

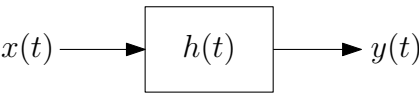
מערכת LTI - זמן רציף

מטרה: ניתוח של השפעת מערכת LTI על אות אקראי.

תוכן הפרק	
120	9.1 הקדמה
121	9.2 תכונות
121	9.2.1 מישור הזמן
123	9.2.2 מישור התדר
124	9.3 הספק ויחס אות לרעש
126	9.4 קשר בין מוצא של מערכות שונות
129	9.5 שאלות

9.1 הקדמה

תזכורת מה זה מערכת עובר מערכת LTI בעלת תגובה להלם $h(t)$ מתקיים



(9.1)

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)h(s)ds \end{aligned}$$

במישור התדר,

(9.2)

$$Y(F) = H(F)X(F),$$

כאשר

(9.3)

$$Y(F) = \mathcal{F} \{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

9.2 תכונות

מטרה: לאפיין קשרים בין כניסה למוצא של מערכות LTI.

כניסה WSS (תכונה 9.1): נתונה מערכת LTI יציבה. אם ורק אם מתקיים אחד מהתנאים להלן, מתקיים גם 2 הנוספים:

1. התהליך בכניסה הוא WSS.
2. התהליך במוצא הוא WSS.
3. כניסה ומוצא הם WSS במשותף.

פרשנות של סטציאונריות משותפת (תכונה 9.2): זוג אותות WSS הנתונים יכולים להיות ביחד כניסה ומוצא של מערכת LTI.

פרשנות

9.2.1 מישור הזמן

תוחלת (תכונה 9.3): תוחלת תהליך WSS במוצא המערכת הוא הכפלה של תוחלת בכניסה למערכת כפול הגבר DC של המערכת, ונתון ע"י

$$(9.4) \quad \mu_y = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds = \mu_x H(0),$$

כאשר $H(0)$ זה תגובת אמפליטודה בתדר DC, הנקרא גם **הגבר DC**. הוכחה. ניתן להחליף סדר של תוחלת ואינטגרל הקונבולוציה,

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s) x(t-s) ds \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) \underbrace{E[x(t-s)]}_{\mu_x} ds \\ &= \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds = \mu_x H(F=0) \end{aligned}$$

קשרים בין כניסה למוצא - מישור הזמן (תכונה 9.4): קשרים בין אות כניסה ואות מוצא:

$$(א9.5) \quad R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

$$(ב9.5) \quad C_{xy}(\tau) = C_x(\tau) * h(\tau)$$

$$(9.5) \quad R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(-\tau)$$

$$(19.5) \quad C_{yx}(\tau) = C_x(\tau) * h(-\tau)$$

$$(9.5) \quad R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_{xy}(\tau) * h(-\tau)$$

$$(19.5) \quad C_y(\tau) = C_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = C_{xy}(\tau) * h(-\tau)$$

הוכחה.

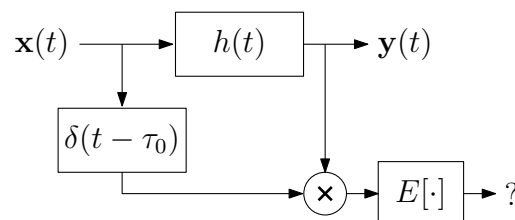
$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau)] \\ &= E\left[\mathbf{x}(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}((t+\tau)-s) ds\right] \\ (9.6) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau-s)] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)R_x(\tau-s)ds = R_x(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{x}(t+\tau)] \\ &= E\left[\left(\mathbf{x}(t) * h(t)\right) \mathbf{x}(t+\tau)\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathbf{x}(t-s)ds \mathbf{x}(t+\tau)\right] \\ (9.7) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)E[\mathbf{x}(t-s)\mathbf{x}(t+\tau)] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)R_x(s+\tau)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s-(-\tau))R_x(s)ds = R_x(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

הוכחה עבור יתר התכונות היא דומה מאוד.

דוגמה 9.1: נתונה מערכת LTI בעלת תגובה להלם $h(t)$ לא ידועה. אות $\mathbf{x}(t) \sim N(0,1)$ הוא רעש לבן, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) * h(t)$. הראה, שהמערכת שבשרטוט יכולה לשמש לזיהוי $h(t)$.

חישוב תגובה
להלם במישור
הזמן

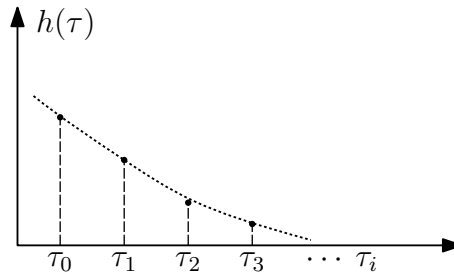


פתרון:

$$E[\mathbf{x}(t-\tau_0)\mathbf{y}(t)] = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t+\tau_0)]$$

$$\begin{aligned}
 &= R_{xy}(\tau_0) = \underbrace{R_x(\tau)}_{\delta(\tau)} * h(\tau) \Big|_{\tau=\tau_0} \\
 &= \delta(\tau) * h(\tau) \Big|_{\tau=\tau_0} = h(\tau_0)
 \end{aligned}$$

לסיכום, ניתן לקבל ערכים של $h(t = \tau_i)$, עבור אוסף ערכי τ_i (איור 9.1).



איור 9.1: תגובה להם מתקבלת ע"י חישוב של $h(\tau_i)$, רבים ככל הנדרש.

9.2.2 מישור התדר

מטרה: ניתוח קשר בין כניסה למצוא המערכת במישור התדר - בסיס לתאוריה של מסננים.

קשר בין כניסה למוצא - מישור התדר (תכונה 9.5): בהינתן תגובת התדר של המערכת, $H(F) = \mathcal{F} \{h(\tau)\}$, הקשרים הם:

$$(א9.8) \quad S_{xy}(F) = \mathcal{F} \{R_{xy}(\tau)\} = S_x(F) H(F)$$

$$(ב9.8) \quad S_{yx}(F) = S_x(F) H^*(F)$$

$$(ג9.8) \quad S_y(F) = S_x(F) H(F) H^*(F) = S_x(F) |H(F)|^2$$

הוכחה. באופן ישיר, תוך שימוש בתכונות:

□ קובנבולוציה בזמן היא מכפלה בתדר,

$$H^*(F) = \mathcal{F} \{h(-\tau)\} \quad \square$$

דוגמה 9.2: (חזרה על הדוגמה 7.4, פתרון בדרך אחרת) נתונה מערכת השהייה, בעלת

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

חשב $S_y(F)$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t - t_0) \\
 H(F) &= e^{j2\pi f t_0} \\
 S_y(F) &= S_x(F) |H(F)|^2 = S_x(F)
 \end{aligned}$$

כצפוי, התשובה היא זהה לדוגמה 7.4.

דוגמה 9.3: נתון אות $x(t)$ עם פרמטרים $\mu_x, R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

$$|H(F)| = \begin{cases} \sqrt{1 + 4\pi^2 F^2} & |F| < 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יש לחשב: $\mu_y, R_y(\tau), P_y$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \mu_y &= \mu_x H(0) = \mu_x \\
 S_x(F) &= \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} = \frac{2}{1 + (2\pi F)^2} \\
 S_y(F) &= S_x(F) |H(F)|^2 = \begin{cases} 2 & |F| < 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \\
 R_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{S_y(F)\} = 8 \frac{\sin(4\pi\tau)}{4\pi\tau} = 8 \operatorname{sinc}(4\pi\tau) \\
 P_y &= R_y(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(F) dF = \int_{-2}^2 2 dF = 8
 \end{aligned}$$

9.3 הספק ויחס אות לרעש

מטרה: סיכום הנושא של הספק הרעש במוצא המערכת (מסנן).

הספק כניסה ומוצא (תכונה 9.6): הספק נתון ע"י

$$(9.9) \quad P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) dF$$

$$(9.10) \quad P_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) |H(F)|^2 dF$$

PSD של אות ורעש (תכונה 9.7): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$(9.11) \quad x(t) = s(t) + n(t),$$

כאשר $s(t)$, $n(t)$ הם בלתי תלויים, $E[n(t)] = 0$, צפיפות הספק של אות המוצא הוא

$$(9.12) \quad \begin{aligned} S_y(F) &= S_x(F) |H(F)|^2 \\ &= S_s(F) |H(F)|^2 + S_n(F) |H(F)|^2, \end{aligned}$$

יחס אות לרעש בכניסה למערכת (תכונה 9.8):

$$(9.13) \quad \text{SNR}_x = \frac{E[s^2(t)]}{E[n^2(t)]} = \frac{R_s(0)}{R_n(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_s(F) dF}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(F) dF}$$

יחס אות לרעש במוצא המערכת (תכונה 9.9):

$$(9.14) \quad \text{SNR}_y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_s(F) |H(F)|^2 dF}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(F) |H(F)|^2 dF}.$$

פרשנות של PSD (תכונה 9.10): נניח, שאות אקראי $x(t)$ עבר דרך מסנן BPF מהצורה

$$(9.15) \quad H(F) = \begin{cases} 1 & |F| \in \left[F_0 \pm \frac{\Delta F}{2} \right] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

במקרה הזה, הספק מוצא P_y נתון ע"י

$$\begin{aligned} R_y(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 S_x(F) dF \\ &= \int_{F_0 - \Delta F/2}^{F_0 + \Delta F/2} S_y(F) dF + \int_{-F_0 - \Delta F/2}^{-F_0 + \Delta F/2} S_y(F) dF \\ &= 2 \int_{F_0 - \Delta F/2}^{F_0 + \Delta F/2} S_y(F) dF \end{aligned}$$

עבור $\Delta F \leftarrow 0$,

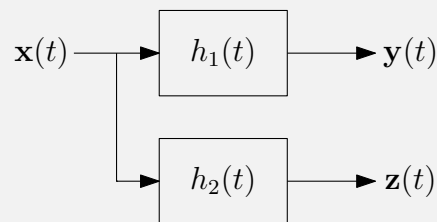
$$(9.16) \quad \begin{aligned} R_y(0) &\approx 2S_y(F_0)\Delta F \\ S_y(F_0) &\approx \frac{1}{2} \frac{R_y(0)}{\Delta F} \\ S_y(F_0) + S_y(-F_0) &\approx \frac{R_y(0)}{\Delta F} \end{aligned}$$

לסיכום, ניתן לראות את הקשר בין הגדרת ההספק בזמן והגדרת ההספק בתדר.

9.4 קשר בין מוצא של מערכות שונות

מטרה: אותו אות אקראי עובר דרך מערכות שונות במקביל. מהו הקשר בין מוצאי המערכות הללו?

מערכות שונות (תכונה 9.11): עבור תהליך $x(t)$, העובר דרך 2 מערכות שונות, מתקיים



$$(9.17) \quad R_{yz}(\tau) = R_x(\tau) * h_1(-\tau) * h_2(\tau)$$

$$(9.17) \quad S_{yz}(F) = S_x(F) H_1^*(F) H_2(F) = \mathcal{F} \{ R_{yz}(\tau) \}$$

בסיס להוכחה היא קונבולוציה של 3 פונקציות, שנתונה ע"י

$$(9.18) \quad x(t) * h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) x(t - \alpha - \beta) d\alpha d\beta$$

הוכחה.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta) x(t - \beta) d\beta$$

$$R_{yz}(t, t + \tau) = E[y(t)z(t + \tau)]$$

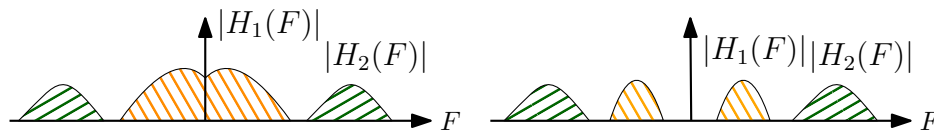
$$\begin{aligned} (9.19) \quad &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta) x(t + \tau - \beta) d\beta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) \underbrace{E[x(t - \alpha)x(t + \tau - \beta)]}_{R_x(\tau + \alpha - \beta)} d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_x(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

$$E[x(t-\alpha)x(t-\beta+\tau)] = R_x(\tau+\alpha-\beta)$$

איור 9.2: המחשה גרפית עבור ההוכחה של תכונה 9.4.

תכונות/הערות החשובות:

□ עבור מערכות $h_1(t), h_2(t)$ ממשיות, $|H_1(F)|, |H_2(F)|$ הם בעלי סימטריה זוגית.



איור 9.3: דוגמה לזוג מערכות עבורם $H_1^*(F)H_2(F) = 0$.

□ במידה והמערכות לא חופפות במישור התדר, מתקיים מצב מיוחד של (ראה איור 9.3)

$$\forall F H_1^*(F)H_2(F) = 0$$

עבור מצב מיוחד זה התהליכים $y(t), z(t)$ הם:

- אורטוגונליים,

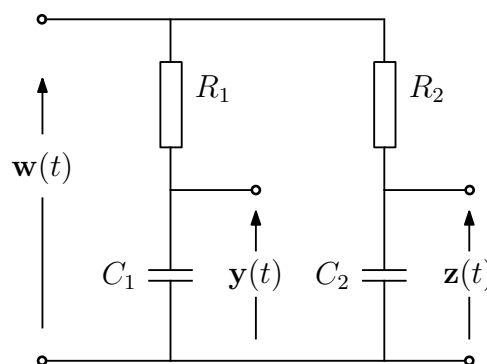
$$S_{yz}(F) = 0 \Rightarrow R_{yz}(\tau) = 0$$

- מאחר ולפחות עבור אחת משני המערכות מתקיים $H(0) = 0$ (הגבר DC שווה ל-0), ובעקבות הקשר $\mu_y = \mu_x H(0) = 0$, הם חסרי קורלציה (ראה תכונה 7.2.1),

$$C_{yz}(\tau) = R_{yz}(\tau) = 0.$$

- אם התהליך $x(t)$ הוא גאוס, הם גם בלתי תלויים (להרחבה, ראה פרק 10).

○ המצב הזה מסביר, לדוגמה, למה לכל ערוץ רדיו יש רעש משלו, בלתי-תלוי ברעש בערוץ אחר.



איור 9.4: מעגל עבור הדוגמה 9.4.

דוגמה 9.4: נתון רעש לבן גאוס $w(t)$ בעל PSD של $\frac{N_0}{2}$ בכניסה למעגל חשמל באיור 9.4. יש לחשב $R_{yz}(t, t + \tau)$.

פתרון: עבור רעש לבן ידוע, $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. באופן כללי, עבור זוג המערכות מתקיים

$$(9.20) \quad H(F) = \frac{\frac{1}{j2\pi FC}}{R + \frac{1}{j2\pi FC}} = \frac{1}{1 + j2\pi RCF} = \frac{1/RC}{1/RC + j2\pi F}$$

$$(9.20) \quad h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)u(t) \leftarrow \exp(-at)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j2\pi F}$$

נסמן:

$$h_1(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} u(t) \quad \alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$h_2(t) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} u(t) \quad \alpha_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

החישוב הוא ע"פ הנוסחה (9.19):

$$\begin{aligned} R_{yz}(t, t + \tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{z}(t + \tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)\mathbf{w}(t - \alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta)\mathbf{w}(t + \tau - \beta)d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)h_2(\beta)R_w(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)h_2(\beta)\delta(\alpha - (\beta - \tau)) d\alpha d\beta \leftarrow \int f(x)\delta(x - a)dx = f(a) \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\beta - \tau)h_2(\beta)d\beta = h_1(-\tau) * h_2(\tau) \\ &= \frac{N_0}{2} \alpha_1 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1(\beta - \tau)} u(\beta - \tau) e^{-\alpha_2 \beta} u(\beta) d\beta \end{aligned}$$

ניתן לחלק את החישוב ל-2 חלקים, כאשר עבור כל חלק וחלק נבדוק מה קורה עם $u(\beta), u(\beta - \tau)$ שבתוך האינטגרל, כדי לנתח את גבולות האינטגרציה.

□ במקרה של $\tau \geq 0$, המסומן ע"י $u(\tau)$, גבול התחתון של האינטגרל תהיה τ , בהתאם לחיתוך בין התחומים:

$$\left. \begin{array}{l} u(\beta) \\ u(\beta - \tau) \rightarrow \beta - \tau \geq 0 \\ u(\tau) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \beta \geq 0 \\ \Rightarrow \beta \geq \tau \\ \Rightarrow \tau \geq 0 \end{array} \Rightarrow u(\tau) \int_{\tau}^{\infty}$$

□ במקרה של $\tau < 0$ עבור $u(\beta - \tau)$ האי-שיוויון $\beta \geq -\tau$ מתקיים עבור כל τ בתחום

$\beta \geq 0$, בהתאם לחיתוך בין התחומים:

$$\left. \begin{array}{lll} u(\beta) & \Rightarrow \beta \geq 0 \\ u(\beta - \tau) \rightarrow \beta - \tau \geq 0 & \Rightarrow \beta \geq \tau \\ u(-\tau) \rightarrow \tau < 0 & \Rightarrow \tau < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u(-\tau) \int_0^\infty$$

לסיכום:

$$\begin{aligned} R_{yz}(\tau) &= \frac{N_0}{2} \alpha_1 \alpha_2 u(\tau) \int_\tau^\infty e^{-\alpha_1(\beta-\tau)} e^{-\alpha_2 \beta} d\beta \\ &\quad + \frac{N_0}{2} \alpha_1 \alpha_2 u(-\tau) \int_0^\infty e^{-\alpha_1(\beta-\tau)} e^{-\alpha_2 \beta} d\beta \\ &= \frac{N_0}{2} \alpha_1 \alpha_2 e^{\alpha_1 \tau} \left[u(\tau) \int_\tau^\infty e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\beta} d\beta + u(-\tau) \int_0^\infty e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\beta} d\beta \right] \\ &= -\frac{N_0}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{\alpha_1 \tau} \left[u(\tau) e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\beta} \Big|_\tau^\infty + u(-\tau) e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\beta} \Big|_0^\infty \right] \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e^{\alpha_1 \tau} \left[u(\tau) e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau} + u(-\tau) \right] \quad \uparrow \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[e^{-\alpha_2 \tau} u(\tau) + e^{\alpha_1 \tau} u(-\tau) \right] \end{aligned}$$

במקרה הפרטי של $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ מתקבל $y(t) = z(t)$, ולכן

$$\begin{aligned} R_{yz}(\tau) &= \frac{N_0}{4} \alpha e^{-\alpha|\tau|} \\ &= R_y(\tau) = R_z(\tau) \\ \rho_{yz}(\tau) &= \frac{C_{yz}(\tau)}{C_{yz}(0)} = \frac{R_{yz}(\tau)}{R_{yz}(0)} = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \rho_{yz}(0) = 1 \end{aligned}$$

9.5 שאלות

9.1 (תכונות ומאפיינים של תהליכים אקראיים) נתון אות אקראי מהצורה

$$x(t) = A \left[1 + m \sin(2\pi f_m t + \phi) \right] \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

כאשר $0 < A, m$ קבועים, $\phi, \theta \sim U[0, 2\pi]$ הם משתנים אקראיים בלתי תלויים (אות תקשורת מאופנן AM). מצא:

1. $E[x(t)], \text{Var}[x(t)]$

2. $R_x(t_1, t_2)$ או $R_x(t, t + \tau)$. האם מדובר בתהליך סטציונרי?

3. האות עובר דרך מערכת (התמרת הילברט)

$$H(f) = -j \cdot \text{sign}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

חשב הספק P_y במוצא המערכת.

פרק 10

מערכות LTI - תהליכים גאוסיים

מטרה: ניתוח עבור מקרה פרטי חשוב של אות אקראי גאوسی.

תוכן הפרק

131	10.1 הגדרה
132	10.2 מעבר דרך מערכת LTI
136	10.3 רעש צר-סרט (זמן רציף)
138	10.4 שאלות

10.1 הגדרה

תהליך גאوسی (הגדרה 10.1):

תהליך $x(t)$ הוא גאوسی אם, ורק אם עבור $\forall k > 0$ ועבור זמנים $t_1, \dots, t_k$ ההתפלגות של $x(t_1), \dots, x(t_k)$ היא גאוסית במשותף.

סטציאונריות (תכונה 10.1): תהליך גאوسی הוא SSS.

מטריצת auto-covariance (תכונה 10.2): עבור N ערכים בזמנים $t_1, \dots, t_N$ מתקבל ווקטור $\mathbf{X} = [x(t_1), \dots, x(t_N)]^T$ עבורו

$$(10.1) \quad C_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(t_1 - t_1) & C_{\mathbf{x}}(t_1 - t_2) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(t_1 - t_N) \\ C_{\mathbf{x}}(t_2 - t_1) & C_{\mathbf{x}}(0) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(t_2 - t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\mathbf{x}}(t_N - t_1) & C_{\mathbf{x}}(t_N - t_2) & \cdots & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix},$$

כאשר $C_{\mathbf{x}}(t_i - t_j) = C_{\mathbf{x}}(t_j - t_i)$.

דוגמה 10.1: נתון תהליך גאوسی $x(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ עם פונקציה ידועה $C_{\mathbf{x}}(\tau)$. מהי התפלגות משותפת של $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, כאשר $X_1 = x(t_1), X_2 = x(t_2)$?

פתרון:

$$(10.2) \quad \mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}}) \\ \sim N\left(\begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] \\ \text{Cov}[X_1, X_2] & \text{Var}[X_2] \end{bmatrix}\right)$$

$$(10.3) \quad \mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[\mathbf{x}(t_2)] \\ E[\mathbf{x}(t_1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$(10.4) \quad C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{x}}(0) & C_{\mathbf{x}}(\tau) \\ C_{\mathbf{x}}(\tau) & C_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} = \sigma_{\mathbf{x}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\mathbf{x}}(\tau) \\ \rho_{\mathbf{x}}(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

10.2 מעבר דרך מערכת LTI

מאפייני תהליך גאוסני במוצא מערכת LTI (תכונה 10.3): תהליך גאוסני, העבור דרך מערכת LTI, נשאר גאוסני. תוחלת במוצא בהתאם לתכונה 9.2.1 נתונה ע"י

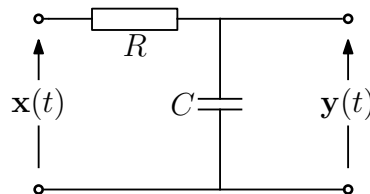
$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds \\ = E[x(t)]H(0), \quad H(F) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

מטריצת covariance מתקבלת בהתאם לתכונה 9.2.1 מתוך $C_y(\tau)$ (ראה משוואה 9.5)

$$C_y(\tau) = C_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

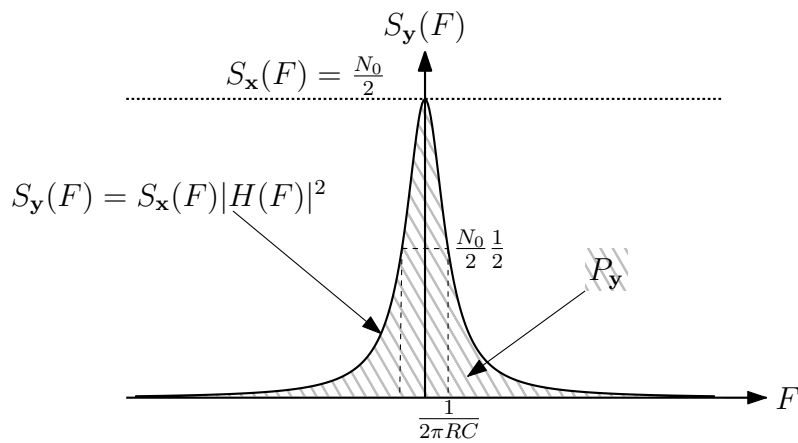
$$S_y(F) = S_x(F) |H(F)|^2$$

בהתאם לתכונה 6.4.3, ככל שהפרש זמן היה גדול יותר, יכולת החיזוי תקטן. עם זאת, מעבר דרך המערכת LTI בהכרח משפר את יכולת החיזוי עבור אותו τ , בגלל "התרחבות" של $C_y(\tau)$.



איור 10.1: מעגל RC עבור דוגמה 10.2.

דוגמה 10.2: נתון מסנן LPF ממומש ע"י מעגל RC, עם מתח מוצא על הקבל (איור 10.1).



איור 10.2: המחשה עבור הדוגמה 10.2: $S_x(\tau)$, $S_y(\tau)$, P_y .

אות כניסה $x(t)$ הוא רעש לבן גאוס (ראה הגדרה 6.5.3),

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad S_x(F) = \frac{N_0}{2} \quad \forall F$$

יש לחשב:

(א) $S_y(F), R_y(\tau), C_y(\tau)$

(ב) הספק ממוצע של $y(t)$, והספק עבור תחום תדרים של $|F| < F_0[\text{Hz}]$.

(ג) פרמטרי התפלגות של $y(t)$ והסתברות $\Pr(y(t) > 3)$.

(ד) הסתברות $\Pr([y(t_1) + y(t_2)] > 3)$.

(ה) פרמטרי התפלגות של $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_3) \end{bmatrix}$.

פתרון: ראו גם איור 10.2. נסמן $\alpha = \frac{1}{RC}$.

$$H(F) = \frac{\frac{1}{j2\pi FC}}{R + \frac{1}{j2\pi FC}} = \frac{1}{1 + j2\pi RCF} = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi F}$$

$$h(t) = \alpha \exp(-\alpha t) u(t) \leftarrow \exp(-at) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j2\pi F}$$

$$S_y(F) = S_x(F) |H(F)|^2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$= \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi RCF)^2}$$

$$= \alpha \frac{N_0}{4} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 F^2} \leftarrow \exp(-a|t|) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2}$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_y(F)\} = \alpha \frac{N_0}{4} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 F^2} \right\} = \alpha \frac{N_0}{4} \exp(-\alpha |\tau|)$$

$$C_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) - \mu_{\mathbf{y}}^2 = R_{\mathbf{y}}(\tau) \quad \leftarrow E[\mathbf{y}(t)] = \cancel{E[\mathbf{x}(t)]} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)ds = 0$$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{y}} &= R_{\mathbf{y}}(0) = \alpha \frac{N_0}{4} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{y}}(F) dF = \alpha \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 F^2} dF \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\alpha}{2\pi}}{\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + F^2} dF \quad \leftarrow \int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \alpha \frac{N_0}{4} \frac{1}{\pi} \arctan\left(F \frac{2\pi}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \alpha \frac{N_0}{4} \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ P &= \int_{-F_0}^{F_0} S_{\mathbf{y}}(F) dF = 2 \int_0^{F_0} S_{\mathbf{y}}(F) dF \\ &= 2\alpha \frac{N_0}{4\pi} \arctan\left(F \frac{2\pi}{\alpha}\right) \Big|_0^{F_0} = 2\alpha \frac{N_0}{4\pi} \arctan\left(\frac{2\pi F_0}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) \sim N\left(E[\mathbf{y}(t)], \text{Var}[\mathbf{y}(t)] = C_{\mathbf{y}}(0) = \alpha \frac{N_0}{4} = P_{\mathbf{y}}\right)$$

$$\mathbf{y}(t) \sim N(0, P_{\mathbf{y}}) \Rightarrow \Pr(\mathbf{y}(t) > 3) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{P_{\mathbf{y}}}}\right)$$

$$\mathbf{Y} \sim N(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}})$$

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[\mathbf{y}(t_1)] \\ E[\mathbf{y}(t_2)] \end{bmatrix} \quad \leftarrow E[\mathbf{y}(t_1)] = E[\mathbf{y}(t_2)] = 0$$

$$C_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} C_{\mathbf{y}}(0) & C_{\mathbf{y}}(\tau = t_1 - t_2) \\ C_{\mathbf{y}}(\tau) & C_{\mathbf{y}}(0) \end{bmatrix} \quad \leftarrow C_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) = \alpha \frac{N_0}{4} \exp(-\alpha\tau)$$

$$E[\mathbf{y}(t_1) + \mathbf{y}(t_2)] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{y}(t_1) + \mathbf{y}(t_2)] &= \text{Var}[\mathbf{y}(t_1)] + 2\text{Cov}[\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2)] + \text{Var}[\mathbf{y}(t_2)] \\ &= P_{\mathbf{y}} + 2C_{\mathbf{y}}(\tau) + P_{\mathbf{y}} = 2P_{\mathbf{y}} (1 + \exp(-\alpha\tau)) \end{aligned}$$

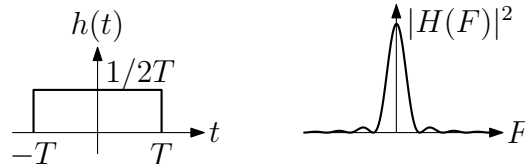
$$\Pr([\mathbf{y}(t_1) + \mathbf{y}(t_2)] > 3) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{2P_{\mathbf{y}} (1 + \exp(-\alpha\tau))}}\right)$$

עבור הפרש זמנים τ מספיק גדול, $C_{\mathbf{x}}(\tau) \rightarrow 0$, בהתאם לתכונה 6.4.3.

החישוב של $R_y(\tau)$ במישור הזמן, שלא דרך $\mathcal{F}^{-1}\{S_y(F)\}$, מופיע (עם שינויים קטנים) בדוגמה 9.4 לעיל.

דוגמה 10.3: נתון אות $x(t)$ רעש לבן גאוסני ומערכת (אינטגרטור) בעלת תגובה להלם

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & t \in [-T, T] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



חשב $S_y(F)$, P_y ופרמטרי התפלגות של $y(t)$.

פתרון: ניתוח פעולת המערכת:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds \\ &= \frac{1}{2T} \int_{|t-s| \leq T} x(s)ds \\ &= \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(s)ds \\ H(F) &= \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi Ft} dt = \frac{\sin(2\pi FT)}{2\pi FT} = \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega T} \\ |H(F)|^2 &= \frac{\sin^2(2\pi FT)}{(2\pi FT)^2} \end{aligned}$$

המשך הפתרון:

$$\begin{aligned} S_y(F) &= |H(F)|^2 S_x(F) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \\ &= \frac{\sin^2(2\pi FT)}{(2\pi FT)^2} \frac{N_0}{2} \\ P_y &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(F) dF \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2\pi FT)}{(2\pi FT)^2} dF \\ &= \frac{N_0}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt}_{h(\tau) * h(-\tau)|_{\tau=0}} \leftarrow \text{כלל Parsevall} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{N_0}{2} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T dt = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2T} \\
 &= R_y(0) = C_y(0) \\
 E[y(t)] &= E[\mathbf{x}(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(s) ds = 0 \\
 y(t) &\sim N\left(E[y(t)], \text{Var}[y(t)] = C_y(0)\right) \\
 &\sim N\left(0, \frac{N_0}{4T}\right)
 \end{aligned}$$

הערה: מאחר ומדובר באינטגרטור, ערך יותר גדול של T גורם ל"החלקה" יותר חזרה של האות.

10.3 רעש צר-סרט (זמן רציף)

רעש צר-סרט (הגדרה 10.2):

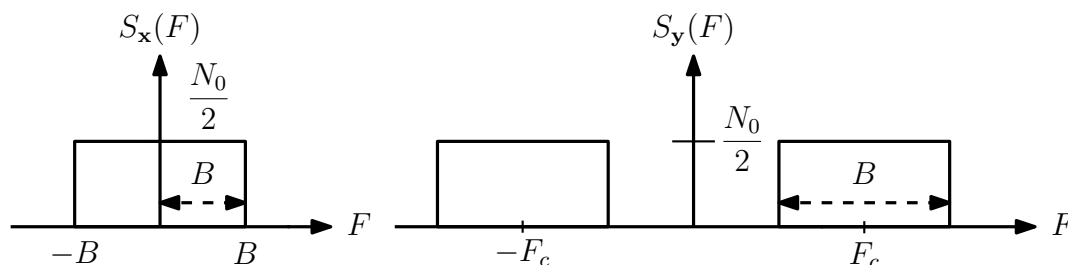
רעש צר-סרט גאוסי מתקבל אחרי העברת רעש לבן במסנן LPF או BPF מהצורה

$$(10.5) \quad H(F) = \begin{cases} 1 & F \in B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases},$$

והוא רעש בעל צפיפות הספק ספקטראלית מהצורה

$$(10.6) \quad S_x(F) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |F| \leq B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}, \quad S_y(F) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & F_c - \frac{B}{2} \leq |F| \leq F_c + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר התוצאה המתקבלת היא אחת מתוך שני האפשרויות באיור 10.3.



איור 10.3: צפיפות הספק ספקטראלית של רעש לבן צר-סרט

תכונות רעש צר-סרט (תכונה 10.4):

$$(10.7) \quad E[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{y}(t)] = 0$$

$$(10.8) \quad P_{\mathbf{x}} = \int_{-B}^B S_{\mathbf{x}}(F) dF = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} dF = 2B \frac{N_0}{2} = N_0 B = R_{\mathbf{x}}(0)$$

$$(10.9) \quad P_{\mathbf{y}} = \int_{-B}^B S_{\mathbf{y}}(F) dF = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} dF = 2B \frac{N_0}{2} = N_0 B = R_{\mathbf{y}}(0)$$

$$(10.10) \quad \begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{S_{\mathbf{x}}(F)\} \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B \exp(j2\pi F\tau) dF = \frac{N_0}{2} \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{1}{\pi\tau} \sin(2\pi B\tau) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \\ &= N_0 B \operatorname{sinc}(2\pi B\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) \end{aligned}$$

$$(10.11) \quad \begin{aligned} R_{\mathbf{y}}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{S_{\mathbf{y}}(F)\} = N_0 B \frac{\sin(\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \left(e^{-2\pi F_c\tau} + e^{2\pi F_c\tau} \right) \\ &= N_0 B \frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} \cos(2\pi F_c\tau) \\ &= N_0 B \operatorname{sinc}(\pi B\tau) \cos(2\pi F_c\tau) = C_{\mathbf{y}}(\tau) \end{aligned}$$

$$(10.12) \quad \mathbf{x}(t) \sim N \left(0, \sigma_{\mathbf{x}}^2 = C_{\mathbf{x}}(0) = P_{\mathbf{x}} = N_0 B \right)$$

$$(10.13) \quad \mathbf{y}(t) \sim N \left(0, \sigma_{\mathbf{y}}^2 = C_{\mathbf{y}}(0) = P_{\mathbf{y}} = N_0 B \right)$$

הקשר בין $R_{\mathbf{x}}(\tau)$, $R_{\mathbf{y}}(\tau)$ עבור $\tau = 0$ הוא כאשר $F_c = B/2$. במקרה הזה

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}}(\tau) &= N_0 B \operatorname{sinc}(\pi B\tau) \cos(2\pi F_c\tau) \\ &= N_0 B \frac{1}{\pi B\tau} \sin(\pi B\tau) \cos(\pi B\tau) \leftarrow \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \\ &= N_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} = N_0 B \operatorname{sinc}(2\pi B\tau) \end{aligned}$$

$$R_{\mathbf{y}}(0) = R_{\mathbf{x}}(0) = N_0 B$$

כאשר $C_{\mathbf{x}}(\tau_c = \frac{1}{2B}) = 0$, ניתן להניח עבור $\tau \geq \tau_c$, שמתקיים $R_{\mathbf{x}}(\tau) = C_{\mathbf{x}}(\tau) \approx 0$. באופן כללי, זוהי הנחה מקובלת עבור המקרים בהם פונקציה אוטו-קורלציה החוצה את ערך ה-0.

זמן קורלציה (הגדרה 10.3):

זמן קורלציה עבור האות $\mathbf{x}(t)$ הוא ערך הכי קטן של τ_c , עבורו מתקיים

$$\rho_{\mathbf{x}}(\tau_c) \approx \rho_c$$

ערכים המקובלים של ρ_c , בהתאם לתחום השימוש, הם 0.5, $\exp(-1)$, 0.1. ההגדרה

עבור זמן בדיד היא זהה (רושמים $(\rho_x[k_c])$).

10.4 שאלות

10.1 (גוזר) נתונה מערכת (גוזר), $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.
הכניסה היא תהליך אקראי גאوسي בעל

$$E[\mathbf{x}(t)] = 0,$$

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \sigma_{\mathbf{x}}^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}$$

חשב: $S_{\mathbf{x}}(F), S_{\mathbf{y}}(F), P_{\mathbf{y}}$.
בהנתן פילוג של $\mathbf{x}(t) \sim N(0, \sigma_{\mathbf{x}}^2)$, מהו צפיפות הפילוג (PDF) של האות $\mathbf{y}(t)$?

10.2 (ניתוח מערכת) נתונים תהליכים $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$.
 $\mathbf{x}(t)$ בעל מאפיינים הבאים:

□ גאوسي

□ סטציאונרי

$$E[\mathbf{x}(t)] = 0 \quad \square$$

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{4}\right) \quad \square$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \cos(2\pi 30t)$$

1. חשב הספק הממוצע של $\mathbf{x}(t)$.

2. חשב הספק ממוצע של $\mathbf{x}(t)$ עבור תחום תדרים של $|F| < 4\text{Hz}$.

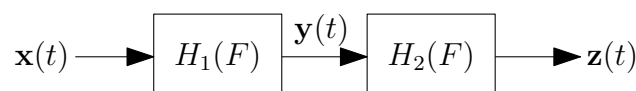
3. חשב הסתברות $\Pr(\mathbf{x}(1) > 3)$.

4. חשב הסתברות $\Pr([\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)] > 3)$.

5. חשב $\text{Var}[\mathbf{y}(t)]$ והספק ממוצע של $\mathbf{y}(t)$.

6. חשב $E[\mathbf{y}(t)], R_{\mathbf{y}}(t, t + \tau)$. האם מדובר בתהליך WSS?

10.3 (ניתוח מערכת) נתון תהליך אקראי $\mathbf{x}(t)$ בעל תכונות הבאות: WSS, גאوسي,
 $E[\mathbf{x}(t)] = 0, R_{\mathbf{x}}(\tau) = 10\delta(\tau)$. התהליך עובר דרך 2 מערכות הבאות:



$$H_1(F) = \begin{cases} 1, & |F| < 3 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$H_2(F) = \exp\left(-\frac{F^2}{4}\right)$$

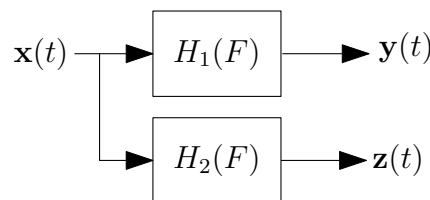
(א) יש לחשב הספק P_y .

הבהרה עבור סעיפים הבאים: אין חובה להגיע לערך מספרי של הפונקציה $Q(x)$, במידה ומופיעה בתשובה.

(ב) יש לחשב הסתברות $\Pr(y(t) > 3)$.

(ג) יש לחשב הספק P_z .

(ד) מהי התפלגות המשותפת של $\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ עבור



10.4 (אותות גאוסיים ומערכות)

נתונות 3 מערכות $h_1[n], h_2[n], h_3[n]$ בעלי כניסה $x[n]$ ומוצא $y_1[n], y_2[n], y_3[n]$. האות הכניסה הוא רעש לבן גאوسي בעל $R_x[k] = 4\delta[k]$. תגובות תדר של המערכות (מסננים אידיאליים עם השהייה, איור 10.4 הוא ערך מוחלט),

$$H_1(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f} & |f| \leq 0.15 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}, \quad H_2(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f} & 0.1 \leq |f| \leq 0.2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases},$$

$$H_3(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f} & 0.2 \leq |f| \leq 0.3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

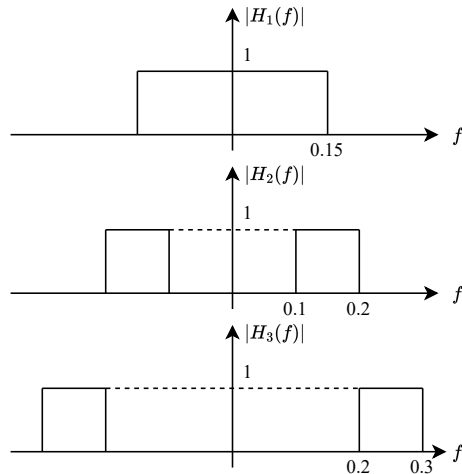
שאלה:

(א) (איור 10.5) מהי התפלגות המשותפת של הוקטור $\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix}$? יש לפרט את סוג ההתפלגות

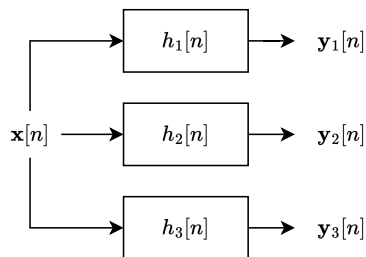
המשותפת וכל הפרמטרים.

(ב) יש לחזור על הסעיף הקודם, כאשר אות הכניסה הוא רעש גאوسي בעל

$$R_x[k] = 4 \exp(-|k|)$$



איור 10.4: תגובות אמפליטודה של המערכות (שאלה 10.4).

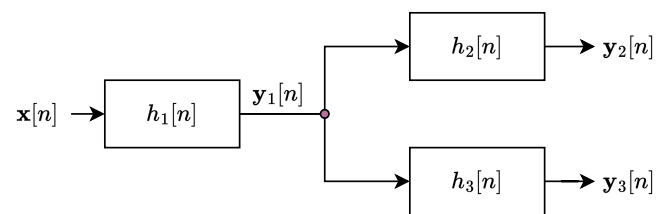


איור 10.5: עבור סעיפים א' וב' (שאלה 10.4).

(ג) (איור 10.6) ידוע, שלאותות $y_2[n]$, $y_3[n]$ יש התפלגות גאוסית משותפת מהצורה

$$\begin{bmatrix} y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} E[y_2[n]] \\ E[y_3[n]] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{y_2}[0] & C_{y_{23}}[0] \\ C_{y_{23}}[0] & C_{y_3}[0] \end{bmatrix} \right)$$

מהם הפרטמרים של ההתפלגות?



איור 10.6: עבור סעיף ג' (שאלה 10.4).

פרק 11

מערכת LTI - זמן בדיד

מטרה: ניתוח של מעבר אות אקראי דרך מערכת בזמן בדיד.

תוכן הפרק

142	11.1 הקדמה
142	11.1.1 מישור הזמן ומישור התדר
144	11.1.2 ניתוח במישור Z
145	11.2 מערכות FIR
150	11.3 מערכות IIR
154	11.4 שאלות

11.1 הקדמה

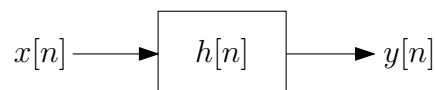
11.1.1 מישור הזמן ומישור התדר

קונבולוציה
בדידה

עבור מערכת בזמן בדיד מתקיים הקשר

$$(11.1) \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n], \quad Y(f) = H(f)X(f),$$

כאשר $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}$ (משוואה 6.50).



כמובן, הקשר בזמן ע"י קונבולוציה מתקיים גם עבור אות אקראי בכניסה,

$$(11.2) \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_m h[m]x[n-m]$$

תנאי לסטציאונריות (תכונה 11.1): בהינתן אות כניסה WSS למערכת LTI, המוצא הוא גם WSS אם ורק אם המערכת היא יציבה.

הניתוח של תוחלת ושונות לעיל מוגבל למערכות **יציבות** בלבד, אבל אינו מוגבל דווקא למערכות סיבתיות.

כל התכונות של זמן רציף זהות גם עבור זמן בדיד, לרבות מאפיינים של אותות גאויסיים.

תוחלת (מקבלה של תכונה 9.2.1) (תכונה 11.2): תוחלת תהליך WSS במוצא המערכת נתון ע"י

$$(11.3) \quad E[y[n]] = \mu_x \sum_m h[m] = \mu_x H(f=0)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} E[y[n]] &= E[h[n] * x[n]] = E\left[\sum_m h[m]x[n-m]\right] \\ &= \sum_m h[m]E[x[n-m]] \\ &= \mu_x \sum_m h[m] = \mu_x H(0) \end{aligned}$$

תוחלת

שונות מוצא עבור רעש לבן (תכונה 11.3): עבור רעש לבן גאויסי בכניסה, החישוב במישור הזמן מראה "הגבר" של שונות פי $\sum_m h^2[m]$.

הוכחה.

$$\begin{aligned} \text{Var}[y[n]] &= \text{Var}\left[\sum_m h[m]x[n-m]\right] \\ (11.4) \quad &= \sum_m h^2[m]\text{Var}[x[n-m]] \quad \text{בגלל אי תלות בזמן} \\ &= \sigma^2 \sum_m h^2[m] = C_y[0] \quad \leftarrow \text{Var}[x[n]] = C_x[0] \end{aligned}$$

חישוב שונות במשוואה (11.4) מבוסס על חוסר קורלציה (ואי תלות) בין הדגימות של רעש לבן, בהתאם להמשוואה (3.33).

שונות

התפלגות זוג דגימות של אות גאויסי (תכונה 11.4): עבור זוג דגימות (ראה גם דוגמה 10.1) בזמן בדיד $X_1 = x[n], X_2 = x[n+k]$, ניתן לבנות וקטור אקראי $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$ עם שונות משותפות נתונות ע"י

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1, X_1] &= \text{Cov}[X_2, X_2] = \text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] \\ (11.5) \quad &= \text{Var}[x[n]] = C_x[0] = \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$$(11.5) \quad \text{Cov}[X_1, X_2] = \text{Cov}[X_2, X_1] = C_x[k].$$

מטריצת covariance המתקבלת היא

$$(11.6) \quad C_x = \begin{bmatrix} C_x(0) & C_x[k] \\ C_x[k] & C_x[0] \end{bmatrix} = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_x[k] \\ \rho_x[k] & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \rho_x[k] = \frac{C_x[k]}{C_x[0]} = \frac{C_x[k]}{\sigma_x^2}$$

11.1.2 ניתוח במישור Z

ניתן לעשות את החישובים ע"י ביצועם במישור Z, בדומה לשימוש בהתמרת פוריה עבור אותות בזמן רציף, כאשר השימוש בהתמרת Laplace עבור אותות זמן רציף והשימוש בהתמרת DTFT עבור אותות בזמן בדיד הוא בד"כ הרבה פחות נוח. הקשרים במישור זמן בדיד ניתן לקבל בדומה למשוואות (9.5), (9.8). גם ההספק דומה מאוד למה שהוגדר בתכונה 9.3. בנוסף, ניתן להשתמש בהתמרת Z לניתוח האותות. לדוגמה,

$$(11.7) \quad R_{xy}[k] = R_x[k] * h[k] \quad S_{xy}(f) = S_x(f)H(f) \quad S_{xy}(z) = S_x(z)H(z),$$

כאשר

$$(11.8) \quad S_x(z) = \mathcal{Z} \{R_x[n]\}.$$

התמרת Z (הגדרה 11.1):

התמרת Z מוגדרת ע"י הקשר

$$(11.9) \quad H(z) = \mathcal{Z} \{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

קונבולוציה (תכונה 11.5):

$$(11.10) \quad y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)X(z)$$

שיקוף בזמן (תכונה 11.6):

$$(11.11) \quad \mathcal{Z} \{h[-n]\} = H(z^{-1}) = H(1/z)$$

פונקציית תמסורת של מערכת LTI (הגדרה 11.2):

פונקציית תמסורת של מערכת נתונה ע"י

$$(11.12) \quad H(z) = \mathcal{Z} \{h[n]\} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

בפרט, מתקיים

$$(11.13) \quad \mathcal{Z} \{h[n] * h[-n]\} = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}.$$

הקשר הזה חשוב לחישוב מהצורה

$$(11.14) \quad R_y[k] = R_x[k] * h[n] * h[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S_y(z) = S_x(z)H(z)H(z^{-1})$$

וחישובים הנלווים, כגון $P_y = R_y[0]$.

יציבות (תכונה 11.7): עבור מערכת יציבה וסיבתית, השורשים של $A(z)$ הינם בתוך מעגל יחידה.

התכונה חשובה בגלל הקשר שלה לתכונה 11.1.1.

11.2 מערכות FIR

FIR (תכונה 11.8): מערכות עם תגובה סופית להלם

$$h[n] = \{b_0, b_1, \dots, b_N\}$$

באורך $N + 1$, בעלי התמרה מהצורה

$$(11.15) \quad H(z) = B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$$

יציבות (תכונה 11.9): בהתאם להגדרתם, מערכות FIR תמיד יציבות.

דוגמה 11.1: (בין היתר, חזרה על הדוגמה 6.9)

האות כניסה $x[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוס (WGN). האות עובר דרך מערכת בעלת תגובה להלם $h[n] = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. יש לחשב:

(א) $E[y[n]]$, $\text{Var}[y[n]]$, הספק P_y , התפלגות $y[n]$.

(ב) צפיפות הספק ספקטראלית $S_y(f)$.

(ג) $R_y[k]$.

(ד) התפלגות משותפת של $\begin{bmatrix} y[n_1] \\ y[n_2] \end{bmatrix}$.

פתרון: דגשים:

□ בדוגמה 6.7 נעשה שימוש בתכונת סטציאונריות של רעש לבן, ובהמשך בדוגמה 6.9 נעשה שימוש בתכונות התדר.

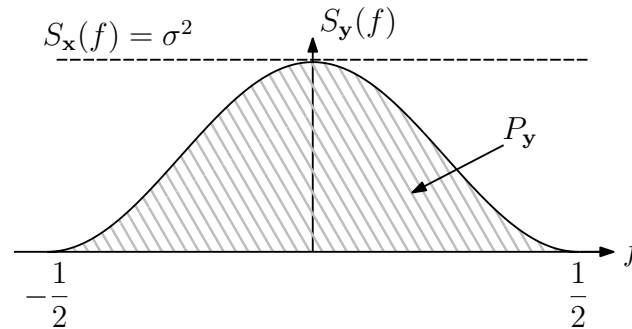
□ להלן נפתור את הדוגמה תוך שימוש בתכונות של מערכות.

$$(11.16) \quad E[y[n]] = E[x] \sum_m h[m] = 0$$

$$(11.17) \quad \text{Var}[\mathbf{y}[n]] = \sigma^2 \sum_m h^2[m] = \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$(11.18) \quad \begin{aligned} P_y &= R_y[0] \quad (\text{הגדרה 6.4.3}) \\ &= C_y[0] \quad \leftarrow E[\mathbf{y}[n]] = 0 \\ &= \text{Var}[\mathbf{y}[n]] \end{aligned}$$

$$(11.19) \quad \mathbf{y}[n] \sim N \left(E[\mathbf{y}[n]] = 0, \text{Var}[\mathbf{y}[n]] = \frac{\sigma^2}{2} \right)$$



ניתוח במישור התדר

$$(11.20) \quad h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$(11.21) \quad H(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} = \frac{1}{2}e^{-j\pi f} [e^{j\pi f} + e^{-j\pi f}] = e^{-j\pi f} \cos(\pi f)$$

$$(11.22) \quad \begin{aligned} |H(f)|^2 &= H(f)H^*(f) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j2\pi f}\right) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\pi f)] = \cos^2(\pi f) \end{aligned}$$

$$(11.23) \quad S_x(f) = \sigma^2$$

$$(11.24) \quad \begin{aligned} S_y(f) &= S_x(f) |H(f)|^2 = \text{DTFT} \{R_y[k]\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} [1 + \cos(2\pi f)] = \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{1}{2} \exp\{j2\pi f\} + 1 + \frac{1}{2} \exp\{-j2\pi f\} \right] \end{aligned}$$

$$(11.25) \quad \begin{aligned} P_y &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_y(f) df = \int_0^1 S_y(f) df = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} S_y(f) df \\ &= \sigma^2 \int_0^{\frac{1}{2}} [1 + \cos(2\pi f)] df \end{aligned}$$

$$(11.26) \quad \uparrow \int [1 + \cos(2\pi x)] dx = x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$$

חישוב $R_y[k]$:

□ דרך א' - חישוב קונבולוציה במישור הזמן

$$\begin{aligned}
 R_y[k] &= R_x[k] * h[n] * h[-n] \\
 &= R_x[k] * \sum_{n=0}^{N-1} h[n]h[n+k] \\
 (11.27) \quad &= \sigma^2 \delta[k] * \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} * \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2} \delta[k] + \frac{\sigma^2}{4} \delta[k-1] + \frac{\sigma^2}{4} \delta[k+1] = C_y[k]
 \end{aligned}$$

חישוב של $h[n] * h[-n]$ ע"י Matlab:

conv(h, fliplr(h))

□ דרך ב' - שימוש בהתמרת Z לחישוב הקונבולוציה

$$(11.28) \quad R_y[k] = R_x[k] * h[n] * h[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S_y(z) = S_x(z)H(z)H(z^{-1})$$

וחישוב הממתקבל:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad z \neq 0 \\
 H\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z, \quad |z| \neq \infty \\
 S_x(z) &= \sigma^2 \\
 S_y(z) &= S_x(z)H(z)H(z^{-1}) \\
 &= \sigma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right) \\
 &= \sigma^2 \left(\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1} \right) \quad |z| \neq 0, \infty \\
 R_y[k] &= \mathcal{Z}^{-1} \{S_y(z)\}
 \end{aligned}$$

כמובן, התשובה היא זהה עבור שתי הדרכים.

□ דרך ג' - מתקיים (דוגמה 6.9)

$$R_y[k] = \text{DTFT}^{-1} \{S_y(f)\}$$

המשך הפתרון:

$$\mathbf{Y} \sim N(\mu_Y, C_Y)$$

$$\mu_Y = \begin{bmatrix} E[\mathbf{y}[n_1]] \\ E[\mathbf{y}[n_2]] \end{bmatrix} \leftarrow E[\mathbf{y}[n_1]] = E[\mathbf{y}[n_2]] = 0$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} C_y[0] & C_y[k] \\ C_y[k] & C_y[0] \end{bmatrix} \quad k = |n_1 - n_2|$$

בהתאם לחישוב $C_y[k]$, במקרה של $k \geq 2$, הערכים של $y[n_1], y[n_2]$ הם בלתי תלויים, אורטוגונליים וחסרי קורלציה. ניתן גם לציין שזמן קורלציה (הגדרה 10.3) הוא $k_c = 2$ עבור $\rho_c < 0.5$.

דוגמה 11.2: נתון אות $w[n]$ שהוא רעש לבן גאוס ומוצא (אינטגרטור) בעלת אות מוצא

$$x[n] = \frac{1}{N} [w[n] + w[n-1] + \dots + w[n-N+1]] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w[n-m]$$

(דוגמה מקבילה לדוגמה 10.3). חשב:

□ תגובה להלם של המערכת, $x[n] = h[n] * w[n]$.

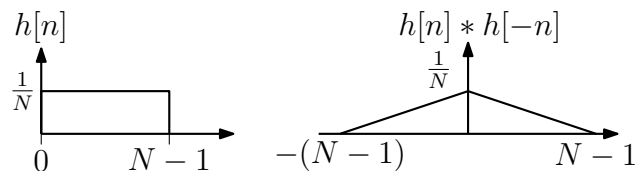
□ פרמטרי התפלגות של $x[n]$.

פתרון: □ תגובה להלם

$$h[n] = \frac{1}{N} \cdot \{1, \dots, 1\}$$

$$H(z) = \frac{1}{N} [1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}] \quad z \neq 0$$

המערכת מבצע מיצוע של N דגימות אחרונות של $w[n]$.



□ דרך א' - מישור Z

$$S_x(z) = S_w(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$= \sigma^2 H(z)H(z^{-1})$$

$$R_x[k] = \mathcal{Z}^{-1} \{S_x(z)\}$$

במקרה הזה הפתרון במישור Z הוא פחות נוח.

□ דרך ב' - מישור הזמן: החישוב מתבסס על התכונה 10.2

$$E[x[n]] = E[w[n]] \sum_n h[n] = \cancel{E[w[n]]} H(z = e^{j0} = 1) = 0$$

$$R_x[k] = R_w[k] * h[k] * h[-k]$$

$$= \sigma^2 (\delta[k] * h[k]) * h[-k]$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 h[k] * h[-k] \\
&= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} h[n] h[n+k] \\
R_x[0] &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} h^2[n] = \sigma^2 \left(\frac{1}{N^2} + \dots + \frac{1}{N^2} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{N} = C_x[0] = \text{Var}[\mathbf{x}[n]] \\
\mathbf{x}[n] &\sim N \left(E[\mathbf{x}[n]] = 0, \text{Var}[\mathbf{x}[n]] = \frac{\sigma^2}{N} \right)
\end{aligned}$$

□ דרך ג' - חישוב תוך שימוש באי תלות בין הדגימות של $\mathbf{w}[n]$ וסטציאונריות

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\mathbf{x}[n]] &= \frac{1}{N^2} \text{Var} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{w}[n-m] \right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \text{Var}[\mathbf{w}[n-m]] \\
&= \frac{1}{N^2} (\sigma^2 + \dots + \sigma^2) \\
&= \frac{1}{N^2} \sigma^2 N = \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}$$

□ לסיכום, ככל שערך של N גבוה יותר, שונות המוצא היא נמוכה יותר.

□ דוגמה לסימולציה של $\text{Var}[\mathbf{x}[n]]$

```

w = randn(1,1e6);
N = 5;
x = filter(1/N*ones(1,N),1,w);
var(x)

```

□ הערה: כשלווקחים אות באורך סופי, עצם הגבלת האות בזמן דומה מאוד לפעולה של המערכת, פרט להכפלה בפקטור של $1/N$.

11.3 מערכות IIR

IIR (תכונה 11.10): מערכות עם תגובה אינסופית להלם, בעלי התמרה מהצורה

$$(11.29) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

דוגמה 11.3: נתון תהליך אקראי מהצורה

$$x[n] = ax[n-1] + w[n],$$

כאשר $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ הוא רעש לבן גאוס.

□ מהו תנאי לתהליך סטציאונרי?

□ חשב $E[x[n]]$.

□ חשב $R_x[k], C_x[k], P_x$.

פתרון: □ ניתוח מקדים

$$X(z) = az^{-1}X(z) + W(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \xrightarrow{\mathcal{Z}} h[n] = a^n u[n]$$

$$X(f) = X\left(z = e^{j2\pi f}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}, \quad |a| < 1$$

□ מאחר ו- $w[n]$ הוא WSS, התנאי ל-WSS עבור $x[n]$ שקול לתנאי ליציבות של $H(z)$, שהוא $|a| < 1$ (ראה תכונה 9.2 וגם 11.1.2). לא ניתן לעשות חישובים עבור מערכת לא יציבה!

□ חישוב תוחלת - דרך א' - ע"פ משוואה (11.3)

תוחלת

$$(11.30) \quad \mu_x = \mu_w \sum_m h[m] = 0$$

□ חישוב תוחלת - דרך ב' - מתבסס על תכונת WSS של $x[n]$

$$E[x[n]] = aE[x[n-1]] + E[w[n]]$$

$$(11.31) \quad \mu_x = a\mu_x$$

$$\mu_x = 0$$

□ חישוב שונות $\text{Var}[\mathbf{x}[n]]$ והספק $P_{\mathbf{x}}$ - דרך א'

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\mathbf{x}[n]] &= C_{\mathbf{x}}[0] = R_{\mathbf{x}}[0] = P_{\mathbf{x}} \\
 &= \text{Var}[\mathbf{w}[n]] \sum_m h^2[m] \\
 (11.32) \quad &= \sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty} (a^2)^m \quad \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1 \\
 &= \sigma^2 \frac{1}{1-a^2}
 \end{aligned}$$

□ חישוב שונות $\text{Var}[\mathbf{x}[n]]$ והספק $P_{\mathbf{x}}$ - דרך ב' (בדומה לדרך ב' של חישוב תוחלת)

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\mathbf{x}[n]] &= \text{Var}[a\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n]] \\
 (11.33) \quad &= a^2 \text{Var}[\mathbf{x}[n]] + \text{Var}[\mathbf{w}[n]] \\
 \text{Var}[\mathbf{x}[n]] &= a^2 \text{Var}[\mathbf{x}[n]] + \sigma^2
 \end{aligned}$$

□ חישוב הספק $P_{\mathbf{x}}$ (דרך ג') במישור התדר, ע"י החישוב $S_{\mathbf{x}}(f)$

בהתאם לקשר בין התמרת Z להתמרת DTFT

$$\begin{aligned}
 X(f) &= X(z = e^{j2\pi f}) \\
 &= \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}} \\
 |X(f)|^2 &= \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}} \cdot \frac{1}{1 - ae^{j2\pi f}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2a \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}} \\
 &= \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \\
 S_{\mathbf{x}}(f) &= S_{\mathbf{w}}(f) |X(f)|^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \\
 P_{\mathbf{x}} &= \int_{-1/2}^{1/2} S_{\mathbf{x}}(f) df = 2 \int_0^{1/2} S_{\mathbf{x}}(f) df \\
 &= 2\sigma^2 \int_0^{1/2} \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} df \\
 &= 2\sigma^2 \frac{1}{\pi(1-a^2)} \arctan\left(\frac{1+a}{1-a} \tan(\pi f)\right) \Bigg|_0^{1/2} \\
 &= 2\sigma^2 \frac{1}{\pi(1-a^2)} \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \frac{1}{1-a^2}
 \end{aligned}$$

□ חישוב $R_x[k]$ - דרך א' - מישור הזמן

$$\begin{aligned}
 R_x[k] &= R_w[k] * h[n] * h[-n] \\
 &= \sigma^2 \delta[k] * (a^n u[n]) * (a^{-n} u[-n]) \\
 &= \sigma^2 (a^n u[n]) * (a^{-n} u[-n])
 \end{aligned}
 \tag{11.34}$$

חישוב ישיר הוא לא תמיד נוח, לכן אפשר להיעזר בקשר

$$\begin{aligned}
 h[k] * h[-k] &= \sum_m h[m] h[m+k] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u[m] a^{m+k} u[m+k] \\
 &= a^k \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} u[m+k]
 \end{aligned}
 \tag{11.35}$$

בגלל תכונת סימטריה של $R_x[k] = R_x[-k]$ ניתן להתמקד בשלב ראשון בערכי $k \geq 0$, עבורם מתקיים:

$$a^k \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} u[m+k] = a^k \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} = a^k \frac{1}{1-a^2}
 \tag{11.36}$$

לסיכום,

$$\begin{aligned}
 R_x[k] &= \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k \quad k \geq 0 \\
 R_x[k] &= R_x[-k] \Rightarrow R_x[k] \\
 &= \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k
 \end{aligned}
 \tag{11.37}$$

פתרון זה הוא בדומה לדוגמאות 9.4 (זמן רציף), 11.2.

□ חישוב $R_x[k]$ - דרך ב' - משוואת בהפרשים

מכפילים את האות ב- $x[n-k]$ ומחשבים תוחלת

$$\begin{aligned}
 x[n]x[n-k] &= ax[n-1]x[n-k] + w[n]x[n-k] \\
 E[x[n]x[n-k]] &= E[ax[n-1]x[n-k]] + E[w[n]x[n-k]] \\
 R_x[k] &= aR_x[k-1] + \cancel{E[w[n]x[n-k]]} \\
 R_x[k] &= aR_x[k-1] = a^2R_x[k-2] = a^3R_x[k-3] = \dots \\
 R_x[k] &= a^k R_x[0] = a^k \frac{\sigma^2}{1-a^2} \quad k \geq 0
 \end{aligned}$$

□ חישוב $R_x[k]$ - דרך ג' - מישור z , כאשר ניתן (ורצוי) להתייחס לאות $w[n]$, כעובר

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad \text{דרך המערכת}$$

$$\begin{aligned} S_x(z) &= S_w(z)H(z)H(z^{-1}) \\ &= \sigma^2 \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az} \quad \left| \frac{1}{a} \right| > |z| > |a| \\ &= \sigma^2 \frac{z}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - az} \\ &= \sigma^2 \left[\frac{A_1 z}{z - a} + \frac{A_2 z}{1 - az} \right] \Rightarrow A_1 z - aA_1 z^2 + A_2 z^2 - aA_2 z = z \\ &\quad \begin{cases} (A_2 - aA_1) z^2 = 0 \\ (A_1 - aA_2) z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1 - a^2} \\ A_2 = \frac{a}{1 - a^2} \end{cases} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - a^2} \left[\frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}} \right] \end{aligned}$$

מאחר ו- $H(z)$ הוא סיבתי, $H(z^{-1})$ הוא אנטי-סיבתי. לכן, ניתן לפשט את החישוב עבור קוטב סיבתי בלבד.

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}[k] &= \frac{\sigma^2}{1 - a^2} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - az^{-1}} \right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - a^2} a^k u[k] \\ R_{\mathbf{x}}[k] &= R_{\mathbf{x}}[-k] \Rightarrow R_{\mathbf{x}}[k] = \frac{\sigma^2}{1 - a^2} a^{|k|} \end{aligned}$$

כמובן, ניתן גם לעשות חישוב של חלק אנטי-סיבתי ישירות,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ -\frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}} \quad \left| \frac{1}{a} \right| > |z| \right\} = \left(\frac{1}{a} \right)^{-n} u[-n - 1] = a^n u[-n - 1].$$

□ חישוב $R_{\mathbf{x}}[k]$ - דרך ד' - מישור התדר. תאורטית, ניתן לבצע חישוב $R_{\mathbf{x}}[k] = \text{DTFT}^{-1} \{ S_{\mathbf{x}}(f) \}$

```
sigma = 1; a = 2/3;
w = sigma*randn(1,1e6);
x = filter(1,[1 -a],w);
[R,lags] = xcov(x,10,'unbiased');
stem(lags,[R; sigma^2/(1-(a)^2)*(a).^abs(lags)]')
legend('Simulation','Theory')
```

□ חישוב $R_{\mathbf{x}}[k]$ - דרך ה' - סימולציה

11.4 שאלות

11.1 (תאוריה ו/או סימולציה) נתון רעש לבן גאוס $w[n] \sim N(0, 1)$ עובר דרך מערכת בעלת תגובה להלם

$$h[n] = \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \right]$$

מוצא המערכת מסומן ב- $x[n]$. יש לחשב $R_x[3]$.

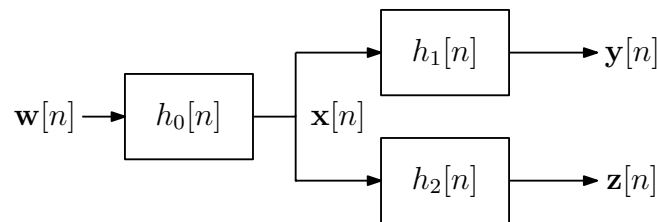
11.2 נתון רעש לבן $w[n] \sim N(0, 1)$ העובר דרך המערכת בעלת תגובה להלם

$$h_0[n] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

במוצא מתקבל תהליך אקראי בדיד $x[n]$. התהליך עובר דרך מערכת בעלת תגובה להלם

$$h_1[n] = \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

נסמן מוצא המערכת ב- $y[n]$.



איור 11.1: מערכות כוללת 3 חלקים

חשב:

1. $E[x[n]]$, הספק ממוצע של $x[n]$.

2. חשב (מספרית) את מקדמי חיזוי לינארי מהצורה

$$\hat{x}[n+1] = ax[n] + bx[n-1]$$

ואת שגיאת חיזוי מתקבלת.

3. חשב $R_y[k]$ והספק הממוצע של $y[n]$.

4. נתונה מערכת

$$h_2[n] = \{h_0, h_1\}$$

עבור כניסה $x[n]$, סמן מוצא המערכת ב- $z[n]$. האם ישנם ערכים של $h_0, h_1 \neq 0$ עבורם האותות $y[n], z[n]$ הם חסרי קורלציה. הוכח את תשובתך!

11.3 (סימולציה) נתון רעש לבן גאוס $w[n] \sim N(0, 1)$ עובר דרך מערכת בעלת פונקציית תמסורת

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.1z^{-1}}$$

מוצא המערכת מסומן ב- $x[n]$.
יש לחשב ע"י סימולציה ערך של $R_x[1]$.

11.4 (סימולציה) מטרה של התרגיל היא לנתח מעבר אות אקראי דרך מערכת LTI. יש להציב בכל הפרמטרים לאורך התרגיל ערכים מספריים הגיוניים.

□ הכניסה למערכת, $x[n]$, היא רעש לבן גאוס בעל שונות σ_w^2 .

□ אות מוצא מסומן ב- $y[n]$.

□ מערכת בעלת תגובה להלם, $h[n]$, ותגובת התדר, $H(f)$.

(א) יש לחשב אוטו-קורלציה של אות כניסה, $R_x[k]$. האם הגרף המתקבל תואם את הגרף התאורטי?

(ב) נדרש לתכנן מסנן BPF. יש להציג תגובה להלם המתקבלת, $h[n]$, ותגובת התדר, $H(f)$.

(ג) יש לחשב ממוצע ושונות של אות מוצא. האם התוצאה מבוססת החישוב ישיר מתוך $x[n]$ תואמת את התוצאה של החישוב המבוסס על תגובה להלם $h[n]$ (משוואות (11.3), (11.4)?

(ד) יש להראות ע"י היסטוגרמה, שהתפלגות אות המוצא הוא גאוס, לרבות השוואה ל-PDF התאורטי עם פרמטרים מסעיף הקודם.

דגש לסעיפים הבאים: מדובר בהשוואה של תוצאות מתקבלות מהדרכים הבאות:

□ התוצאה מבוססת תגובה להלם המספרית של המסנן, $h[n]$ ותגובת התדר שלו, $H(f)$. החישוב מספרי במקרה זה מבוסס נוסחאות התאורטיות (אפשר להשתמש בפקודות מוכנות).

□ תוצאת חישוב ישיר המבוססת אות מוצא מהמסנן, $y[n]$.

(ה) יש לחשב אוטו-קורלציה של אות מוצא, $R_y[k]$. האם התוצאה מבוססת חישוב ישיר (פקודה `xcorr`) מתוך $y[n]$ תואמת את התוצאה של החישוב המבוסס על הנוסחא (11.27) שבדוגמא?

(ו) יש להשוואת צפיפות הספק ספקטראלית מבוססת $|H(f)|^2$ (משוואה (9.8)) ותוצאה של חישוב $S_y(f)$ ע"י Welch periodogram.

(ז) יש לחשב קרוס-קורלציה בין אות כניסה לאות מוצא, $R_{xy}[k]$. האם התוצאה מבוססת חישוב ישיר מתוך $x[n], y[n]$ תואמת את התוצאה של החישוב המבוסס על הנוסחא $R_x[k] * h[n]$?

(ח) נתונות זוג מסנני BPF במקביל (יש לתכנן מסנן נוסף בדומה לסעיף ב'). מוצא המערכת השניה יסומן ב- $z[n]$. יש לחשב קרוס-קורלציה בין אות כניסה לאות מוצא, $R_{yz}[k]$. האם התוצאה מבוססת חישוב ישיר מתוך $y[n], z[n]$ תואמת את התוצאה של החישוב המבוסס על הנוסחא $R_x[k] * h_1[-n] * h_2[n]$ (משוואה (9.17א)?

פרק 12

מסנן מתואם

מטרה: גילוי מייטבי של האותות בעלי צורה ידועה בתוך הרעש (גאוס).

תוכן הפרק

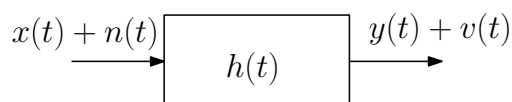
156	12.1 הגדרת הבעיה
157	12.2 פיתוח המסנן
157	12.2.1 ניתוח יחס אות לרעש
158	12.2.2 ביטוי למסנן
159	12.3 רעש לבן גאוס
162	12.4 סיכום
163	12.5 שאלות

12.1 הגדרת הבעיה

נתונה מערכת LTI בעלת סכום כניסות הבאות (איור 12.1):

□ $x(t)$ - אות בעל צורה ידועה

□ $n(t)$ - רעש בעל $S_n(F)$ ידועה.



איור 12.1: מערכת LTI עם אות + רעש בכניסה ובמוצא, בהתאם.

ניתן לנתח את המערכת ע"י סופר-פוזיציה של אות ורעש. הספקי מוצא:

□ הספק הרעש □ הספק ממוצע של הרעש נתון ע"י

$$(12.1) \quad P_v = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(F)|^2 dF.$$

הספק האות $\square$ הספק האות בזמן הנתון $t = t_0$ הוא

$$(12.2) \quad P_{y_0} = y^2(t_0).$$

מטרה: למצוא מערכת $h(t)$ בעלת יחס אות לרעש מקסימלי

$$(12.3) \quad \max_{h(t)} SNR = \frac{P_y}{P_v} \bigg|_{t=t_0} = \frac{P_{y_0}}{P_v}.$$

בזמן $t = t_0$. המערכת הזאת תקרא **מסנן מתואם**.

12.2 פיתוח המסנן

מטרה: פיתוח של ביטוי המסנן עבור רעש כלשהו.

12.2.1 ניתוח יחס אות לרעש

חישוב הספק האות נעשה במישור התדר. באופן כללי, ניתן לקבל ערך אות מוצא ע"י התמרת פוריה הפוכה, **חישוב ערך האות**

$$(12.4) \quad \begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(F) e^{j2\pi Ft} dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(F)H(F)}_{Y(F)} e^{j2\pi Ft} dF \end{aligned}$$

באופן דומה, הספק הרעש מופיע במשוואה (12.1).

אי-שיוויון Cauchy-Schwarz (הגדרה 12.1):

הצורה האינטגרלית היא

$$(12.5) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) g^*(\theta) d\theta \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\theta)|^2 d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |g(\theta)|^2 d\theta$$

פיתוח המסנן מתבסס על אי-שיוויון Cauchy-Schwarz ובשילוב "טריק" מתמטי להלן

$$(12.6) \quad \begin{aligned} y(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(F) X(F) e^{j2\pi Ft_0} dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(F) \sqrt{S_n(F)} \frac{X(F)}{\sqrt{S_n(F)}} e^{j2\pi Ft_0} dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(F) \sqrt{S_n(F)}}_{f(\theta)} \underbrace{\left[\frac{X^*(F)}{\sqrt{S_n(F)}} e^{-j2\pi Ft_0} \right]^*}_{g(\theta)} dF \end{aligned}$$

שלב הבא הוא הניתוח של הפונקציות $f(\theta), g(\theta)$:

□ עבור $f(\theta)$ התקבל הספק הרעש (משוואה (12.1)),

$$(12.7א) \quad f(\theta) = H(F)\sqrt{S_n(F)}$$

$$(12.7ב) \quad P_v = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(F)|^2 dF$$

□ $g(\theta)$ הוא

$$(12.8א) \quad g(\theta) = \frac{X(F)^*}{\sqrt{S_n(F)}} e^{-j2\pi Ft_0}$$

$$(12.8ב) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} dF$$

□ לסיכום,

$$(12.9) \quad P_{y_0} = y^2(t_0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)g^*(\theta)d\theta \right|^2 \leq P_v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} dF$$

ועל ידי שינוי נושא נוסחא מתקבל

$$(12.10) \quad SNR = \frac{P_{y_0}}{P_v} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} dF$$

SNR מקסימלי מתקבל עבור המקרה שבו אי-שיוויון הופך לשיוויון.

12.2.2 ביטוי למסנן

האי-שיוויון (משוואה (12.5)) הופך לשיוויון (מקסימום של צד שמאל של אי-שיוויון), כאשר מתקיים

$$(12.11) \quad f(\theta) = \alpha g(\theta),$$

כאשר α הוא קבוע שרירותי, ובמקרה שלנו גם ממשי (כי העדפה היא כמובן למסנן ממשי). ע"י הצבה נקבל,

$$(12.12) \quad H(F)\sqrt{S_n(F)} = \alpha \frac{X^*(F)}{\sqrt{S_n(F)}} e^{-j2\pi Ft_0}$$

וע"י שינוי נושא נוסחא נקבל מסנן עבורו יחס אות לרעש הוא מינימלי,

$$(12.13) \quad H(F) = \alpha \frac{X^*(F)}{S_n(F)} e^{-j2\pi Ft_0}.$$

כמובן, התוצאה בלתי תלויה בהכפלה בקבוע α , מאחר והוא מכפיל אות ורעש באותה מידה.

קשר בין אות לרעש (תכונה 12.1): הקשר בין אות לרעש עבור המסנן המתקבל הוא

$$(12.14) \quad y(t) = \frac{1}{\alpha} R_v(t - t_0)$$

ומגיע למקסימום שלנו בנקודת זמן $t = t_0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 R_v(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{S_v(F)\} \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ S_n(F) |H(F)|^2 \right\} \leftarrow (12.13) \text{ משוואה} \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{|\alpha X(F)|^2}{S_n(F)} \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} e^{j2\pi F\tau} dF
 \end{aligned}
 \tag{12.15}$$

מאידך,

$$\begin{aligned}
 y(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(F) X(F) e^{j2\pi F t_0} dF \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} e^{j2\pi F(t-t_0)} dF
 \end{aligned}
 \tag{12.16}$$

12.3 רעש לבן גאוס

מטרה: מקרה פרטי של רעש לבן גאוס הוא גם שימושי וגם נוח יחסית לניתוח.

כאשר הרעש $n(t)$ הוא רעש לבן גאוס בעל צפיפות הספק ספקטראלית $S_n(F) = N_0/2$, המסנן המתקבל הוא

$$H(F) = \frac{\alpha}{N_0/2} X^*(F) e^{-j2\pi F t_0}
 \tag{12.17}$$

מאחר ומדובר בקבוע α שרירות, מציבים $\alpha = N_0/2$.

מסנן מתואם עבור רעש לבן גאוס (הגדרה 12.2):

המסנן נתון ע"י

$$H(F) = X^*(F) e^{-j2\pi F t_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h(t) = x(t_0 - t)
 \tag{12.18}$$

הגדרת המסנן

קשר בין אות בכניסה לאות במצוא (תכונה 12.2): הקשר בין מישור התדר הוא

$$\begin{aligned}
 Y(F) &= X(F) H(F) \\
 &= X(F) X^*(F) e^{-j2\pi F t_0} \\
 &= S_x(F) e^{-j2\pi F t_0}
 \end{aligned}
 \tag{12.19}$$

הקשר המתקבל במישור הזמן

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{Y(F)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(F) e^{j2\pi Ft} dF \\
 (12.20) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F) e^{j2\pi F(t-t_0)} dF = R_x(t-t_0) \\
 &\text{והוא בעל ערך מקסימלי עבור } y(t_0) = R_x(0) = P_x
 \end{aligned}$$

יחס אות לרעש (תכונה 12.3): יחס אות לרעש הוא

$$\begin{aligned}
 (12.21) \quad SNR &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{2}{N_0} E_x, \\
 &\text{כאשר } E_x \text{ זוהי האנרגיה של האות } x(t).
 \end{aligned}$$

ביצועים

דוגמה 12.1: נתון פולס ברוחב T :

$$(12.22) \quad x(t) = u(t) - u(t-T) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases},$$

כאשר $u(t)$ זה פונקציית מדרגה. יש לנתח את המסנן המתואם המתקבל והביצועים שלו עבור רעש לבן גאוס.

פתרון: $\square$ מסנן המתואם עבור t_0 שרירותי נתון ע"י

$$\begin{aligned}
 (12.23) \quad h(t) &= x(t_0 - t) \\
 &= u(t_0 - t) - u(t_0 - t - T) = \begin{cases} 1 & t_0 - T \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\square$ המוצא של המערכת עבור אות ורעש הוא

$$\begin{aligned}
 y(t) + v(t) &= h(t) * [x(t) + n(t)] \\
 (12.24) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) [x(s) + n(s)] ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s+t_0-t) [x(s) + n(s)] ds \\
 (12.24) \quad &= \underbrace{\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x(s) ds}_{\text{signal } y(t)} + \underbrace{\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} n(s) ds}_{\text{noise } v(t)}
 \end{aligned}$$

כאשר $h(t-s)$ ניתן לרשום בצורה

$$\begin{aligned}
 h(t-s) &= x(t_0 - (t-s)) \\
 &= x(s+t_0-t)
 \end{aligned}$$

יצוג ע"י מערכת

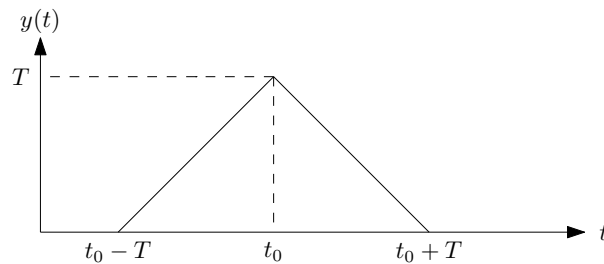
$$\begin{aligned}
 &= u(s + t_0 - t) - u(s + t_0 - t - T) \\
 (12.25) \quad &= u(s - (t - t_0)) - u(s - (t - t_0 + T))
 \end{aligned}$$

בעצם מדובר באינטגרטור מהצורה

$$x(t) + n(t) \rightarrow \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} \rightarrow z(t) = y(t) + v(t)$$

□ אות המוצא הוא

$$(12.26) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s + t_0 - t)x(s)ds$$



עבור $t = t_0$, מתקבל

$$(12.27) \quad y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(s)ds = E_x = T.$$

□ תוחלת של הרעש היא

ניתוח הרעש

$$(12.28) \quad E[v(t)] = E \left[\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} n(s)ds \right] = \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} E[n(s)]ds = 0$$

וההספק הוא

$$\begin{aligned}
 P_v &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(F) |H(F)|^2 dF \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 dF = \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t_0 - t)|^2 dt = \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{t_0-T}^{t_0} dt = \\
 (12.29) \quad &= \frac{N_0}{2} T = \frac{N_0}{2} E_x
 \end{aligned}$$

כצפוי, הספק הרעש בלתי תלוי ב- t_0 .

□ יחס אות לרעש המתקבל עפ משוואה (12.21) הוא

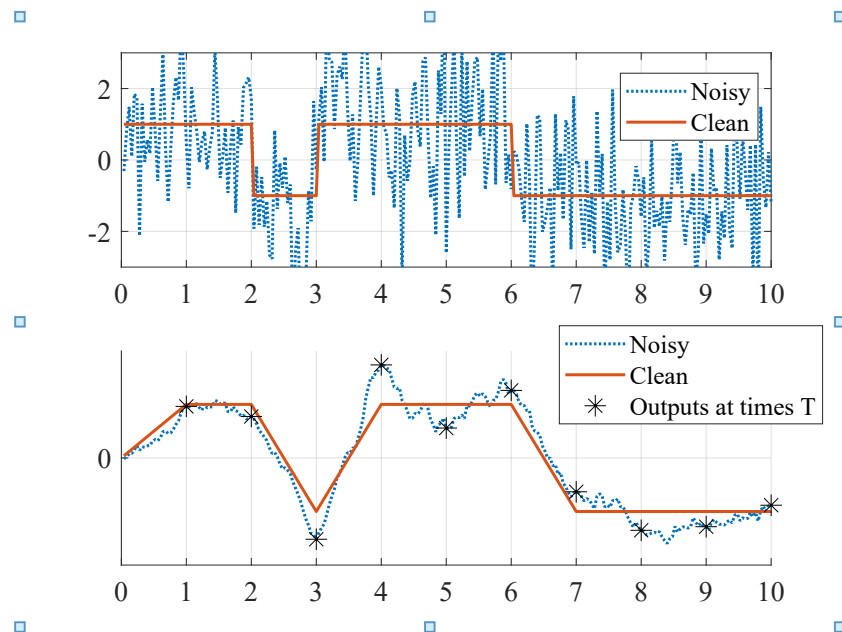
$$(12.30) \quad SNR = \frac{y^2(t_0)}{P_v} = \frac{2}{N_0} E_x = \frac{2}{N_0} T$$

הערת סיכום, $T \uparrow \Rightarrow SNR \uparrow$

זמן בדיד (תכונה 12.4): הפיתוח מסנן מתואם בזמן בדיד הוא דומה למאוד לזמן רציף, כאשר המסנן המתקבל הוא

$$(12.31) \quad h[n] = x[n_0 - n]$$

דוגמה 12.2: נתון רצף פולסים חיוביים/שליליים ברוחב קבוע. מוצא המסנן המתואם באיור 12.2.



איור 12.2: דוגמה 12.2.

12.4 סיכום

מסנן מתואם הוא בעל תכונות הבאות:

□ סיבתי, $h(t) = 0, t < 0$

□ עבור רעש לבן גאוס, המסנן הוא

$$(12.32) \quad H(F) = X^*(F) e^{-j2\pi F t_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h(t) = x(t_0 - t)$$

עם

$$(12.33) \quad SNR = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF = \frac{2E_x}{N_0}$$

□ בד"כ קל מאוד למימוש.

□ המסנן "מחזק" אמפליטודות גבוהות יחסית, "ומחליש" אמפליטודות נמוכות.

12.5 שאלות

12.1 נתון אות דטרמיניסטי

$$x(t) = u(t) [\exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha\beta t)]$$

כאשר קבועים $\alpha, \beta > 0$ ו- $u(t)$ הוא אות מדרגה.
 לאות נוסף רעש לבן גאوسی בעל צפיפות הספק ספקטראלית $S_n(F) = N_0/2$.

(א) מהו מסנן המתואם עבור האות, $h(t)$?(ב) מהו הספק האות במוצא המסנן בזמן t_0 ?

(ג) מהו הספק הרעש במוצא המסנן? מהו SNR המתקבל?

פרק 13

שיערוך PSD

מטרה: שיטות מעשיות לשיערוך של PSD.

תוכן הפרק

164	13.1 הקדמה
165	Periodogram 13.2
166	Modified Periodogram 13.3
167	Bartlet-Welch Periodogram 13.4
168	שאלות 13.5

13.1 הקדמה

נתונות N דגימות של אות אקראי WSS, $x[n]$.

אותות דטרמיניסטיים - אוטו-קורלציה ו-PSD בזמן רציף (הגדרה 13.1):

עבור אותות לא אקראיים הקשרים הם:

(13.1) $R_x(t) = x(t) * x(-t)$

(13.2) $S_x(F) = X(F)X^*(F) = |X(F)|^2$

המקבילה המתבקשת בזמן בדיד ע"י התמרת DTFT (עד כדי הכפלה בקבוע $1/N$) היא

(13.3) $R_x[n] = x[n] * x[-n]$
 $S_x(f) = \left| \text{DTFT} \{x[n]\} \right|^2 = \text{DTFT} \{R_x[n]\}$
 $= |X(f)|^2 = \left| \sum_0^{N-1} x[n]e^{j2\pi fn} \right|^2$

Periodogram 13.2

Periodogram (הגדרה 13.2):

השיטה הבסיסית מבוססת הנוסחאות להלן נקראת periodogram

$$(13.4) \quad I(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2$$

המקבילה המתבקשת בתדר בדיד, שהיא התמרת DFT עם ריפוד באפסים ע"פ הצורך, המשמשת לחישוב בפועל היא

$$(13.5) \quad S_x[k] = \frac{1}{N} \left| \text{DFT} \{x[n]\} \right|^2 = \frac{1}{N} |X[k]|^2$$

הציפייה היא לבצע התמרת DFT לאות, לעלות אותו בריבוע ולקבל PSD.

מימוש ב-Matlab ע"י פקודה periodogram. החישוב ע"י הפקודה מבוסס בד"כ על תחום תדרים $\omega \in [0, \pi]$, $f \in [0, 1/2]$

ההצגת תדר של Matlab היא מנורמלת בין 0 ל-1, כאשר ציר התדר הוא $\frac{\omega}{\pi} = 2f$

דוגמה 13.1: נתון רעש לבן גאוסני בעל שונות $\sigma^2 = 1$. המטרה היא לבדוק תוצאת השיטה עבור מספר דגימות N שונה, כאשר "הציפייה" היא לשיפור התוצאות עם הגדלת N . דוגמה לקוד עבור הסימולציה הוא:

```
x = randn(1,128); % 128 samples of white Gaussian noise
periodogram(x) % plot periodogram
```

□ התוצאה תאורטית היא $S_x(f) = 1$

□ התוצאה בפועל עבור ערכי N שונים מוצגת באיור 13.1. רק תדרים חיוביים מוצגים בגלל תכונה הסימטריה של PSD (משוואה (6.52)).

□ לסיכום הדוגמה, התוצאה של השיטה לא משתפרת עם הגדלת N .

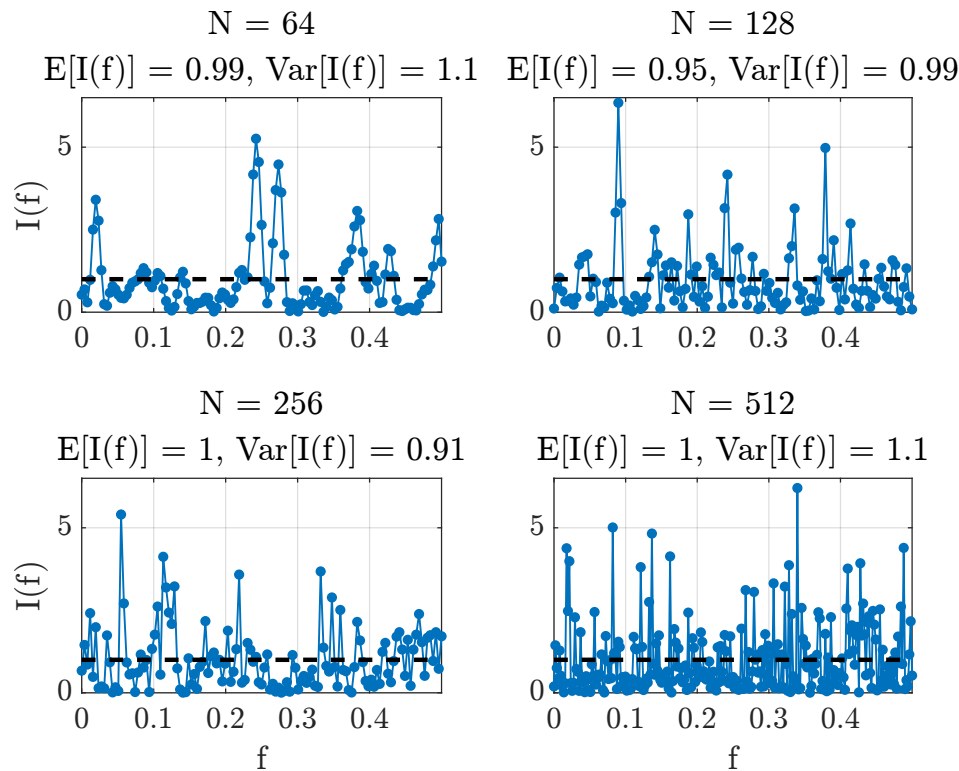
ביצועים של periodogram (תכונה 13.1): ניתן להראות, שהביצועים הם:

□ ממוצע מתכנס לערך "אמיתי",

$$(13.6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[I(f)] = S_x(f)$$

□ שונות נשארת גבוהה מאוד באופן בלתי תלוי ב- N ,

$$(13.7) \quad \text{Var}[I(f)] \approx S_x^2(f)$$



איור 13.1: דוגמה לחישוב PSD של רעש לבן גאוסני בשיטת periodogram.

Modified Periodogram 13.3

השיטה משפרת את התוצאה של השיטה הקודמת ע"י הוספת הכפלה בחלון באור מתאים, כגון חלון Hann.

Modified Periodogram (הגדרה 13.3):

$$(13.8) \quad I(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2$$

מימוש ב-matlab ע"י פקודה periodogram תוך ציון ערכי החלון באופן מפורש.

דוגמה 13.2: הדוגמה מבוססת קשר

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2.$$

עבור רעש לבן גאוסני בכניסה, PSD במוצא (לפחות באופן תאורטי) אמור להיות מושפע ע"י תגובת אמפליטודה של המערכת.

באיור 13.2 מוצגת דוגמה להשוואה בין השיטות לחישוב PSD עבור צורות הספק שונות, עבור זוג מערכות (היסטורית משמשות לבדיקת השיטות בתחום):

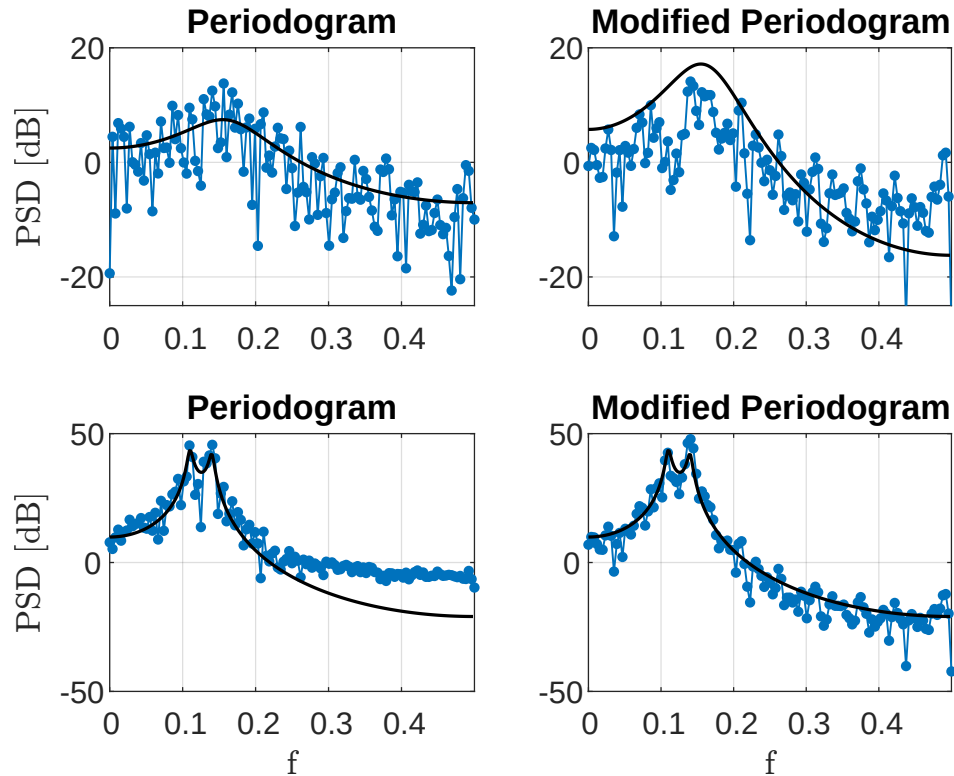
$$\begin{aligned}
 x[n] &= 0.75x[n-1] - 0.5x[n-2] + w[n] \\
 x[n] &= 2.7607x[n-1] - 3.8106x[n-2] + 2.6535x[n-3] \\
 &\quad - 0.9238x[n-4] + w[n]
 \end{aligned}$$

דוגמה לקוד עבור הסימולציה הוא:

```

N = 256; % number of samples
x = randn(1,N); % white Gaussian noise
a = [1 -0.75 0.5]; % filter coefficients
y = filter(1,a,x); % filtering of x
win = hann(N); % Hanning window
periodogram(y,win) % plots modified periodogram

```



איור 13.2: דוגמה לחישוב PSD בשיטת modified periodogram. מספר דגימות עבור כל הגרפים הוא $N = 256$. השיטה תמודדת קצת יותר טוב עם טווח דינמי משמעותי, אבל עדיין ביצועים לא ממש טובים.

סיכום השיטה:

□ התמודדות טובה יותר עם שינויים מהירים ב-PSD.

□ התוצאה עדיין מאוד "רועשת".

Bartlet-Welch Periodogram 13.4

Bartlet-Welch Periodogram (הגדרה 13.4):

השיטה היא:

□ לחלק את האות המקורי ל- M מקטעים שווים באורך L כל אחד. מקובל, שמקטעים יכולים להיות חופפים עד 50% ביניהם.

□ עבור כל מקטע מחושב $I_m(f)$, $m = 1, \dots, M$ בשיטת modified periodogram.

□ חישוב ממוצע,

$$(13.9) \quad S_x(f) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m(f)$$

ביצועים של periodogram (תכונה 13.2): ניתן להראות, ששונות קטנה ביחס ישיר למספר מקטעים,

$$(13.10) \quad \text{Var}[I(f)] \approx \frac{1}{M} S_x^2(f)$$

מאידך, מקטעים קצרים מדי פוגעים בביצועים, כמתואר בדוגמה 13.3.

מימוש השיטה ב-matlab ע"י פקודה pwelch. הגדרות ברירת מחדל:

□ חלוקה של האות לכ-8 מקטעים.

□ חפיפה של 50% בין המקטעים.

□ חלון Hamming.

דוגמה 13.3: חזרה על הדוגמה 13.2 עבור השיטה עם ערכי מקטעים שונים באיור 13.3. לאורך המקטע/מספר מקטעים וסוג החלון השפעה משמעותית על הביצועים.

```
N = 2000;           % number of samples
x = randn(1,N);     % white Gaussian noise
a = [1 -0.75 0.5];  % filter coefficients
y = filter(1,a,x);  % filtering of x
win = hann(250);    % Hanning window of length 250
pwelch(y,win)       % plots modified periodogram
```

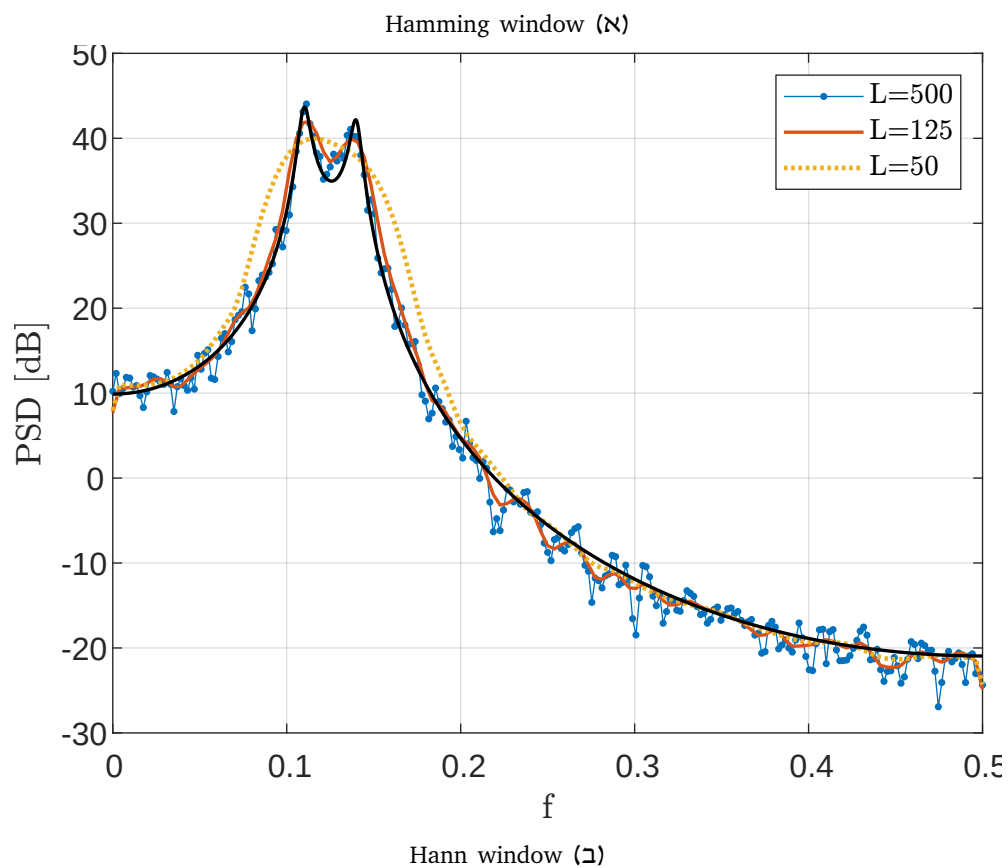
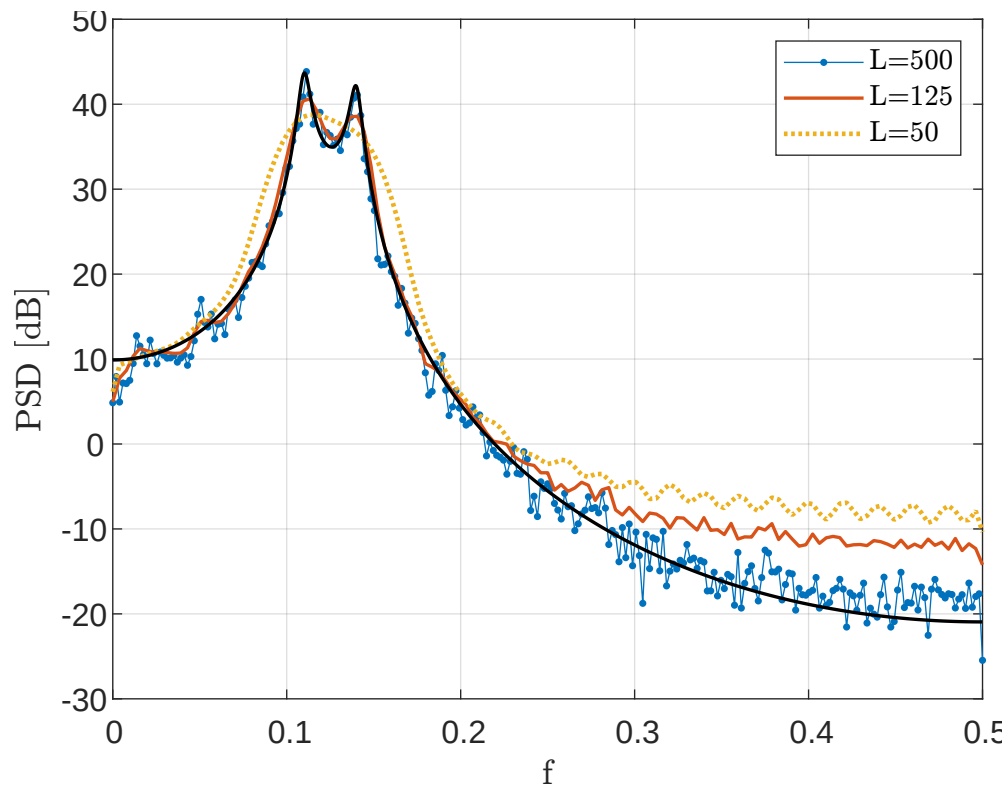
לסיכום, זוהי השיטה המועדפת/מומלצת עבור אותות WSS ארוכים "מספיק" בזמן. רצוי להשתמש בחלון Hann במקום חלון Hamming שהוא ברירת מחדל של הפקודה של Matlab.

13.5 שאלות

13.1 (סימולציה) רעש גאוזי אקראי הועבר דרך מסנן ספרתי מסוג LPF המוגדר ע"י הפקודה

```
f = designfilt('lowpassiir', 'PassbandFrequency', .32, ...
    'StopbandFrequency', .34, 'PassbandRipple', 1, ...
    'StopbandAttenuation', 70, 'DesignMethod', 'ellip');
```

יש לבצע סימולציה ולבחון את התוצאה ע"י Welch periodogram.



איור 13.3: דוגמה לחישוב PSD בשיטת Bartlett-Welch periodogram מתוך האות באורך $N = 2000$. אורך מקטע קטן יותר (יותר מקטעים) מאפשר גרף חלק יותר, אבל ההמוצע לא מתכנס לערכים "אמיתיים".

נספח א'

פתרונות לשאלות

פתרון השאלה 1.1 הדרכה: יש להציב $Y = aX + b$ בתוך משוואה (1.17).

פתרון השאלה 1.2

$$\begin{aligned} p[k \geq 4] &= 1 - p[k < 4] \\ &= 1 - (p[k = 1] + p[k = 2] + p[k = 3]) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{56} \end{aligned}$$

פתרון השאלה 1.3 יש לספור את מספר התוצאות המתקבלות עבור כל אחת מתוצאות האפשרויות של ניסוי אקראי, ולנרמל ע"י סה"כ הניסויים.

```
N = 1e6; % number of random experiments
x = randi(6,[1 N]);
y = randi(6,[1 N]);
z = x + y;
empirical_cdf = sum(z == (1:12)',2)/N
bar(empirical_cdf)
```

פתרון השאלה 1.4 תוצאות של זריקות מטבע מתפלג בינומית, כאשר מספר הצלחות k שווה למספר זריקות n ,

$$X \sim \text{Bin}(n, 1/2) \Rightarrow p = p_X[k = n] = \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

דרך א': תוצאה של חזרה על הניסוי מתפלג בינומית, כאשר סיכוי לרצף אחדות בכל ניסוי הוא p מהסעיף הקודם. אחרי N ניסויים, סיכוי להצלחה אחת או יותר הוא

$$Y \sim \text{Bin}(N, p) \Rightarrow p_2 = 1 - \underbrace{P_y[0]}_{\text{סיכוי ל-0 הצלחות}} = 1 - (1-p)^N = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^N$$

בדרך ב': סיכוי לתוצאת ניסוי בודדת ללא רצף של n אחדות $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 סיכוי ל- N תוצאות ניסוי ללא רצף אחדות $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^N$. כמובן, תשובה סופית זהה.

$$p_2 = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)^{2^{10}} = 0.632$$

פתרון השאלה 1.5

$$X \sim \text{Bin}(n = 10^3, p = 10^{-3}), \quad p_X[0] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \approx 0.37$$

$$X \sim \text{Bin}(n = 10^3, p = 10^{-3}), \quad p_X[1] = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \approx 0.37$$

$$X \sim \text{Bin}(n = 10^3, p = 10^{-3}), \quad p(X \geq 3) = 1 - F_X[2] = 1 - p_X[0] - p_X[1] - p_X[2] \approx 0.08$$

פתרון השאלה 1.6 (א, ו)

פתרון השאלה 1.7

$$X \sim \text{Geo}\left(p = \frac{1}{36}\right)$$

$$F_X(9) = 1 - (1-p)^9$$

$$\Pr(X \geq 10) = 1 - \Pr(X \leq 9) = 1 - F_X(9)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{36}\right)^9 = \left(\frac{35}{36}\right)^9$$

$$= \frac{78815638671875}{101559956668416} \approx 0.776$$

דרך נוספת, ע"י חישוב סיכוי של 0 'הצלחות' מתוך 9,

$$X \sim \text{Bin}\left(9, \frac{1}{36}\right)$$

$$p_X[0] = \binom{9}{0} p^0 (1-p)^9 = \left(\frac{35}{36}\right)^9$$

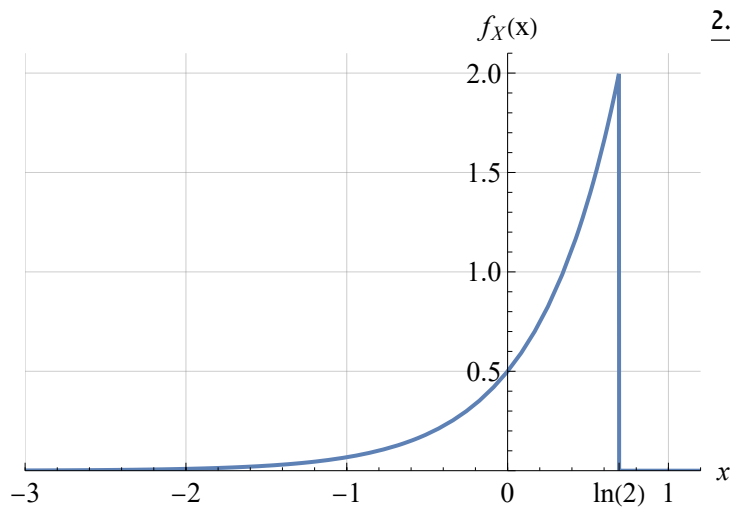
סעיפים ב', ג'

$$X \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{36}\right)$$

$$p_X[0] = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{10} \approx 0.754493$$

$$\begin{aligned}
 \Pr(X \geq 1) &= 1 - F_X(0) = 1 - p_X[0] \\
 &= 1 - (1 - p)^n \\
 &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \approx 0.2455
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_X[1] &= \binom{10}{1} p^1 (1 - p)^{n-1} = 10 \left(\frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right)^9 \\
 &= \frac{10}{36} \left(\frac{35}{36}\right)^9 \approx 0.21557
 \end{aligned}$$



איור 2.9: גרף של $f_X(x)$ עבור השאלה 2.1.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1 \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\ln(a)} \frac{1}{2} e^{2x} dx &= \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_{-\infty}^{\ln(a)} = \frac{1}{4} a^2 = 1 \Rightarrow |a| = 2
 \end{aligned}$$

הערה: a לא יכול להיות שלילי, בגלל $\ln(a)$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{2x} dx = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{2x} & x < \ln(2) \\ 1 & x > \ln(2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{\ln(2)} x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{8} e^{2x} [2x - 1] \Big|_{-\infty}^{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \underbrace{e^{2\ln(2)}}_4 [2\ln(2) - 1] \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0.193147
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\ln(2)} x^2 e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2^2} + \frac{2}{2^3} \right] \Big|_{-\infty}^{\ln(2)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 4 \left[\frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} \right] \\
&= \ln^2(2) - \ln(2) + \frac{1}{2} \approx 0.287306
\end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X < 0) &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$F_X(x_0) = 1 - F_X(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x_0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} e^{2x_0} \Rightarrow e^{2x_0} = 2 \Rightarrow 2x_0 = \ln(2)$$

$$x_0 = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.34657359$$

$$\Pr(0 < X < 1) = 1 - \Pr(X < 0) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 f_X(x) dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{4} (2^2 - 1) \\
&= \frac{n}{N}
\end{aligned}$$

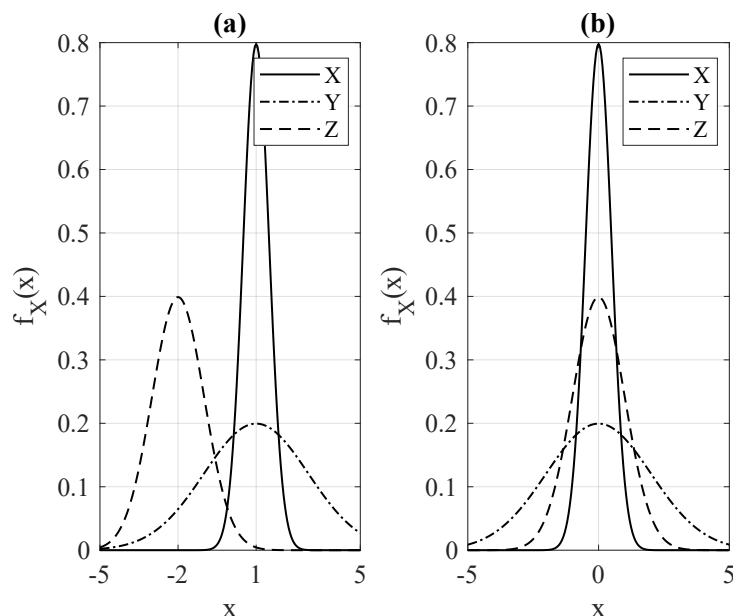
$$n = N \cdot \Pr(0 < X < 1) = 100,000 \cdot \frac{3}{4} = 75,000$$

$$\hat{f}_X(0.5) = \frac{n}{N} \frac{1}{\Delta x} = \Pr(0 < X < 1) \frac{1}{\Delta x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

$$\mu_X = \mu_Y = 1, \mu_Z = -2 \quad (\text{א})$$

$$\sigma_X < \sigma_Z < \sigma_Y \quad (\text{ב})$$

איור להלן מציג את הפונקציות $f_X(x)$ עבורם בשאלה הוצגו $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx$. באיור (a) הוצגו פונקציות $f_X(x)$ מקורית, ובאיור (b) נעשה נרמול של $\mu_X = \mu_Y = \mu_Z = 0$.



איור 2.10: (a) פונ' PDF, (b) פונ' PDF אחרי הצבה של תוחלת 0.

פתרון השאלה 2.3

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{א})$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] = \text{Var}[X] + E^2[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E[X^4] = \int_0^\infty x^4 f_x(x) dx = \int_0^\infty x^4 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{24}{\lambda^4}$$

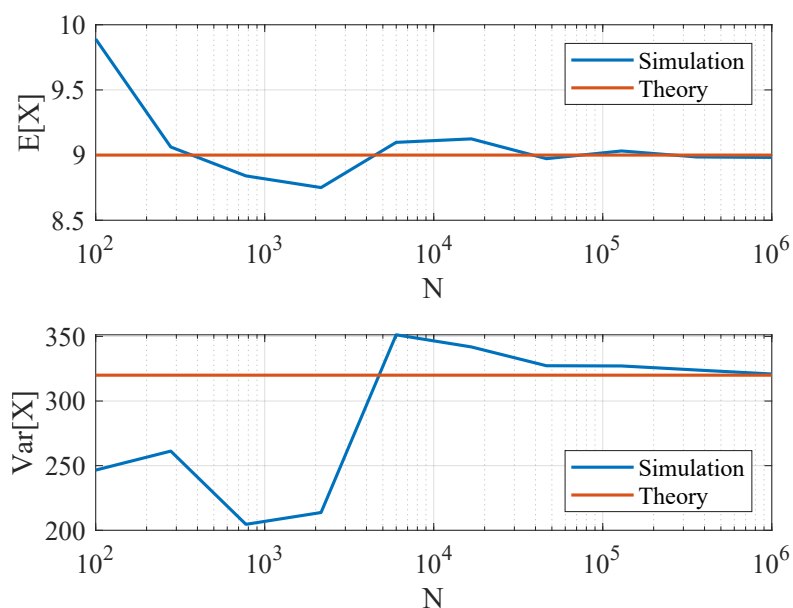
$$E[Y] = E[X^2 + 1] = E[X^2] + 1 = \frac{2}{\lambda^2} + 1$$

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[X^2 + 1] = \text{Var}[X^2] = E[X^4] - E^2[X^2] = \frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4} = \frac{20}{\lambda^4}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (\text{ב})$$

$$E[Y] = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = 9$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{20}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 320$$



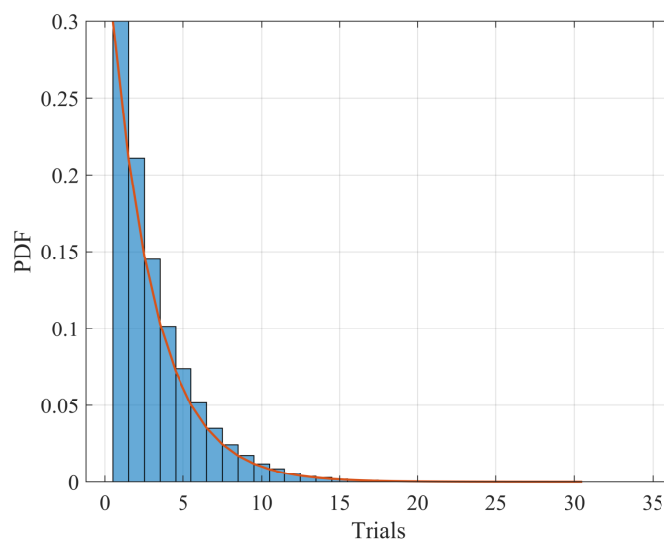
איור 2.11: דוגמה לסימולציה מתקבלת

```
rng(42)
N = 1e6;
x = exprnd(2,[1 N]);
y = x.^2+1;

M = round(logspace(2,6,10));
for k = 1:length(M)
    E(k) = mean(y(1:M(k)));
    V(k) = var(y(1:M(k)));
end
```

(ג) תוחלת והשונות מתחילים להתקרב לערכים תאורטיים עם הגדלת ערך של N . אם זאת, התוצאה נומרית עדיין אינה מדויקת גם עבור $N = 10^6$.

פתרון השאלה 2.4



```

N = 1e6;           % number of random experiments
X = rand(1,N);     % random experiments
p = nnz(X.^(1/4) > 1/2)/N % numerical mean

```

פתרון השאלה 2.5

פתרון השאלה 3.1

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\alpha X + \beta Y] &= E[(\alpha X + \beta Y)^2] - E^2[\alpha X + \beta Y] \\
 &= \alpha^2 \text{Var}[X] + 2\alpha\beta \text{Cov}[X, Y] + \beta^2 \text{Var}[Y] \\
 &\begin{cases} \text{Var}[X + 2Y] = \text{Var}[X] + 4\text{Cov}[X, Y] + 4\text{Var}[Y] = 40 \\ \text{Var}[X - 2Y] = \text{Var}[X] - 4\text{Cov}[X, Y] + 4\text{Var}[Y] = 20 \\ \text{Var}[X] = \text{Var}[Y] \end{cases} \\
 \text{Var}[X] &= 6 = \text{Var}[Y] \\
 \text{Cov}[X, Y] &= \frac{20}{8} = 2.5 \\
 C_{XY} &= \begin{bmatrix} \text{Var}[X] & \text{Cov}[X, Y] \\ \text{Cov}[X, Y] & \text{Var}[Y] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

פתרון השאלה 3.2 נרשום את התרגיל בצורה של טבלה,

x_k	y_j	$p_{XY}[x_k, y_j]$
-1	0	1/3
-1	-1	1/6
0	-1	1/3
1	1	1/6

תחילה נחשב את הפילוגים השוליים,

$$p_X[x] = \sum_y p_{XY}[x,y] = \begin{cases} p[X=0] = \frac{1}{3} \\ p[X=-1] = \frac{1}{2} \\ p[X=1] = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$p_Y[y] = \sum_x p_{XY}[x,y] = \begin{cases} p[Y=0] = \frac{1}{3} \\ p[Y=-1] = \frac{1}{2} \\ p[Y=1] = \frac{1}{6} \end{cases}$$

נשים לב שהפילוגים של X ו- Y זהים ולכן גם התוחלות והשונות. אם כך, התוחלות של X ו- Y ,

$$E[X] = E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[Y] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

השונות המשותפת של X ו- Y הינה,

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= \sum_{x,y} xyp_{X,Y}[x,y] - E[X]E[Y]$$

$$= 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

לסיכום, מקדם הקורלציה,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}}} = \frac{2}{5}$$

פתרון השאלה 3.3

$$E[X_i] = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}[X_i] = \frac{1}{12}$$

$$E[Y] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n] = \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
E[Z] &= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = \frac{n}{2} \\
E[X_i^2] &= \text{Var}[X_i] + E^2[X_i] = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \\
\text{Var}[Y] &= E[Y^2] - E^2[Y] \\
&= E[X_1^2] \cdot E[X_2^2] \cdot \dots \cdot E[X_n^2] - (E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n])^2 \\
&= \prod_{i=1}^n E[X_i^2] - \left(\prod_{i=1}^n E[X_i]\right)^2 = \frac{1}{3^n} - \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \\
\text{Var}[Z] &= \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n] = \frac{n}{12} \quad \leftarrow (3.33) \text{ משוואה}
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 3.4 ניתן להראות, שמדובר במשתנים חסרי קורלציה, כלהלן:

$$\begin{aligned}
f_{XY}(x, y) &= f_X(x)f_Y(y) = \left[\exp\left(-\frac{4x}{2}\right) u(x) \right] \left[\exp\left(-\frac{y}{2}\right) u(y) \right] \\
&\Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0
\end{aligned}$$

כמובן, חישוב לפי הגדרה יביא לתוצאה זהה,

$$\begin{aligned}
E[g(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \\
\text{Cov}[X, Y] &= \underbrace{E[XY]}_{g=xy} - \underbrace{E[X]}_{g=x} E[Y] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 3.5

$$\begin{aligned}
E[Y] &= -6E[X] + 22 = 4 \\
\text{Var}[Y] &= \text{Var}[-6X + 22] = 6^2 \text{Var}[X] = 72 \\
E[X^2] &= \text{Var}[X] + E^2[X] = 11 \\
E[XY] &= E[-6X^2 + 22X] = -6E[X^2] + 22E[X] \\
&= -6 \cdot 11 + 22 \cdot 3 = 0 \\
\text{Cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= 0 - 3 \cdot 4 = -12
\end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = -1 \quad \text{קשר לינארי}$$

$$p(X_1 + X_2 + X_3 = 1) = p(X_1 = 1) \cdot p(X_2 = 0) \cdot p(X_3 = 0) \quad \text{פתרון השאלה 3.6}$$

$$+ p(X_1 = 0) \cdot p(X_2 = 1) \cdot p(X_3 = 0)$$

$$+ p(X_1 = 0) \cdot p(X_2 = 0) \cdot p(X_3 = 1)$$

$$= p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$$

$$p(X_1 + X_2 + X_3 = 2) = p_1p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2p_3$$

```
N = 1e6;           % number of random experiments
X = rand(1,N);     % random experiments
Y = rand(1,N);     %
p = nnz(X.^(1/3) > Y/2)/N % numerical mean
```

פתרון השאלה 3.7

פתרון השאלה 3.8

$$E[r] = \frac{a+b}{2} = 2$$

$$\text{Var}[r] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$E[r^2] = \underbrace{\frac{b^2 + ab + a^2}{3}}_{\text{משוואה (2.19)}} = \text{Var}[r] + E^2[r] = \frac{13}{3} \approx 4.3333$$

$$E[n] = 0$$

$$E[n^2] = \text{Var}[n] = \sigma^2 = 0.01$$

$$E[X] = E[r] + E[n] = \frac{a+b}{2} + \mu = 2 + 0 = 2$$

$$E[C] = E[2\pi X] = 2\pi E[X] = 4\pi$$

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[r + n] = \text{Var}[r] + \text{Var}[n] \leftarrow \text{בלתי תלויים}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} + \sigma^2 = \frac{1}{3} + 0.01 \approx 0.3433$$

$$\text{Var}[C] = \text{Var}[2\pi X] = 4\pi^2 \text{Var}[X] \approx 1.3733\pi^2 \approx 13.55425671$$

$$= E[C^2] - E^2[C]$$

$$= 4\pi^2 E[X^2] - (4\pi)^2$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \text{Var}[X] + E^2[X] \approx 4.343 \\
&= E[(r+n)^2] \\
&= E[r^2] + 2E[r]E[n] + E[n^2] \\
&= \text{Var}[r] + E^2[r] + \text{Var}[n^2] + E^2[n] \\
&= \frac{1}{3} + 2^2 + 0.01 \approx 4.3433 \\
E[A] &= \pi E[X^2] = \frac{1303}{300}\pi \approx 4.3433\pi \approx 13.644984092
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[Xr] &= E[(r+n)r] \\
&= E[r^2] + E[r]E[n] = E[r^2] = \frac{13}{3} \approx 4.3333 \\
\text{Cov}[X, r] &= E[Xr] - E[X]E[r] \\
&= E[r^2] - (E[r] + E[n])E[r] \\
&= E[r^2] - E^2[r] = \text{Var}[r] = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 3.9

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) f_{\theta}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \left(\frac{1}{2\pi} \right) dx = 0 \\
E[Y] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) f_{\theta}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 0 \\
E[XY] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(x) f_{\theta}(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx = 0 \\
\text{Cov}[X, Y] &= 0 \\
E[X^2] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) f_{\theta}(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2x)) dx \\
&= \frac{1}{2} = E[Y^2] \\
E[X^2 Y^2] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \sin^2(x) f_{\theta}(x) dx = \frac{1}{8} \\
E[X^2 Y^2] &\neq E[X^2] E[Y^2]
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 4.1 מקדמי קורלציה הם:

(a) -0.98902 , (b) 0.99683 , (c) 0.81416 , (d) -0.94313

פתרון השאלה 4.2

1. רשמו ביטויים ל- C ו- A .

כאמור,

$$C = 2X + 2Y$$

$$A = XY$$

2. חשבו את הקווריאנס בין C ל- A .

נזכיר שפונקציית צפיפות הפילוג של מ"א X בעל פילוג אחיד רציף בקטע $[a, b]$ (כלומר, $X \sim U[a, b]$) מוגדרת באופן הבא,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot u(b-x) \cdot u(x-a)$$

בנוסף, כיוון ש- X ו- Y הם שני משתנים אקראיים בלתי-תלויים סטטיסטית (בת"ס), אזי הם גם חסרי קורלציה, כלומר,

$$E[XY] = E[X] E[Y]$$

עד כה תזכורות. נעבור לחישובים. נחשב את התוחלת והמומנט השני של X ו- Y . כיוון שהם מתפלגים באופן זהה, מספיק לחשב פעם אחת.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

נעבור לחישוב התוחלות של C ו- A .

$$E[C] = E[2X + 2Y] = 2(E[X] + E[Y]) = 2$$

$$E[A] = E[XY] = E[X] E[Y] = \frac{1}{4}$$

החישובים נובעים מלינאריות התוחלת. כעת, נחשב את הקורלציה בין C ל- A ,

$$\begin{aligned} E[AC] &= E[2X^2Y + 2XY^2] \\ &= 2 \left(E[X^2Y] + E[XY^2] \right) \\ &= 2 \left(E[X^2] E[Y] + E[X] E[Y^2] \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

שוב, מלינאריות התוחלת. לכן, השונות המשותפת בין C ל- A ,

$$\text{Cov}[A, C] = E[AC] - E[A] E[C] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

3. במקרה שלנו,

$$\hat{C} = E[C] + \frac{\text{Cov}[A, C]}{\text{Var}[A]}(a - E[A])$$

בסעיף הקודם חישבנו את כל הגדלים הרלוונטיים מלבד השונות של A . אם כך, השונות של A ,

$$\begin{aligned} \text{Var}[A] &= E[A^2] - E^2[A] \\ &= E[X^2Y^2] - E^2[XY] \\ &= E[X^2] E[Y^2] - E^2[X] E^2[Y] \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144} \end{aligned}$$

לפיכך,

$$\begin{aligned} \hat{C} &= E[C] + \frac{\text{Cov}[A, C]}{\text{Var}[A]}(a - E[A]) \\ &= 2 + \frac{24}{7} \left(a - \frac{1}{4} \right) = \frac{24}{7}a + \frac{8}{7} \end{aligned}$$

כאשר a מתאר את הערכים שהוגרלו מהמ"א A .

4. במקרה שלנו,

$$mse_{min} = E[(C - (m_{opt}A + n_{opt}))^2] = \text{Var}[C] (1 - \rho_{AC}^2)$$

נחשב את השונות של C ,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[C] &= E[C^2] - E^2[C] \\
 &= E\left[(2(X+Y))^2\right] - E[2] 2(X+Y) \\
 &= 4E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - 4\left(E^2[X] + 2E[X]E[Y] + E^2[Y]\right) \\
 &= 4\left(E[X^2] - E^2[X] + E[Y^2] - E^2[Y]\right) \\
 &= 8\left(E[X^2] - E^2[X]\right) \\
 &= 8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

מקדם הקורלציה הינו,

$$\rho_{AC} = \frac{\text{Cov}[A, C]}{\sqrt{\text{Var}[A] \text{Var}[C]}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{7}{144} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0.92582$$

לכן, שגיאה הריבועית הממוצעת המינימלית הינה,

$$mse_{min} = \text{Var}[C] (1 - \rho_{AC}^2) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{42}{49}\right) = \frac{2}{21} \approx 0.09524$$

פתרון השאלה 4.3

$$\begin{aligned}
 mse &= E\left[(Y - \hat{Y})^2\right] = E\left[(Y - aX)^2\right] \\
 &= E\left[Y^2\right] - 2aE[XY] + a^2E\left[X^2\right] \\
 \frac{d}{da}mse &= -2E[XY] + 2aE\left[X^2\right] = 0 \\
 a &= \frac{E[XY]}{E\left[X^2\right]} \\
 E\left[Y - \hat{Y}\right] &= E[Y - aX] \\
 &= E[Y] - \frac{E[XY]}{E\left[X^2\right]}E[X] \\
 mse_{min} &= E\left[Y^2\right] - \frac{E^2[XY]}{E\left[X^2\right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
mse &= E \left[\left(Y - \hat{Y} \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(Y - aX^2 \right)^2 \right] \\
&= E \left[Y^2 \right] - 2aE \left[X^2Y \right] + a^2E \left[X^4 \right] \\
\frac{\partial}{\partial a}mse &= E \left[2(Y - aX^2)(-X^2) \right] = -2E \left[X^2Y \right] + 2aE \left[X^4 \right] \\
\frac{\partial}{\partial a}mse &= 0 \Rightarrow a = \frac{E \left[X^2Y \right]}{E \left[X^4 \right]} \\
mse &= E \left[Y^2 \right] - 2 \frac{E \left[X^2Y \right]}{E \left[X^4 \right]} E \left[X^2Y \right] + \left(\frac{E \left[X^2Y \right]}{E \left[X^4 \right]} \right)^2 E \left[X^4 \right] \\
&= E \left[Y^2 \right] - \frac{E^2 \left[X^2Y \right]}{E \left[X^4 \right]}
\end{aligned}$$

$$E[W_i^n] = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, 2$$

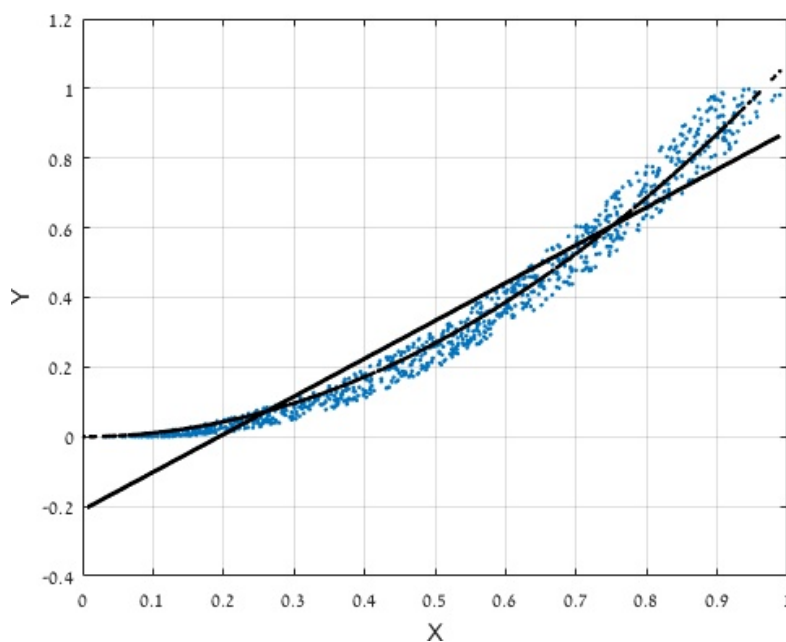
$$\begin{aligned}
E \left[Y^2 \right] &= E \left[W_1^4 \right] = \frac{1}{5} = 0.2 \\
E \left[X^2Y \right] &= E \left[\left(\frac{9}{10}W_1 + \frac{1}{10}W_2 \right) W_1^2 \right] \\
&= \left(\frac{9}{10} \right)^2 E \left[W_1^4 \right] + 2 \frac{9}{10} \frac{1}{10} E \left[W_1^3 \right] E \left[W_2 \right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{10} \right)^2 E \left[W_1^2 \right] E \left[W_2^2 \right] \\
&= \left(\frac{9}{10} \right)^2 \frac{1}{5} + 2 \frac{9}{10} \frac{1}{10} \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \frac{1}{3} \frac{1}{3} \\
&= \frac{3341}{18000} \approx 0.185611 \\
E \left[X^4 \right] &= E \left[\left(\frac{9}{10}W_1 + \frac{1}{10}W_2 \right)^4 \right] \\
&= \left(\frac{9}{10} \right)^4 E \left[W_1^4 \right] \\
&\quad + 4 \left(\frac{9}{10} \right)^3 \left(\frac{1}{10} \right) E \left[W_1^3 \right] E \left[W_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6 \left(\frac{9}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right)^2 E[W_1^2] E[W_2^2] \\
& + 4 \left(\frac{9}{10} \right) \left(\frac{1}{10} \right)^3 E[W_1] E[W_2^3] \\
& + \left(\frac{1}{10} \right)^4 E[W_2^4] \\
& = \left(\frac{9}{10} \right)^4 \frac{1}{5} \\
& \quad + 4 \left(\frac{9}{10} \right)^3 \left(\frac{1}{10} \right) \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\
& \quad + 6 \left(\frac{9}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right)^2 \frac{1}{3} \frac{1}{3} \\
& \quad + 4 \left(\frac{9}{10} \right) \left(\frac{1}{10} \right)^3 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\
& \quad + \left(\frac{1}{10} \right)^4 \frac{1}{5} \\
& = \frac{8677}{50000} \approx 0.17354 \\
mse & = \frac{83111}{56226960} \approx 0.00147813
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X] & = \left(\frac{9}{10} \right)^2 \text{Var}[W_1] + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \text{Var}[W_2] \\
& = \left(\frac{9}{10} \right)^2 \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \frac{1}{12} = \frac{41}{600} \approx 0.0683333 \\
\text{Var}[Y] & = \text{Var}[W_1^2] \\
& = E[W_1^4] - E^2[W_1^2] \\
& = \frac{1}{5} - \frac{1}{3^2} = \frac{4}{45} \approx 0.0888889 \\
\text{Cov}[X, Y] & = E[XY] - E[X]E[Y] \\
& = \frac{9}{10} E[W_1^3] + \frac{1}{10} E[W_1^2] E[W_2] - E[W_1^2] \left(\frac{9}{10} E[W_1] + \frac{1}{10} E[W_2] \right) \\
& = \frac{9}{10} \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \frac{1}{3} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{40} \approx 0.075 \\
mse & = \text{Var}[Y] (1 - \rho_{XY}^2) \\
& = \text{Var}[Y] \left(1 - \left(\frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{97}{14760} \approx 0.00657182$$

חיזוי לינארי מתאים הרבה פחות, ראה גם איור של חיזוי ריבועי להלן.



פתרון השאלה 4.5 רישום נתונים בצורת טבלה:

x_k	y_j	$p_{XY}[x_k, y_j]$
0	0	$1/4$
1	1	$1/4$
2	2	$1/4$
2	3	$1/4$

פתרון:

$$p_X[i] = \begin{cases} \frac{1}{4} & k = 0 \\ \frac{1}{4} & k = 1 \\ \frac{1}{2} & k = 2 \end{cases} \quad p_Y[j] = \begin{cases} \frac{1}{4} & j = 0 \\ \frac{1}{4} & j = 1 \\ \frac{1}{4} & j = 2 \\ \frac{1}{4} & j = 3 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{4} \quad E[Y] = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{9}{4}$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 = \frac{14}{4}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{11}{16}$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[X] = \frac{14}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$E[XY] = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X] E[Y] = \frac{7}{8}$$

$$\hat{Y} = E[Y] + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}x - \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}E[X] = \frac{14}{11}x - \frac{1}{11}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{7}{8}}{\sqrt{\frac{11}{16} \cdot \frac{5}{4}}} = 0.943$$

פתרון השאלה 4.6

$$E[X] = 0$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{5} \left((-2)^2 + (-1)^2 + 0 + 1^2 + 2^2 \right) = 2$$

$$E[Y] = \frac{1}{5} (0 + 0 + 3 + 3 + 4) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \frac{1}{5} \left((0-2)^2 + (0-2)^2 + (3-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2 \right) \\ &= 4 + 4 + 1 + 1 + 4 = \frac{14}{5} = 2.8 \end{aligned}$$

$$E[XY] = \frac{1}{5} (0 + 0 + 0 + 3 + 8) = \frac{11}{5} = 2.2$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] = \frac{11}{5}$$

$$\hat{Y} = 2 + \frac{11}{5} \frac{1}{2}x = 2 + \frac{11}{10} \cdot 1 = 3 \frac{1}{10} = 3.1$$

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{11}{5}}{\sqrt{\frac{14}{5} \cdot 2}} \approx 0.9297$$

$$mse_{min} = \text{Var}[Y] (1 - \rho_{XY}^2) = 0.38$$

```
X = [-2 -1 0 1 2]
Y = [0 0 3 3 4]
Ex = mean(X)
VarX = mean((X-Ex).^2)
Ey = mean(Y)
Exy = mean(X.*Y)
CovXY = Exy - Ex*Ey
VarY = mean((Y-Ey).^2)
rho = CovXY/sqrt(VarX*VarY)
VarY*(1 - rho^2)
```

פתרון השאלה 4.7

$$\begin{aligned} p_X[k] &= \{0.2, 0.1 + 0.2 = 0.3, 0.2 + 0.1 = 0.3, 0.2\} \\ &= 0.2, 0.3, 0.3, 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y[k] &= \{0.1 + 0.2 = 0.3, 0.2 + 0.2 = 0.4, 0.2 + 0.1 = 0.3\} \\ &= 0.3, 0.4, 0.3 \end{aligned}$$

$$E[X] = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 = 2.5$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.2 = 7.3$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = 1.05$$

$$E[Y] = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 = 2$$

$$E[Y^2] = 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.3 = 4.6$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = 0.6$$

$$E[XY] = 1 \cdot 3 \cdot 0.2 + 2 \cdot 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 3 \cdot 0.1 + 3 \cdot 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 1 \cdot 0.2 = 4.3$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.7$$

$$\rho_{XY} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{(E[X^2] - E^2[X])(E[Y^2] - E^2[Y])}} = -\frac{\sqrt{7}}{3} = -0.882$$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= E[Y] + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]} (x - E[X]) \\ &= 1.6667 \end{aligned}$$

פתרון השאלה 4.8

$$p_X[\mathbf{1}] = p_{XY}[\mathbf{1}, 0] + p_{XY}[\mathbf{1}, 1] = p_1 = 0.6$$

$$p_Y[\mathbf{1}] = p_{XY}[0, \mathbf{1}] + p_{XY}[1, \mathbf{1}] = p_2 = 0.8$$

$$b_x = E[X] = p_1 = 0.6$$

$$E[(X - b_x)^2] = \text{Var}[X] = p_1(1 - p_1) = p_1 - p_1^2 = 0.6 - 0.6^2 = 0.24$$

$$b_z = E[Z] = aE[X] + cE[Y] = ap_1 + cp_2$$

$$\begin{aligned} E[(Z - b_z)^2] &= \text{Var}[Z] = a^2\text{Var}[X] + c^2\text{Var}[Y] \\ &= a^2[p_1(1 - p_1)] + c^2[p_2(1 - p_2)] = 0.24a^2 + 0.16c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= p_1 \\
E[X^2] &= \text{Var}[X] + E^2[X] = p_1(1 - p_1) + p_1^2 = p_1 \\
E[XZ] &= E[aX^2 + cXY] \\
&= aE[X^2] + cE[X]E[Y] \\
&= ap_1 + cp_1p_2 \\
&= p_1(a + cp_2) \\
\text{Cov}[X, Z] &= E[XZ] - E[X]E[Z] \\
&= ap_1 + cp_1p_2 - p_1(ap_1 + cp_2) \\
&= ap_1 + cp_1p_2 - ap_1^2 - cp_1p_2 \\
&= a(p_1 - p_1^2) \neq 0 \quad \forall a \neq 0 \\
&= aE[X^2] + cE[X]E[Y] - E[X](aE[X] + cE[Y]) \\
&= a(E[X^2] - E^2[X]) = a\text{Var}[X]
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 5.1 ההוכחה מופיעה בדוגמה 3.11.

$$\begin{aligned}
E[X - Y] &= \mu_1 - \mu_2 \\
\text{Var}[X - Y] &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 5.2

□ משתנים גאוסיים חסרי קורלציה, $\text{Cov}[V, W] = 0$, הם, ורק הם, בלתי תלויים לינארית.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[V, W] &= E[VW] - E[V]E[W] \\
E[V] &= E[X_1 \cos(\theta) + X_2 \sin(\theta)] = E[X_1] \cos(\theta) + E[X_2] \sin(\theta) \\
&= m [\cos(\theta) + \sin(\theta)] \\
E[W] &= E[-X_1 \sin(\theta) + X_2 \cos(\theta)] \\
&= m [\cos(\theta) - \sin(\theta)] \\
E[V]E[W] &= m^2 [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] = m^2 \cos(2\theta) \\
E[VW] &= E[(X_1 \cos(\theta) + X_2 \sin(\theta))(-X_1 \sin(\theta) + X_2 \cos(\theta))] \\
&= -E[X_1^2] \sin(\theta) \cos(\theta) + E[X_2^2] \sin(\theta) \cos(\theta) \leftarrow 0 \\
&\quad + E[X_1 X_2] \cos^2(\theta) - E[X_1 X_2] \sin^2(\theta) \leftarrow \cos(2\theta) \\
&= E[X_1 X_2] \cos(2\theta)
\end{aligned}$$

$$\text{Cov}[V, W] = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

□ קומבינציה לינארית של משתנים גאואסיים היא משתנה גאואסי, לכן התפלגויות השוליות $\mathbf{Y} = [V, W]^T$ הן $V \sim N(m_V, \sigma_V^2), W \sim N(m_W, \sigma_W^2)$ והתפלגות המשותפת של $\mathbf{Y}$ היא $\mathbf{Y} \sim N(\mu_Y, C_Y)$ כאשר

$$\mu_Y = \begin{bmatrix} E[V] \\ E[W] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m [\cos(\theta) + \sin(\theta)] \\ m [\cos(\theta) - \sin(\theta)] \end{bmatrix}$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} \text{Cov}[V, V] & \text{Cov}[V, W] \\ \text{Cov}[W, V] & \text{Cov}[W, W] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}[V] & \text{Cov}[V, W] \\ \text{Cov}[V, W] & \text{Var}[W] \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov}[V, W] = (b - m^2) \cos(2\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[V] &= E[V^2] - E^2[V] \\ &= E[(X_1 \cos(\theta) + X_2 \sin(\theta))^2] - E^2[V] = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[W] &= E[W^2] - E^2[W] \\ &= E[(-X_1 \sin(\theta) + X_2 \cos(\theta))^2] - E^2[W] = \dots \end{aligned}$$

פתרון השאלה 5.3 בהתאם למשוואה (3.17),

$$\Pr(-1 < X < 1, Y < 1) \Leftrightarrow a = -1, b = 1, c = -\infty, d = 1$$

$$\begin{aligned} \Pr(-1 < X < 1, Y < 1) &= \Pr(-1 < X < 1, -\infty < Y < 1) \\ &= F_{XY}(b, d) - F_{XY}(a, d) - F_{XY}(b, c) + F_{XY}(a, c) \\ &= F_{XY}(1, 1) - F_{XY}(-1, 1) - \underbrace{F_{XY}(1, -\infty)}_{=0} + \underbrace{F_{XY}(-1, -\infty)}_{=0} \\ &= F_{XY}(1, 1) - F_{XY}(-1, 1) \end{aligned}$$

$$p(X < 1, -1 < Y) \Leftrightarrow a = -\infty, b = 1, c = -1, d = \infty$$

$$\begin{aligned} p(X < 1, -1 < Y) &= \Pr(-\infty < X < 1, -1 < Y < \infty) \\ &= F_{XY}(1, \infty) - \cancel{F_{XY}(-\infty, \infty)} - F_{XY}(1, -1) + \cancel{F_{XY}(-\infty, -1)} \\ &= F_X(1) - F_{XY}(1, -1) \end{aligned}$$

משום שהסתברות של

$$F_X(-\infty) = \Pr(X \leq -\infty) = 0 \Rightarrow F_{XY}(\cdot, -\infty) = F_{XY}(-\infty, \cdot) = 0$$

פתרון השאלה 5.4

(א) חישוב ע"י סימולציה

```

N = 1e6;      % number of random experiments
X = normrnd(1/2,1/2,200,N); % Each random experiment is 200 numbers
Y = sum(X,1); % sum of 200 random numbers
nnz(find(Y >= 90 & Y<=110))/N % numerical probability

```

$$E[Y] = 200E[X_i] = 100 \quad \text{(ב) חישוב תאורטי}$$

$$\text{Var}[Y] = 200\text{Var}[X_i] = \frac{200}{4} = 50 \quad \leftarrow \text{3.3.1 תכונה}$$

$$p(90 \leq Y) = Q\left(\frac{90 - E[Y]}{\sqrt{\text{Var}[Y]}}\right) = Q\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{50}}\right)$$

$$p(110 \leq Y) = Q\left(\frac{110 - E[Y]}{\sqrt{\text{Var}[Y]}}\right) = Q\left(\frac{110 - 100}{\sqrt{50}}\right)$$

$$p(90 \leq Y \leq 110) = p(90 \leq Y) - p(110 \leq Y)$$

$$= Q\left(\frac{-10}{\sqrt{50}}\right) - Q\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right)$$

$$= 1 - 2Q\left(\frac{10}{\sqrt{50}}\right) \approx 0.8427$$

ולבסוף תשובה מספרית ע"י הקוד: $\text{qfunc}(-10/\text{sqrt}(50)) - \text{qfunc}(10/\text{sqrt}(50))$
 $1 - 2 * \text{qfunc}(10/\text{sqrt}(50))$

פתרון השאלה 5.5

$$E[X_1] = \mu_1 = 0, \quad E[X_2] = \mu_2 = 1, \quad E[X_3] = \mu_3 = 0$$

$$\text{Var}[X_1] = \sigma_1^2 = 1, \quad \text{Var}[X_2] = \sigma_2^2 = 2, \quad \text{Var}[X_3] = \sigma_3^2 = 1$$

$$E[X_1^2] = \text{Var}[X_1] + E^2[X_1] = 1$$

$$E[X_2^2] = \text{Var}[X_2] + E^2[X_2] = 3$$

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{Cov}[X_1, X_2]}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{Cov}[X_1, X_2]}{1 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}[X_1, X_2] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$E[X_1 X_2] = \text{Cov}[X_1, X_2] + E[X_1] E[X_2] = 1$$

$$\hat{X}_2 = E[X_2] + \frac{\text{Cov}[X_1, X_2]}{\text{Var}[X_1]} (x_1 - E[X_1])$$

$$= 1 + x_1$$

$$\begin{aligned}
E[Y_3] &= E[X_1] + 2E[X_2] = 2 \\
E[Y_4] &= 3E[X_1] + 2E[X_2] = 2 \\
\text{Var}[Y_3] &= \text{Var}[X_1] + 2 \cdot 2\text{Cov}[X_1, X_2] + 2^2\text{Var}[X_2] \\
&= 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13 \\
\text{Var}[Y_4] &= 9\text{Var}[X_1] + 4\text{Var}[X_2] + 2 \cdot 3 \cdot 2\text{Cov}[X_1, X_2] = 9 + 8 + 12 = 29 \\
E[Y_3Y_4] &= E[(X_1 + 2X_2)(3X_1 + 2X_2)] \\
&= 3E[X_1^2] + 4E[X_2^2] + 8E[X_1X_2] \\
&= 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 23 \\
\text{Cov}[Y_3, Y_4] &= E[Y_3Y_4] - E[Y_3]E[Y_4] = 23 - 2 \cdot 2 = 19 \\
\hat{Y}_4 &= E[Y_4] + \frac{\text{Cov}[Y_3, Y_4]}{\text{Var}[Y_3]} (y_3 - E[Y_3]) \\
&= 2 - \frac{19}{13}(y_3 - 3) \\
\rho_{Y_3Y_4} &= \frac{19}{\sqrt{13 \cdot 29}} \approx 0.9785
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y_2] &= \text{Var}[-X_1 + 2X_3] = 3 \\
&= \text{Var}[X_1] + 4\text{Var}[X_3] - 2 \cdot 2\text{Cov}[X_1, X_3] = \\
&= \sigma_1^2 + 4\sigma_3^2 - 4\text{Cov}[X_1, X_3] = 3 \\
&= 1 + 4 - 4\text{Cov}[X_1, X_3] = 3 \Rightarrow \text{Cov}[X_1, X_3] \neq 0 \\
\text{Var}[Y_1] &= \text{Var}[X_2 + X_3] = 5 \\
&= \text{Var}[X_2] + \text{Var}[X_3] + 2\text{Cov}[X_2, X_3] = 5 \\
&= 2 + 1 + 2\text{Cov}[X_2, X_3] = 5 \Rightarrow \text{Cov}[X_2, X_3] \neq 0
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 6.1

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)] \quad \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) \\
&= E[A\cos(2\pi t_1 + \theta)A\cos(2\pi t_2 + \theta)] \\
&= \frac{1}{2}E[A^2]E[\cos(2\pi[t_1 - t_2])] + \frac{1}{2}E[A^2]\underbrace{E[\cos(2\pi[t_1 + t_2] + 2\theta)]}_{=0} \\
&= \frac{1}{2}E[A^2]\cos(2\pi[t_1 - t_2]) \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau)
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 6.2

$$E[\mathbf{x}[n]] = E[A] = 0 \quad \square \text{ בהתאם להגדרת WSS}$$

$$R_{\mathbf{x}}[n, n+k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] = E[A^2] = 1$$

לכן, $\mathbf{x}[n]$ הינו WSS.

$$E[\mathbf{y}[n]] = E[(-1)^n A] = (-1)^n E[A] = 0 \quad \square \text{ באופן דומה}$$

$$R_{\mathbf{y}}[n, n+k] = E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] \quad \text{דרך א}$$

$$= E[(-1)^n A (-1)^{n+k} A]$$

$$= (-1)^{2n} (-1)^k E[A^2] = (-1)^k$$

$$R_{\mathbf{y}}[n_1, n_2] = E[\mathbf{y}[n_1]\mathbf{y}[n_2]] = (-1)^{n_1+n_2} E[A^2] = (-1)^{n_1+n_2} \quad \text{דרך ב}$$

$$= (-1)^{n_1+n_2+n_1-n_1} = (-1)^{2n_1+n_2-n_1} = (-1)^{2n_1} (-1)^{n_2-n_1}$$

$$= (-1)^{n_2-n_1}$$

לכן, $\mathbf{y}[n]$ הינו WSS.

$$R_{\mathbf{xy}}[n, n+k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]] = E[A \cdot (-1)^{n+k} A] = (-1)^{n+k} \quad \square$$

לכן, $\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]$ אינם WSS במשותף.

פתרון השאלה 6.3

$$S_{\mathbf{x}}(f) = 1 + \frac{1}{2}e^{j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{x}}[k]e^{-j2\pi f k}$$

$$\Rightarrow R_{\mathbf{x}}[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון השאלה 6.4 כן, לפי

$$E[\mathbf{x}[k]] = E[\mathbf{w}[n]] - \mu = -\mu$$

$$R_{\mathbf{x}}[k] = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]]$$

$$= E[(\mathbf{w}[n] - \mu)(\mathbf{w}[n+k] - \mu)]$$

$$= E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]] - \mu \cancel{E[\mathbf{w}[n]]}^0 - \mu \cancel{E[\mathbf{w}[n+k]]}^0 + \mu^2$$

$$= R_{\mathbf{w}}[k] + \mu^2 = \sigma_w^2 \delta[k] + \mu^2$$

פתרון השאלה 6.5

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(t)] &= E[A]E[\mathbf{w}(t)] = 0 \\ R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) &= E[A^2]R_{\mathbf{w}}(\tau) = \sigma^2\sigma_w^2\delta(\tau) \\ S_{\mathbf{x}}(F) &= \sigma^2\sigma_w^2 \end{aligned}$$

פתרון השאלה 6.6

□ תוחלת משתנה בזמן

□ סטציאונרי

□ שונות משתנה בזמן

□ שונות משתנה בזמן

פתרון השאלה 6.7

$$\begin{aligned} E[a_i] &= 0 \cdot \Pr(a_n = 0) + 1 \cdot \Pr(a_n = 1) = \frac{1}{2} \\ E[a_i^2] &= 0^2 \cdot \Pr(a_n = 0) + 1^2 \cdot \Pr(a_n = 1) = \frac{1}{2} \\ \text{Var}[a_i] &= E[a_i^2] - E^2[a_i] = \frac{1}{4} \\ \sum_n g(t - nT) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \sum_n E[a_n] g(t - nT) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n g(t - nT) = \frac{1}{2} \\ E[x^2(t)] &= \sum_n E[a_n^2] g^2(t - nT) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n g^2(t - nT) = \frac{1}{2} = P_{\mathbf{x}} \\ \text{Var}[x(t)] &= E[x^2(t)] - E^2[x(t)] = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \text{Var}[a_i] \end{aligned}$$

הערה: עבור זמן t מסויים, יש רק פונציה $g(\cdot)$ אחת שונה מאפס.

פתרון השאלה 7.1

$$R_{\mathbf{y}}(t, t + \tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t + \tau)]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[(a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t)) (a_1\mathbf{x}_1(t + \tau) + a_2\mathbf{x}_2(t + \tau))\right] \\
&= a_1^2 R_{\mathbf{x}_1}(\tau) + a_1 a_2 R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(\tau) + a_1 a_2 R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(-\tau) + a_2^2 R_{\mathbf{x}_2}(\tau) = R_{\mathbf{y}}(\tau) \\
R_{\mathbf{z}}(t, t + \tau) &= R_{\mathbf{z}}(\tau) \quad \text{באופן דומה} \\
R_{\mathbf{yz}}(t, t + \tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{z}(t + \tau)] \\
&= E\left[(a_1\mathbf{x}_1(t) + a_2\mathbf{x}_2(t)) (b_1\mathbf{x}_1(t + \tau) + b_2\mathbf{x}_2(t + \tau))\right] \\
&= a_1 b_1 R_{\mathbf{x}_1}(\tau) + a_1 b_2 R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(\tau) + a_2 b_1 R_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(-\tau) + a_2 b_2 R_{\mathbf{x}_2}(\tau) = R_{\mathbf{z}}(\tau)
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 7.2

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{x}(t)] &= E[At^2] = t^2 E[A] = t^2 \frac{1}{2} \\
R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)] = E[At_1^2 At_2^2] = t_1^2 t_2^2 E[A^2] = t_1^2 t_2^2 \int_0^1 x^2 \frac{1}{1-x} dx = t_1^2 t_2^2 \frac{1}{3} \\
E[\mathbf{y}(t)] &= E[A^2 t^2] = t^2 \underbrace{E[A^2]}_{\text{דוגמה 2.5}} = t^2 \int_0^1 x^2 \frac{1}{1-x} dx = \frac{t^2}{3} \\
R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{y}(t_2)] = E[At_1^2 A^2 t_2^2] = t_1^2 t_2^2 E[A^3] = t_1^2 t_2^2 \int_0^1 x^3 \frac{1}{1-x} dx = \frac{t_1^2 t_2^2}{4} \\
C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) &= R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) - E[\mathbf{x}(t_1)]E[\mathbf{y}(t_2)] \\
p(\mathbf{y}(t) > 3 | \mathbf{x}(t) = 2) &= p(A(At^2) > 3 | At^2 = 2) = p(2A > 3) = p(A > 3/2) = 0 \\
E[A^2] &= \text{Var}[A] + E^2[A] = \frac{1}{12} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3} \quad \text{דרך נוספת לחישוב} \\
R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &\neq R_{\mathbf{x}}(\tau) \quad \text{לגבי סטציאונריות,} \\
R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) &\neq R_{\mathbf{xy}}(\tau)
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 7.3

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{v}(t)] &= E[\mathbf{x}(t)] + aE[\mathbf{y}(t)] = 1 + a \\
R_{\mathbf{v}}(t, t + \tau) &= E\left[(\mathbf{x}(t) + a\mathbf{y}(t)) (\mathbf{x}(t + \tau) + a\mathbf{y}(t + \tau))\right] \\
&= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)] + a^2 E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t + \tau)] \\
&\quad + aE[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t + \tau)] + aE[\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}(t)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) + a^2 R_{\mathbf{y}}(t, t + \tau) + a + a \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + a^2 R_{\mathbf{y}}(\tau) + 2a = R_{\mathbf{v}}(\tau) \\
E[\mathbf{w}(t)] &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)] = E[\mathbf{x}(t)]E[\mathbf{y}(t)] = 1 \\
R_{\mathbf{w}}(t, t + \tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t + \tau)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) R_{\mathbf{y}}(t, t + \tau) \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) R_{\mathbf{y}}(\tau) = R_{\mathbf{w}}(\tau) \\
R_{\mathbf{vw}}(t, t + \tau) &= E \left[(\mathbf{x}(t) + a\mathbf{y}(t)) (\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}(t + \tau)) \right] \\
&= E [\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}(t + \tau)] + aE [\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t + \tau)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) E [\mathbf{y}(t + \tau)] + aE [\mathbf{x}(t + \tau)] R_{\mathbf{y}}(\tau) \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + aR_{\mathbf{y}}(\tau) \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + aR_{\mathbf{x}}(\tau) = 0 \Rightarrow a = -1
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 7.4

$$\text{Var}[\mathbf{w}[n]] = C_{\mathbf{w}}[0] = R_{\mathbf{w}}[0] - \mu_{\mathbf{w}}^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = \sigma_{\mathbf{w}}^2$$

(א) בגלל תלות בזמן להלן, $\mathbf{y}[n]$ הוא לא סט', ולכן האותות לא סט' במשותף.

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{y}[n]] &= E[\mathbf{w}[n]] \cos([\omega_0 + \Delta\omega] n) = \frac{1}{2} \cos([\omega_0 + \Delta\omega] n) = \mu_{\mathbf{y}}[n] \\
\text{Var}[\mathbf{y}[n]] &= \cos^2([\omega_0 + \Delta\omega] n) \text{Var}[\mathbf{w}[n]] = \frac{3}{4} \cos^2([\omega_0 + \Delta\omega] n) \quad \leftarrow \text{משוואה (1.18)} \\
&= E[\mathbf{y}^2[n]] - E^2[\mathbf{y}[n]] \\
&= E[\mathbf{w}^2[n]] E[\cos^2([\omega_0 + \Delta\omega] n)] - \frac{1}{4} \cos^2([\omega_0 + \Delta\omega] n)
\end{aligned}$$

(ב) כל אחד מהאותות הוא WSS (דוגמא 6.8), כאשר $\omega_0 \leftrightarrow \omega_0 + \Delta\omega$. מאידך, האותות לא סט' במשותף.

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{y}[n]] &= E[\mathbf{w}[n]] E[\cos([\omega_0 + \Delta\omega] n + \theta)] = \mu_{\mathbf{w}} \cdot 0 \\
&= E[\mathbf{x}[n]] = 0 \quad \leftarrow \text{דוגמא 6.8} \\
\text{Var}[\mathbf{y}[n]] &= E[\mathbf{y}^2[n]] - \underbrace{E^2[\mathbf{y}[n]]}_{=0} \\
&= E[\mathbf{w}^2[n]] E[\cos^2([\omega_0 + \Delta\omega] n + \theta)] \quad \leftarrow \text{נוסחא (3.23)} \\
&= \frac{1}{2} R_{\mathbf{w}}[0] \left(1 + E[\cos(2[\omega_0 + \Delta\omega] n + 2\theta)] \right) = \frac{1}{2} R_{\mathbf{w}}[0] = \frac{1}{2} \\
R_{\mathbf{xy}}[n, n + k] &= E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n + k]] E[\cos(\omega_0 n + \theta) \cos([\omega_0 + \Delta\omega] (n + k) + \theta)] \\
&\neq R_{\mathbf{xy}}[k]
\end{aligned}$$

(ג) בגלל תלות בזמן להלן $\mathbf{y}[n]$ הוא לא סט', ולכן האותות לא סט' במשותף. פתרון מתבסס

על דוגמה 6.8

$$\begin{aligned}
E[y[n]] &= E[\mathbf{w}[n]] E[\cos([\omega_0 + \Delta\omega]n)] = \mu_{\mathbf{w}} E[\cos(\omega_0 n + \Delta\omega n)] \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega_0 n + xn)}_{f_X(x)g(x)} dx \leftarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sin(xn + \omega_0 n)}{n} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(\omega_0 n + n)}{n} - \frac{\sin(\omega_0 n - n)}{n} \right] = \mu_y[n] \\
&= \frac{1}{4n} [\sin((\omega_0 + 1)n) - \sin((\omega_0 - 1)n)] = \frac{1}{2n} \sin(n) \cos(\omega_0 n)
\end{aligned}$$

סימולציה לדוגמה לחישוב של תוחלת:

```

w0 = pi/20; % arbitrary chosen
N = 20; n = 0:N-1;
dw = rand(1,1e4)*2-1;
y = cos((w0+dw').*n);
Ey = mean(y);
plot(n,Ey, '- ', n, 1/2./n.*(sin((w0+1)*n)-sin((w0-1)*n)), 'o')

```

(ד) בגלל תלות בזמן להלן $y[n]$ הוא לא סט', ולכן האותות לא סט' במשותף.

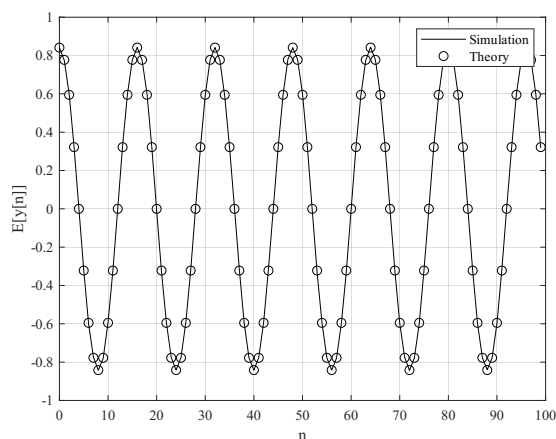
$$\begin{aligned}
E[y[n]] &= E[\cos(\omega_0 n + \mathbf{w}[n])] = \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega_0 n + x)}_{f_X(x)g(x)} dx \\
&= \frac{1}{2} \sin(\omega_0 n + x) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} [\sin(\omega_0 n + 1) - \sin(\omega_0 n - 1)] \\
&= \sin(1) \cos(\omega_0 n) = \mu_y[n]
\end{aligned}$$

סימולציה לדוגמה לחישוב של תוחלת:

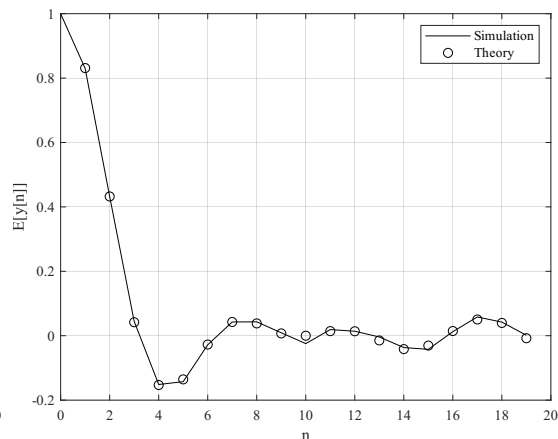
```

w0 = pi/8;
w = rand(100,1e4)*2-1;
n = 0:99;
y = cos(w0*n + w');
Ey = mean(y);
plot(n,Ey, '- ', n, 1/2*sin(w0*n+1)-1/2*sin(w0*n-1), 'o')

```



(ב) סעיף ד'



(א) סעיף ג'

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{x}[n]] &= E[\mathbf{w}[n]] E[\cos(\theta)] \\
&= \mu_{\mathbf{w}} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{1}{\frac{\pi}{10} - \left(-\frac{\pi}{10}\right)} \cos(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\pi} \sin(x) \Big|_{-\pi/10}^{\pi/10} \leftarrow \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.61803 \\
&= \frac{5}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.49182
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{x}} &= E[\mathbf{x}^2[n]] \\
&= E[\mathbf{w}^2[n]] E[\cos^2(\theta)]
\end{aligned}$$

$$E[\mathbf{w}^2[n]] = R_{\mathbf{w}}[0] = 1$$

$$\begin{aligned}
E[\cos^2(\theta)] &= E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[\cos(2\theta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\cos(2\theta)] &= \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{1}{\frac{\pi}{10} - \left(-\frac{\pi}{10}\right)} \cos(2x) dx \\
&= \frac{5}{\pi} \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_{-\pi/10}^{\pi/10} \\
&= \frac{5}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{\pi} \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \approx 0.935489
\end{aligned}$$

$$P_{\mathbf{x}} = E[\cos^2(\theta)] \approx 0.967745$$

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{x}}[n, n+k] &= E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] \\
&= E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]] E[\cos^2(\theta)] \\
&= R_{\mathbf{w}}[k] E[\cos^2(\theta)] = R_{\mathbf{x}}[k]
\end{aligned}$$

$$E[\mathbf{y}[n]] = E[\mathbf{x}[n]]$$

$$P_{\mathbf{y}} = P_{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{y}}[n, n+k] &= E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] \\
&= E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]] E[\cos(\boldsymbol{\theta}[n]) \cos(\boldsymbol{\theta}[n+k])] \\
&= E[\mathbf{w}[n]\mathbf{w}[n+k]] E[\cos(\boldsymbol{\theta}[n])] E[\cos(\boldsymbol{\theta}[n+k])]
\end{aligned}$$

$$= R_{\mathbf{w}}[k]E^2[\cos(\boldsymbol{\theta}[n])] = R_{\mathbf{y}}[k] = R_{\mathbf{x}}[k]$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}[n]] &= E[\mathbf{w}[n]] E[\cos(\omega_0 n + \boldsymbol{\theta}[n])] \\ &= \mu_{\mathbf{w}} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{1}{\frac{\pi}{10} - \left(-\frac{\pi}{10}\right)} \cos(\omega_0 n + x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\pi} \sin(\omega_0 n + x) \Big|_{-\pi/10}^{\pi/10} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\pi} \left[\sin\left(\omega_0 n + \frac{\pi}{10}\right) - \sin\left(\omega_0 n - \frac{\pi}{10}\right) \right] \\ &= \frac{5}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos(\omega_0 n) \end{aligned}$$

פתרון השאלה 8.1

(א) הפתרון הוא ב-3 דרכים אפשריות, בדומה לדוגמאות 6.7, 11.1.

$$\begin{aligned} \text{דרך א} \quad R_{\mathbf{x}}[n, n+k] &= E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] \\ &= E[(\mathbf{w}[n] + \mathbf{w}[n-1])(\mathbf{w}[n+k] + \mathbf{w}[n-1+k])] \\ &= R_{\mathbf{w}}[k] + R_{\mathbf{w}}[k-1] + R_{\mathbf{w}}[k+1] + R_{\mathbf{w}}[k] \\ &= R_{\mathbf{w}}[k-1] + 2R_{\mathbf{w}}[k] + R_{\mathbf{w}}[k+1] \\ &= \delta[k-1] + 2\delta[k] + \delta[k+1] \\ &= \{1, 2, 1\}_{\uparrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}}[n, n+k] &= E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] \\ &= E[(\mathbf{w}[n] - \mathbf{w}[n-1])(\mathbf{w}[n+k] - \mathbf{w}[n-1+k])] \\ &= -R_{\mathbf{w}}[k-1] + 2R_{\mathbf{w}}[k] - R_{\mathbf{w}}[k+1] \\ &= \{-1, 2, -1\}_{\uparrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{דרך ב} \quad h_x[n] &= \{1, 1\} \\ h_y[n] &= \{1, -1\} \\ R_{\mathbf{x}}[k] &= R_{\mathbf{w}}[k] * h_x[n] * h_x[-n] \\ &= \{1\} * \{1, 1\}_{\uparrow} * \{1, 1\}_{\uparrow} = \{1, 2, 1\}_{\uparrow} \\ &= C_{\mathbf{x}}[n, n+k] \\ R_{\mathbf{y}}[k] &= R_{\mathbf{w}}[k] * h_y[n] * h_y[-n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{1\} * \{1, -1\} * \{-1, 1\} = \{-1, 2, -1\} \\
&= C_y[k] \\
\text{דרך ג} \quad H_x(z) &= (1 + z^{-1}) \quad H_x(z) = (1 - z^{-1}) \\
S_x(z) &= S_w(z)H_x(z)H_x(1/z) \\
&= (1 + z^{-1})(1 + z) = z + 2 + z^{-1} = \mathcal{Z}\{R_x[k]\} \\
S_y(z) &= S_w(z)H_y(z)H_y(1/z) \\
&= (1 - z^{-1})(1 - z) = -z + 2 - z^{-1} = \mathcal{Z}\{R_y[k]\}
\end{aligned}$$

$$P_x = P_y = R_x[0] = R_y[0] = 2$$

(ב) הפתרון הוא ב-3 דרכים אפשריות, כלהלן

$$\begin{aligned}
\text{דרך א} \quad R_{xy}[n, n+k] &= E[x[n]y[n+k]] \\
&= E[(w[n] + w[n-1])(w[n+k] - w[n-1+k])] \\
&= R_w[k] - R_w[k-1] + R_w[k+1] - R_w[k] \\
&= -R_w[k-1]R_w[k+1] \\
&= -\delta[k-1] + \delta[k+1] = \{1, 0, -1\} \\
\text{דרך ב} \quad R_{xy}[k] &= R_w[k] * h_x[-n] * h_y[n] \\
&= h_x[-n] * h_y[n] \\
&= \{1, 0, -1\} = C_{xy}[k] \\
\text{דרך ג} \quad S_{xy}(z) &= S_w(z)H_x(1/z)H_y(z) \\
&= z - z^{-1} = \mathcal{Z}\{R_{xy}[k]\}
\end{aligned}$$

$$R_{xy}[k] \neq 0 \quad \forall k$$

$$C_{xy}[k] \neq 0 \quad \forall k$$

בהתאם לתכונה 7.2.1, כמובן מדובר בתהליכים לא אורטוגנליים, לא חסרי קורלציה ולא בלתי תלויים.

(ג) הפתרון הוא בהתאם לפרקים 5.3, 10.1 ותכונה 10.2. יש למוצא וקטור תוחלות μ ומטריצת covariance של שלושת המשתנים אקראיים.

$$C = \begin{bmatrix} \text{Cov}[x[2], x[2]] & \text{Cov}[x[2], x[3]] & \text{Cov}[x[2], y[4]] \\ \text{Cov}[x[3], x[2]] & \text{Cov}[x[3], x[3]] & \text{Cov}[x[3], y[4]] \\ \text{Cov}[y[4], x[2]] & \text{Cov}[y[4], x[3]] & \text{Cov}[y[4], y[4]] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_x[0] & C_x[1] & C_{xy}[2] \\ C_x[1] & C_x[0] & C_{xy}[1] \\ C_{xy}[-2] & C_{xy}[-1] & C_y[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

תזכורת חשובה: תכונה 6.4.3 ותכונה 7.2.1 לגבי סימטריה וחוסר סימטריה.

(ד) המשוואות מתקבלות באופן דומה למה שמופיע במשוואה (8.7).

$$\begin{aligned} mse &= E \left[(y[n] - a_1 x[n] - a_2 x[n-1])^2 \right] \\ \frac{\partial}{\partial a_1} &= E \left[2 (y[n] - a_1 x[n] - a_2 x[n-1]) (-x[n]) \right] \\ &= -2E \left[x[n]y[n] + a_1 x^2[n] + a_2 x[n]x[n-1] \right] \\ &= -2R_{xy}[0] + 2a_1 R_x[0] + 2a_2 R_x[1] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} &= E \left[2 (y[n] - a_1 x[n] - a_2 x[n-1]) (-x[n-1]) \right] \\ &= -2R_{xy}[1] + 2a_1 R_x[1] + 2a_2 R_x[0] = 0 \\ \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{xy}[0] \\ R_{xy}[1] \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

פתרון השאלה 8.2

(א) מדובר בתהליך אקראי גאוסי בעל תוחלת ושונות מוגדרים. חישוב ההסתברות הוא בהתאם.

$$\begin{aligned} x[n] &\sim N \left(\mu_x = E[x[n]] = 0, \sigma_x^2 = \text{Var}[x[n]] = C_x[0] = R_x[0] = 4 \right) \\ p(x[n] < a) &= 1 - Q \left(\frac{a - \mu_x}{\sigma_x} \right) = Q \left(-\frac{a - \mu_x}{\sigma_x} \right) \\ &= 1 - Q \left(\frac{4}{2} \right) = 1 - Q(2) = Q(-2) \approx 0.9772 \end{aligned}$$

(ב) בהתאם להגדרה של מקדם קורלציה בין הדגימות של תהליך WSS

$$\rho = \frac{C_x[3-1]}{C_x[0]} = \frac{R_x[2]}{R_x[0]} = e^{-2}$$

(ג) מדובר בחישוב הספק

$$E[w[n]] = E[x^2[n]] = R_x[0] = P_x = 4$$

(ד) מדובר במערכת FIR, שתמיד יציבה, מהצורה

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = x[n] * \{1, 0, 2\} \\ &= x[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-2]) \end{aligned}$$

לחליפין ניתן להראות שהתנאים בתכונה 6.4.2 מתקיימים (תוחלת קבועה בזמן ואוטו-קורלציה תלויה בהפרש זמנים בלבד).

(ה) מדובר במעבר של תהליך אקראי גאוסי דרך מערכת LTI יציבה, לכן חישוב ההסתברות מתבסס על תכונות של הסתברות גאוסית של $y[n] \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\mu_y = E[y[n]] = \mu_x \sum_m h[m] = 0 \leftarrow (11.3) \text{ משוואה}$$

$$\begin{aligned} R_y[k] &= E[y[n]y[n+k]] \\ &= E[(x[n] + 2x[n-2]) \cdot (x[n+k] + 2x[n-2+k])] \\ &= \underbrace{E[x[n]x[n+k]]}_{R_x[k]} + 2R_x[k-2] + 2R_x[k+2] + 4R_x[k] \\ &= 5R_x[k] + 2R_x[k-2] + 2R_x[k+2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= R_x[k] * h[n] * h[-n] \leftarrow \text{דרך נוספת} \\ &= R_x[k] * \underbrace{(\delta[n] + 2\delta[n-2]) * (\delta[n] + 2\delta[n+2])}_{2\delta[n-2] + 5\delta[n] + 2\delta[n+2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \text{Var}[y[n]] = C_y[0] = R_y[0] \\ &= 5R_x[0] + 2R_x[2] + 2R_x[-2] \\ &= 5R_x[0] + 4R_x[2] = 20 + 16e^{-2} \approx (4.708)^2 \end{aligned}$$

$$p(y[n] < a) = 1 - Q\left(\frac{a - \mu_y}{\sigma_y}\right) = 1 - Q\left(\frac{4}{\sigma_y}\right)$$

$$p(y[n] > a) = Q\left(\frac{a - \mu_y}{\sigma_y}\right) = Q\left(\frac{4}{\sigma_y}\right) \approx 0.1978$$

(ו) בהתאם להגדרה

$$C_y = \begin{bmatrix} \text{Var}[y[1]] & \text{Cov}[y[1], y[3]] \\ \text{Cov}[y[1], y[3]] & \text{Var}[y[3]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[2] \\ R_y[2] & R_y[0] \end{bmatrix}$$

(ז) התהליכים הם סטציאונריים במשותף, בגלל שמדובר במערכת יציבה.

$$R_{xy}[k] = R_x[k] * h[n]$$

$$\begin{aligned}
&= R_{\mathbf{x}}[k] * (\delta[n] + 2\delta[n-2]) \\
&= R_{\mathbf{x}}[k] + R_{\mathbf{x}}[k-2]
\end{aligned}$$

כמובן חישוב לפי הגדרה נותן תוצאה זהה:

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{xy}}[k] &= E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]] \\
&= E[\mathbf{x}[n] (\mathbf{x}[n+k] + 2\mathbf{x}[n-2+k])] \\
&= \underbrace{E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]]}_{R_{\mathbf{x}}[k]} + 2E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n-2+k]] \\
&= R_{\mathbf{x}}[k] + R_{\mathbf{x}}[k-2]
\end{aligned}$$

(ח) המינימום של שגיאה ריבועית ממוצעת מתקבל ע"י

$$\begin{aligned}
mse &= E[(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1])^2] \\
\frac{\partial}{\partial a_0} mse &= 2E[(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1]) \cdot (-\mathbf{y}[n])] \\
&\Rightarrow R_{\mathbf{xy}}[-1] = a_0R_{\mathbf{y}}[0] + a_1R_{\mathbf{y}}[1] \\
\frac{\partial}{\partial a_1} mse &= 2E[(\mathbf{x}[n+1] - a_0\mathbf{y}[n] - a_1\mathbf{y}[n-1]) \cdot (-\mathbf{y}[n-1])] \\
&\Rightarrow R_{\mathbf{xy}}[-2] = a_0R_{\mathbf{y}}[1] + a_1R_{\mathbf{y}}[0]
\end{aligned}$$

הערכים של $R_{\mathbf{xy}}[k]$ מתקבלים מסעיף הקודם. לסיכום

$$\begin{bmatrix} R_{\mathbf{y}}[0] & R_{\mathbf{y}}[1] \\ R_{\mathbf{y}}[1] & R_{\mathbf{y}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{xy}}[-1] \\ R_{\mathbf{xy}}[-2] \end{bmatrix}$$

הפתרון אחרי ההצבה הוא

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2 + 7e^2 + 5e^4}{4e + 16e^3 + 25e^5} \approx 0.0808184 \\
a_1 &= -\frac{2(1 + e^2)}{4 + 16e^2 + 25e^4} \approx -0.0112818
\end{aligned}$$

8.3 פתרון השאלה

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{z}[n]] &= E[\mathbf{x}[n] \cos(\omega_0 n) + \mathbf{y}[n] \sin(\omega_0 n)] = 0 \\
R_{\mathbf{z}}[n, n+k] &= E[(\mathbf{x}[n] \cos(\omega_0 n) + \mathbf{y}[n] \sin(\omega_0 n)) \\
&\quad (\mathbf{x}[n+k] \cos(\omega_0(n+k)) + \mathbf{y}[n+k] \sin(\omega_0(n+k)))] \\
&= R_{\mathbf{x}}[k] \cos(\omega_0 n) \cos(\omega_0(n+k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \frac{1}{2}R_{\mathbf{x}}[k] \cos(\omega_0 k) + \frac{1}{2}R_{\mathbf{x}}[k] \cos(\omega_0(2n+k)) \\
& + \cancel{R_{\mathbf{xy}}[k]} \cos(\omega_0 n) \sin(\omega_0(n+k)) \rightarrow 0 \\
& + \cancel{R_{\mathbf{yx}}[k]} \sin(\omega_0 n) \cos(\omega_0(n+k)) \rightarrow 0 \\
& + R_{\mathbf{y}}[k] \sin(\omega_0 n) \sin(\omega_0(n+k)) \\
& \rightarrow \frac{1}{2}R_{\mathbf{y}}[k] \cos(\omega_0 k) - \frac{1}{2}R_{\mathbf{y}}[k] \cos(\omega_0(2n+k)) \\
& = R_{\mathbf{x}}[k] \cos(\omega_0 k) = R_{\mathbf{z}}[k] \\
P_{\mathbf{z}} &= R_{\mathbf{z}}[0] = 1 \\
&= E[\mathbf{z}^2[n]] = E[(\mathbf{x}[n] \cos(\omega_0 n) + \mathbf{y}[n] \sin(\omega_0 n))^2] \\
&= R_{\mathbf{x}}[0] \cos^2(\omega_0 n) + R_{\mathbf{y}}[0] \sin^2(\omega_0 n) + 2R_{\mathbf{xy}}[0] \cos(\omega_0 n) \sin(\omega_0 n) \\
&= R_{\mathbf{x}}[0] = 1 \\
R_{\mathbf{xz}}[n, n+k] &= E\left[\mathbf{x}[n] \left(\mathbf{x}[n+k] \cos(\omega_0(n+k)) + \mathbf{y}[n+k] \sin(\omega_0(n+k))\right)\right] \\
&= E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k] \cos(\omega_0(n+k))] + E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k] \sin(\omega_0(n+k))] \\
&\neq R_{\mathbf{xz}}[k] \\
\rho &= \frac{C_{\mathbf{z}}[2]}{C_{\mathbf{z}}[0]} = R_{\mathbf{z}}[2] = R_{\mathbf{x}}[2] \cos(2\omega_0) = (-1) \cdot \exp\left(-\frac{1}{5}\right) \\
\hat{\mathbf{z}}[n+2] &= a_1 \mathbf{z}[n] + a_2 \mathbf{z}[n-1] \\
mse &= E[(\mathbf{z}[n+2] - \hat{\mathbf{z}}[n+2])^2] \\
&= E[(\mathbf{z}[n+2] - a_1 \mathbf{z}[n] - a_2 \mathbf{z}[n-1])^2] \\
\frac{\partial}{\partial a_1} mse &= E[(\mathbf{z}[n+2] - a_1 \mathbf{z}[n] - a_2 \mathbf{z}[n-1]) \mathbf{z}[n]] = 0 \\
&= E[\mathbf{z}[n+2]\mathbf{z}[n]] - a_1 E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}[n]] - a_2 E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}[n-1]] \\
\frac{\partial}{\partial a_2} mse &= E[\mathbf{z}[n+2]\mathbf{z}[n-1]] - a_1 E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}[n-1]] - a_2 E[\mathbf{z}[n-1]\mathbf{z}[n-1]] = 0 \\
&\begin{bmatrix} R_{\mathbf{z}}[0] & R_{\mathbf{z}}[1] \\ R_{\mathbf{z}}[1] & R_{\mathbf{z}}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{z}}[2] \\ R_{\mathbf{z}}[3] \end{bmatrix} \\
R_{\mathbf{z}}[k+2] &= a_1 R_{\mathbf{z}}[k] + a_2 R_{\mathbf{z}}[k-1] \quad k=0,1 \\
\mathbf{z}[n] &\sim N(E[\mathbf{z}[n]] = 0, \text{Var}[\mathbf{z}[n]] = 1)
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 8.4

$$E[\mathbf{z}[n]] = E[\mathbf{x}[n]] E[\cos(\omega_0 n + \theta)] + E[\mathbf{y}[n]] E[\sin(\omega_0 n + \theta)] = 0 \quad (\aleph)$$

$$R_z[n, n+k] = E \left[(\mathbf{x}[n] \cos(\omega_0 n + \theta) + \mathbf{y}[n] \sin(\omega_0 n + \theta)) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\mathbf{x}[n+k] \cos(\omega_0(n+k) + \theta) + \mathbf{y}[n+k] \sin(\omega_0(n+k) + \theta)) \right]$$

יש לנתח איבר-איבר:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}[n+k]] E[\cos(\omega_0 n + \theta) \cos(\omega_0(n+k) + \theta)] &\rightarrow \frac{1}{2} R_x[k] \cos(\omega_0 k) \\ E[\mathbf{x}[n]\mathbf{y}[n+k]] E[\cos(\omega_0 n + \theta) \sin(\omega_0(n+k) + \theta)] &\rightarrow \frac{1}{2} R_{xy}[k] \sin(\omega_0 k) \\ E[\mathbf{x}[n+k]\mathbf{y}[n]] E[\cos(\omega_0(n+k) + \theta) \sin(\omega_0 n + \theta)] &\rightarrow -\frac{1}{2} R_{xy}[-k] \sin(\omega_0 k) \\ E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] E[\sin(\omega_0 n + \theta) \sin(\omega_0(n+k) + \theta)] &\rightarrow \frac{1}{2} R_y[k] \cos(\omega_0 k) \end{aligned}$$

לסיכום,

$$R_z[k] = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 k) [R_x[k] + R_y[k]] + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 k) [R_{xy}[k] - R_{xy}[-k]]$$

חישוב הספק

$$P_z = R_z[0] = \frac{1}{2} [R_x[0] + R_y[0]] = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1$$

(ב) קשר בין האותות: האותות הם: JWSS, אורטוגונליים וחסרי קורלציה

$$\begin{aligned} R_{xz}[n, n+k] &= E[\mathbf{x}[n](\mathbf{x}[n+k] \cos(\omega_0(n+k) + \theta) + \mathbf{y}[n+k] \sin(\omega_0(n+k) + \theta))] \\ &= R_x[k] E[\cos(\omega_0(n+k) + \theta)] + R_{xy}[k] E[\sin(\omega_0(n+k) + \theta)] = 0 \\ &= R_{xz}[k] \quad \text{בלתי תלוי ב-} n \end{aligned}$$

(ג) עבור משתנה אקראי גאוס

$$\text{Var}[\mathbf{z}[n]] = C_z[0] = R_z[0] - \mu_z^2 = R_z[0] = P_z = \sigma_z^2 = 1$$

$$\mathbf{z}[n] \sim N(0, \sigma_z^2) \Rightarrow \Pr\left(\mathbf{z}[n] > \frac{1}{2}\right) = Q\left(\frac{1}{2\sigma_z}\right) \leftarrow \text{פרק 2.2.3}$$

(ד) חישוב הביטוי

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{z}[n] - \mathbf{z}[n-1])^2] &= E[\mathbf{z}^2[n]] - 2E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}[n-1]] + E[\mathbf{z}^2[n-1]] \\ &= 2R_z[0] - 2R_z[1] \end{aligned}$$

פתרון השאלה 8.5 תהליכים $\mathbf{x}[n], \mathbf{z}[n]$ הם קומבינציה לינארית של תהליכים גאוסיים, לכן הם גאוסיים, סטציאונריים וסטציאונריים במשותף. תשובה הזאת מספקת ולא נידרשת הוכחה

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{y}[n]] &= E[\mathbf{x}_1[n]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]] = \mu_1 + \mu_2 \\
R_{\mathbf{y}}[n, n+k] &= E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] \\
&= E\left[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1])(\mathbf{x}_1[n+k] + \mathbf{x}_2[n+k-1])\right] \\
&= E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1[n+k]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_2[n+k-1]] \\
&\quad + \underbrace{E[\mathbf{x}_1[n]]E[\mathbf{x}_2[n+k-1]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]]E[\mathbf{x}_1[n+k]]}_{\text{בגלל שהם בלתי תלויים}} \\
&= R_1[k] + R_2[k] + 2\mu_1\mu_2 = R_{\mathbf{y}}[k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{y}} &= R_{\mathbf{y}}[0] \\
&= R_1[0] + R_2[0] + 2\mu_1\mu_2 \\
R_1[0] &= \text{Var}[\mathbf{x}_1[n]] + E^2[\mathbf{x}_1[n]] \\
&= \sigma_1^2 + \mu_1^2 \\
P_{\mathbf{y}} &= \sigma_1^2 + \mu_1^2 + \underbrace{\sigma_2^2 + \mu_2^2}_{R_2[0]} + 2\mu_1\mu_2 \\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\mathbf{y}}[k] &= R_{\mathbf{y}}[k] - E^2[\mathbf{y}[n]] \\
&= R_1[k] + R_2[k] + 2\mu_1\mu_2 - \underbrace{(\mu_1 + \mu_2)^2}_{E^2[\mathbf{y}[n]]} \\
&= R_1[k] - \mu_1^2 + R_2[k] - \mu_2^2 \\
&= C_1[k] + C_2[k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\mathbf{y}[n]] &= R_{\mathbf{y}}[0] - E^2[\mathbf{y}[n]] \\
&= \text{Var}[\mathbf{x}_1[n]] + \text{Var}[\mathbf{x}_2[n-1]] \\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\
\mathbf{y}[n] &\sim N\left(E[\mathbf{y}[n]], \text{Var}[\mathbf{y}[n]]\right) \\
&\sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)
\end{aligned}$$

$$E\left[\sum_{m=0}^1 \mathbf{y}[m]\right] = \sum_{m=0}^1 E[\mathbf{y}[m]] = 2(\mu_1 + \mu_2)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\mathbf{y}[0] + \mathbf{y}[1]] &= \underbrace{\text{Var}[\mathbf{y}[0]]}_{C_{\mathbf{y}}[0]} + 2 \underbrace{\text{Cov}[\mathbf{y}[0], \mathbf{y}[1]]}_{C_{\mathbf{y}}[1]} + \underbrace{\text{Var}[\mathbf{y}[1]]}_{C_{\mathbf{y}}[0]} \\
&= 2C_{\mathbf{y}}[0] + 2C_{\mathbf{y}}[1] \\
\mathbf{y}[0] + \mathbf{y}[1] &\sim N(2(\mu_1 + \mu_2), 2C_{\mathbf{y}}[0] + 2C_{\mathbf{y}}[1])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{z}[n]] &= \mu_1 + \mu_2 = E[\mathbf{z}[n]] \\
R_{\mathbf{z}}[k] &= E[\mathbf{z}[n]\mathbf{z}[n+k]] \\
&= R_{\mathbf{y}}[k] \quad \leftarrow R_{\mathbf{y}}[k] \text{ חישוב זהה לחישוב של} \\
R_{\mathbf{yz}}[n, n+k] &= E[\mathbf{y}[n]\mathbf{z}[n+k]] \\
&= E[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1])(\mathbf{x}_1[n-1+k] + \mathbf{x}_2[n+k])] \\
&= E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1[n-1+k]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_2[n+k]] + 2\mu_1\mu_2 \\
&= R_1[k-1] + R_2[k+1] + 2\mu_1\mu_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_2 = 0 \\
\text{mse}(a) &= E[(\mathbf{z}[n] - a\mathbf{y}[n])^2] \\
&= R_{\mathbf{z}}[0] - 2aR_{\mathbf{yz}}[0] + a^2R_{\mathbf{y}}[0] \\
\frac{d\text{mse}(a)}{da} &= -2R_{\mathbf{yz}}[0] + 2aR_{\mathbf{y}}[0] = 0 \\
a &= \frac{R_{\mathbf{yz}}[0]}{R_{\mathbf{y}}[0]} \\
\text{mse}(a) &= E[(\mathbf{z}[n] - a\mathbf{y}[n])^2] \\
&= E[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1] - a\mathbf{x}_1[n-1] - a\mathbf{x}_2[n])^2] \\
&= R_1[0] - aR_1[1] \\
&\quad + R_2[0] - aR_2[1] \\
&\quad - aR_1[1] + a^2R_1[0] \\
&\quad - aR_2[1] + a^2R_2[0] \\
\frac{d\text{mse}(a)}{da} &= -2R_1[1] - 2R_2[1] + a(2R_1[0] + 2R_2[0]) = 0 \\
a &= \frac{R_1[1] + R_2[1]}{R_1[0] + R_2[0]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{y}[n]] &= E[\mathbf{x}_1[n]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]] = \mu_1 + \mu_2 \\
R_{\mathbf{y}}[n, n+k] &= E[\mathbf{y}[n]\mathbf{y}[n+k]] \\
&= E[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1])(\mathbf{x}_1[n+k] + \mathbf{x}_2[n+k-1])] \\
&= E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1[n+k]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_2[n+k-1]] \\
&\quad + E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_2[n+k-1]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_1[n+k]] \\
&= R_1[k] + R_2[k] + R_{12}[k-1] + R_{21}[k+1] \\
&= R_1[k] + R_2[k] + R_{12}[k-1] + R_{12}[-k-1] = R_{\mathbf{y}}[k] \\
R_{21}[k+1] &= R_{12}[-(k+1)] = R_{12}[-k-1] \quad \leftarrow \text{בשאלה לא נתון} \\
P_{\mathbf{y}} &= R_{\mathbf{y}}[0] = R_1[0] + R_2[0] + 2R_{12}[-1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^2[\mathbf{y}[n]] &= (\mu_1 + \mu_2)^2 \\
C_{\mathbf{y}}[k] &= R_{\mathbf{y}}[k] - E^2[\mathbf{y}[n]] \\
\mathbf{y}[n] &\sim N(E[\mathbf{y}[n]], \text{Var}[\mathbf{y}[n]] = C_{\mathbf{y}}[0])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{m=0}^1 \mathbf{y}[m]\right] &= \sum_{m=0}^1 E[\mathbf{y}[m]] = 2(\mu_1 + \mu_2) \\
\text{Var}[\mathbf{y}[0] + \mathbf{y}[1]] &= \text{Var}[\mathbf{y}[0]] + 2C_{\mathbf{y}}[1] + \text{Var}[\mathbf{y}[1]] \\
&= 2C_{\mathbf{y}}[0] + 2C_{\mathbf{y}}[1] \\
\mathbf{y}[0] + \mathbf{y}[1] &\sim N(2(\mu_1 + \mu_2), 2C_{\mathbf{y}}[0] + 2C_{\mathbf{y}}[1])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{yz}}[n, n+k] &= E[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1])(\mathbf{x}_1[n-1+k] + \mathbf{x}_2[n+k])] \\
&= E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1[n-1+k]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_2[n+k]] \\
&\quad + E[\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_2[n+k]] + E[\mathbf{x}_2[n-1]\mathbf{x}_1[n-1+k]] \\
&= R_1[k-1] + R_2[k+1] + R_{12}[k] + R_{21}[k] \\
&= R_1[k-1] + R_2[k+1] + R_{12}[k] + R_{12}[-k]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_2 = 0 \\
\text{mse}(a) &= E[(\mathbf{z}[n] - a\mathbf{y}[n])^2] \\
&= R_{\mathbf{z}}[0] - 2aR_{\mathbf{yz}}[0] + a^2R_{\mathbf{y}}[0] \\
\frac{d\text{mse}(a)}{da} &= -2R_{\mathbf{yz}}[0] + 2aR_{\mathbf{y}}[0] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{R_{yz}[0]}{R_y[0]} \\
\text{mse}(a) &= E\left[(\mathbf{z}[n] - a\mathbf{y}[n])^2\right] \\
&= E\left[(\mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_2[n-1] - a\mathbf{x}_1[n-1] - a\mathbf{x}_2[n])^2\right] \\
&= R_0[0] + R_{12}[-1] - aR_1[1] - aR_{12}[0] \\
&\quad + R_{21}[1] + R_2[0] - aR_{12}[0] - aR_2[1] \\
&\quad - aR_1[1] - aR_{12}[0] + a^2R_1[0] + a^2R_{12}[1] \\
&\quad - aR_{12}[0] - aR_2[1] + a^2R_{12}[1] + a^2R_2[0] \\
\frac{d\text{mse}(a)}{da} &= 0 \Rightarrow a = \frac{R_1[1] + 2R_{12}[0] + R_2[1]}{R_1[0] + 2R_{12}[1] + R_2[0]}
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 9.1

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \theta) + Am \sin(2\pi f_m t + \phi) \cos(2\pi f_c t + \theta) \\
E[\mathbf{x}(t)] &= AE[\cos(2\pi f_c t + \theta)] + AmE[\sin(2\pi f_m t + \phi)]E[\cos(2\pi f_c t + \theta)] = 0 \\
\text{Var}[\mathbf{x}(t)] &= E[\mathbf{x}^2(t)] - E^2[\mathbf{x}(t)] = E[\mathbf{x}^2(t)] \\
E[\mathbf{x}^2(t)] &= A^2 E[\cos^2(2\pi f_c t + \theta)] + A^2 m^2 E[\sin^2(2\pi f_m t + \phi)]E[\cos^2(2\pi f_c t + \theta)] \\
&\quad + 2mA^2 E[\sin(2\pi f_m t + \phi)]E[\cos^2(2\pi f_c t + \theta)] \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2 m^2}{4} \\
R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)] \\
&= A^2 E\left[\cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta)\right] \\
&\quad + mA^2 E\left[\cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta)\right] E\left[\sin(2\pi f_m(t + \tau) + \phi)\right] \\
&\quad + mA^2 E\left[\cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta)\right] E\left[\sin(2\pi f_m t + \phi)\right] \\
&\quad + m^2 A^2 E\left[\cos(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta)\right] \times \\
&\quad \times E\left[\sin(2\pi f_m t + \phi) \sin(2\pi f_m(t + \tau) + \phi)\right] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{m^2 A^2}{4} \cos(2\pi f_c \tau) \cos(2\pi f_m \tau) \\
P_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_{\mathbf{x}}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(f) df = R_{\mathbf{x}}(0) = P_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}^2(t)]
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 10.1

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{x}}(F) &= \mathcal{F} \{R_{\mathbf{x}}(\tau)\} = \sigma_{\mathbf{x}}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 F^2}{\alpha^2}\right) \\
 S_{\mathbf{y}}(F) &= S_{\mathbf{x}}(F) |H(F)|^2 = \sigma_{\mathbf{x}}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 F^2}{\alpha^2}\right) |j2\pi F|^2 \\
 P_{\mathbf{y}} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F) |H(F)|^2 dF \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sigma_{\mathbf{x}}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 F^2}{\alpha^2}\right) \right] |j2\pi F|^2 dF \\
 &= 4\sigma_{\mathbf{x}}^2 \pi^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} F^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 F^2}{\alpha^2}\right) dF \\
 &= 8\sigma_{\mathbf{x}}^2 \pi^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^{\infty} F^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 F^2}{\alpha^2}\right) dF \\
 &= 8\sigma_{\mathbf{x}}^2 \pi^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^{\infty} F^2 \exp(-\beta^2 F^2) dF, \quad \beta = \frac{\pi}{\alpha} \\
 &= 8\sigma_{\mathbf{x}}^2 \pi^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^3} \\
 &= 8\sigma_{\mathbf{x}}^2 \pi^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\alpha^3}{\pi^3} \\
 &= 2\alpha^2 \sigma_{\mathbf{x}}^2 \\
 \mathbf{y}(t) &\sim N(0, \sigma_{\mathbf{y}}^2 = P_{\mathbf{y}} = 2\alpha^2 \sigma_{\mathbf{x}}^2)
 \end{aligned}$$

פתרון השאלה 10.2

$$\begin{aligned}
 P_{\mathbf{x}} &= R_{\mathbf{x}}(0) = e^0 = 1 \\
 S_{\mathbf{x}}(F) &= \frac{2a}{a^2 + (2\pi F)^2}, \quad a = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \exp(-a|t|) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \\
 P &= \int_{-4}^4 S_{\mathbf{x}}(F) dF \\
 &= \int_{-4}^4 \frac{2a}{a^2 + (2\pi F)^2} dF
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4a \int_0^4 \underbrace{\frac{1}{a^2 + (2\pi F)^2}}_{\frac{\frac{1}{4\pi^2}}{\frac{a^2}{4\pi^2} + F^2}} dF \\
&= \frac{a}{\pi^2} \int_0^4 \frac{1}{\left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 + F^2} dF \quad \leftarrow \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \\
&= \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}(8\pi F) \Big|_0^4 = \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}(32\pi) \approx 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) \sim N(0, 1) \Rightarrow \Pr(\mathbf{x}(1) > 3) = Q(3)$$

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)] &= 0 \\
\operatorname{Var}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)] &= \operatorname{Var}[\mathbf{x}(0)] + 2\operatorname{Cov}[\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1)] + \operatorname{Var}[\mathbf{x}(1)] \\
&= 1 + 1 + 2C_{\mathbf{x}}(1) = 1 + 1 + 2R_{\mathbf{x}}(1) = 2 \left(1 + e^{-\frac{1}{4}}\right) \\
\Pr([\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)] > 3) &= Q\left(\frac{3}{\sqrt{\operatorname{Var}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(1)]}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &\sim N(\cos(\Omega_0 t), 1) \quad \leftarrow \Omega_0 = 2\pi 30g \\
\operatorname{Var}[\mathbf{y}(t)] &= E[\mathbf{y}^2(t)] - E^2[\mathbf{y}(t)] \\
&= E[\mathbf{x}^2(t) + 2\cos(\Omega_0 t)\mathbf{x}(t) + \cos^2(\Omega_0 t)] - \cos^2(\Omega_0 t) \\
&= E[\mathbf{x}^2(t)] + 2\cos(\Omega_0 t)E[\mathbf{x}(t)] \\
&= R_{\mathbf{x}}(0) = 1 \\
\operatorname{Var}[\mathbf{y}(t)] &= \operatorname{Var}[\mathbf{x}(t) + \cos(2\pi 30t)] = \operatorname{Var}[\mathbf{x}^2(t)] \quad \leftarrow \operatorname{Var}[aX+b] = a^2 \operatorname{Var}[X] \\
P_{\mathbf{y}}(t) &= E[\mathbf{y}^2(t)] \\
&= E[\mathbf{x}^2(t) + 2\cos(\Omega_0 t)\mathbf{x}(t) + \cos^2(\Omega_0 t)] \\
&= 1 + \cos^2(\Omega_0 t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{y}(t)] &= \cos(\Omega_0 t) \\
R_{\mathbf{y}}(t, t + \tau) &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t + \tau)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(\mathbf{x}(t) + \cos(\Omega_0 t) \right) \left(\mathbf{x}(t + \tau) + \cos(\Omega_0(t + \tau)) \right) \right] \\
&= E [\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)] + \cos(\Omega_0 t) E [\mathbf{x}(t + \tau)] \\
&\quad + E [\mathbf{x}(t)] \cos(\Omega_0(t + \tau)) + \cos(\Omega_0 t) \cos(\Omega_0(t + \tau)) \\
&= R_{\mathbf{x}}(\tau) + \frac{1}{2} \cos(\Omega_0 \tau) + \frac{1}{2} \cos(2\Omega_0 t + \Omega_0 \tau)
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 10.3

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = 10\delta(\tau)$$

$$S_{\mathbf{x}} = 10$$

$$P_{\mathbf{y}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F) |H_1(F)|^2 dF = \int_{-3}^3 10 \cdot 1^2 dF = 60$$

$$\mathbf{y}(t) \sim N(0, 60) \Leftarrow \Pr(\mathbf{y}(t) > 3) = Q\left(\frac{3}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right) = Q\left(\frac{3}{\sqrt{60}}\right)$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{z}} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F) |H_1(F)H_2(F)|^2 dF \\
&= 10 \int_{-3}^3 |H_2(F)|^2 dF = 10 \int_{-3}^3 \exp\left(-\frac{F^2}{4}\right)^2 dF \approx 25.0 \\
&= 10 \int_{-3}^3 \exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF \\
&= 10\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^3 \exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF \\
&= 10\sqrt{2\pi} (1 - 2Q(3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{z}} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(F) |H_2(F)|^2 dF \\
&= 10 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{F^2}{2}\right) dF = 10\sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{z}(t) \sim N(0, 10\sqrt{2\pi})$$

$$R_{\mathbf{yz}}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_{\mathbf{yz}}(F)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{xz}}(F) e^{j2\pi F\tau} dF$$

$$\begin{aligned}
C_{\mathbf{yz}}(0) &= R_{\mathbf{yz}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S_{\mathbf{x}}(F) H_1^*(F) H_2(F)}_{S_{\mathbf{yz}}(F)} dF \\
&= 10 \int_{-3}^3 \exp\left(-\frac{F^2}{4}\right) dF
\end{aligned}$$

פתרון השאלה 10.4

□ כניסה היא בעלת תוחלת $E[\mathbf{x}[n]] = 0$ (תכונה של רעש לבן). לכן מוצא של כל המערכות LTI היא $E[\mathbf{y}_1[n]] = E[\mathbf{y}_2[n]] = E[\mathbf{y}_3[n]] = 0$

□ מוצא של כל אחת מהמערכות היא גאוסית, ולכולם ביחד יש התפלגות גאוסית משותפת.

□ הפתרון הוא חישוב של מטריצת cov.

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{x}}(f) &= 4 \\
\text{Var}[\mathbf{y}_1[n]] &= P_{\mathbf{y}_1} \\
&= \int S_{\mathbf{x}}(f) |H_1(f)|^2 df \\
&= 4 \int |H_1(f)|^2 df \\
&= 4 \int_{-0.15}^{0.15} df = 4 * 2 * 0.15 = 1.2 \\
\text{Var}[\mathbf{y}_2[n]] &= P_{\mathbf{y}_2} = 4 * 2 * (0.2 - 0.1) = 0.8 \\
\text{Var}[\mathbf{y}_3[n]] &= P_{\mathbf{y}_3} = 4 * 2 * (0.3 - 0.2) = 0.8 \\
C_{\mathbf{y}_{12}}[0] &= R_{\mathbf{y}_{12}}[0] = \int S_{\mathbf{y}_{12}}(f) df \\
&= \int S_{\mathbf{x}}(f) H_1^*(F) H_2(f) df \\
&= 4 \int H_1^*(F) H_2(f) df \\
&= 4 * 2 \int_{0.1}^{0.15} df = 4 * 2 * (0.15 - 0.1) = 0.4 \\
R_{\mathbf{y}_{13}}[0] &= 4 \int H_1^*(F) H_3(f) df = 0 \\
R_{\mathbf{y}_{23}}[0] &= 4 \int H_2^*(F) H_3(f) df = 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1[n] \\ \mathbf{y}_2[n] \\ \mathbf{y}_3[n] \end{bmatrix} &\sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$R_x[k] = 4 \exp(-|k|) \quad \text{עבור}$$

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{-j2\pi f k} \\ &= R_x[0] + R_x[1] e^{-j2\pi f} + R_x[1] e^{j2\pi f} \\ &\quad + R_x[2] e^{-j2\pi f \cdot 2} + R_x[2] e^{j2\pi f \cdot 2} + \dots \\ &= R_x[0] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_x[k] \cos(2\pi f k) \\ &= 4 + 8 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \cos(2\pi f k) \\ &= 4 + 8e^{-1} \cos(2\pi f) + 8e^{-2} \cos(4\pi f) + \dots \end{aligned}$$

כמובן, צפיפות הספק המתקבלת היא ממשית, חיובית ומחזורית.

$$\begin{aligned} \text{Var}[y_1[n]] &= P_{y_1} \\ &= \int S_x(f) |H_1(f)|^2 df \\ &= \int_{-0.15}^{0.15} S_x(f) df \\ &= 2 \int_0^{0.15} S_x(f) df \\ \text{Var}[y_2[n]] &= 2 \int_{0.1}^{0.2} S_x(f) df \\ \text{Var}[y_3[n]] &= 2 \int_{0.2}^{0.3} S_x(f) df \\ C_{y_{12}}[0] &= 4 * 2 \int_{0.1}^{0.15} S_x(f) df \end{aligned}$$

זההים לסעיף הקודם. למתקדמים במיוחד, $R_{y_{13}}[0], R_{y_{23}}[0]$

$$\begin{aligned} \int_{-0.15}^{0.15} S_x(f) df &= 2 \int_0^{0.15} S_x(f) df \\ &= 2 \int_0^{0.15} 4 df + 2 \int_0^{0.15} 8 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \cos(2\pi f k) df \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 0.15 + 16 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \int_0^{0.15} \cos(2\pi f k) df \\ &= 1.2 + 16 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \frac{1}{2\pi k} \sin(2\pi f k) \Bigg|_{f=0}^{f=0.15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1.2 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k} \sin(2\pi 0.15k) \\
&= 1.2 + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{e\pi} + \frac{4\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5}{8}}}{e^2\pi} + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{3e^3\pi} + \dots \\
&= \frac{6}{5} + \frac{4i}{\pi} \left(\log(e - (-1)^{3/10}) - \log((-1)^{7/10} + e) \right) \\
&\approx 2.12415
\end{aligned}$$

סעיף ג'

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_2[n] \\ \mathbf{y}_3[n] \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} E[\mathbf{y}_2[n]] \\ E[\mathbf{y}_3[n]] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\mathbf{y}_2}[0] & C_{\mathbf{y}_{23}}[0] \\ C_{\mathbf{y}_{23}}[0] & C_{\mathbf{y}_3}[0] \end{bmatrix} \right)$$

$$E[\mathbf{y}_2[n]] = E[\mathbf{y}_3[n]] = E[\mathbf{x}[n]] = 0$$

$$C_{\mathbf{y}_2}[0] = R_{\mathbf{y}_2}[0]$$

$$= \int_0^1 S_{\mathbf{x}}(f) |H_1(f)H_2(f)| df$$

$$= 2 \int_{0.1}^{0.15} 4df$$

$$= 2 * 4 * 0.05 = 0.4$$

$$C_{\mathbf{y}_3}[0] = R_{\mathbf{y}_3}[0]$$

$$= \int_0^1 S_{\mathbf{x}}(f) |H_1(f)H_3(f)| df$$

$$= 0$$

$$C_{\mathbf{y}_{23}}[0] = \int_0^1 S_{\mathbf{y}_1}(f) H_2^*(f) H_3(f) df$$

$$= \int_0^1 (S_{\mathbf{x}}(f) H_1(f)) H_2^*(f) H_3(f) df$$

$$= 0$$

לסיכום,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_2[n] \\ \mathbf{y}_3[n] \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

פתרון השאלה 11.1 בהתאם לתאוריה

$$R_x[k] = \sigma^2 h[n] * h[-n] = h[n] * h[-n] = \sum_m h[m]h[m+k]$$

$$R_x[3] = \sum_m h[m]h[m+3] = h[0]h[3] + h[1]h[4] + h[2]h[5] = \frac{21}{128}$$

החישוב ע"י Matlab:

```

n = 5;
h = 1./2.^[0:n]; % define h[n] values
hh= conv(h,flipr(h)); % evaluate h[n]*h[-n]
hh(n+1+3) % final answer

```

פתרון השאלה 11.2 חישוב $R_x[k]$ בהתאם למשוואה (11.27).

$$E[\mathbf{x}[n]] = 0$$

$$R_x[k] = \left\{ \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}} \right\} * \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$P_x = R_x[0] = \frac{3}{4}$$

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x[1] \\ R_x[2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$mse_{min} = R_x[0] - aR_x[1] - bR_x[2]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

$$R_y[k] = R_x[n] * h[n] * h[-n]$$

$$\left\{ \frac{1}{4}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\} * \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2} \right\} * \left\{ \frac{1}{2}, \underset{\uparrow}{1} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{8}, \frac{9}{16}, \underset{\uparrow}{\frac{9}{8}}, \frac{23}{16}, \frac{9}{8}, \frac{9}{16}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\text{conv}([1/4, 1/2, 3/4, 1/2, 1/4], \text{conv}([1, 1/2], [1/2, 1]))$$

$$P_y = R_y[0] = \frac{23}{16} = 1.4375$$

$$\begin{aligned} R_{yz}[k] &= R_x[k] * h_1[-n] * h_2[n] \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall k \\ h_1[-n] * h_2[n] &= \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}_{\uparrow} * \{h_0, h_1\} \\ &= \left\{ \frac{h_0}{2}, \underbrace{h_0 + \frac{h_1}{2}}_{\uparrow}, h_1 \right\} \neq 0 \text{ for } k \neq 0 \end{aligned}$$

מאחר ונדרש $h[n] * h[-n] = 0$, התנאי לא מתקיים.
אפשרות נוספת היא להראות שמערכות $h_1[n], h_2[n]$ חופפות בתדר עבור $h_0, h_1 \neq 0$ (איור 9.3),

$$\begin{aligned} H_1^*(f) &= \frac{1}{2} + e^{j2\pi f} \\ H_2(f) &= h_0 + h_1 e^{-j2\pi f} \end{aligned}$$

פתרון השאלה 11.3

```
N = 1e6;           % length of white Gaussian noise signal
x = randn(1,N);    % white Gaussian noise signal
y = filter(1,[1 -0.1],x); % output signal
C = xcorr(y,1,'biased'); % auto-correlation
C(1)               % answer
```

פתרון השאלה 12.1

$$h(t) = x(t_0 - t) = u(t_0 - t) \left[\exp(-\alpha(t_0 - t)) - \exp(-\alpha\beta(t_0 - t)) \right] \quad (\text{א})$$

$$y(t_0) = (x * h)(t_0) \quad (\text{ב})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t_0 - t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha\beta t)]^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha t) + \exp(-2\alpha\beta t) - 2\exp(-(\alpha + 1)\beta t) dt \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha\beta} - \frac{2}{(\alpha + 1)\beta} \end{aligned}$$

$$P_{y(t_0)} = y^2(t_0) = \left[\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha\beta} - \frac{2}{(\alpha + 1)\beta} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(F) |H(F)|^2 dF & (ג) \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 dF \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\
 &= \frac{N_0}{2} y(t_0) \\
 SNR &= \frac{y^2(t_0)}{P} = \frac{2}{N_0} y(t_0)
 \end{aligned}$$

פתרון השאלה 13.1

```

N = 1e4;
x = randn(1,N);
f = designfilt('lowpassiir', 'PassbandFrequency', .32, ...
    'StopbandFrequency', .34, 'PassbandRipple', 1, ...
    'StopbandAttenuation', 70, 'DesignMethod', 'ellip');
y = filter(f,x);
pwelch(y); % pwelch(y,hann(N/10))

```

נספח ב'

נספח מתמטי

התפלגויות

טבלה ב'.1: התפלגויות רציפות

	Notation	PDF	CDF	$E[X]$	$Var[X]$
Uniform	$U[a, b]$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\Phi(x)$	μ	σ^2
Exponential	$Exp(\lambda)$	$\lambda \exp(-\lambda x), x \geq 0$	$1 - \exp(-\lambda x)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

טבלה ב'.2: התפלגויות בדידות

	Notation	PMF	CDF	$E[X]$	$Var[X]$
Bernoulli	$Ber(p)$	$\begin{cases} 1-p & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomial	$Bin(n,p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Geometric	$Geo(p)$	$p(1-p)^{k-1}$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$p(X=k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$	$\exp(-\lambda) \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ

מספרים מרוכבים

$$(1.'ב) \quad e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

$$(2.'ב) \quad \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$(3.'ב) \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

חדו"א

נגזרת

$$(4.'ב) \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$(5.'ב) \quad \frac{d}{dx} \exp[f(x)] = \exp[f(x)] \frac{d}{dx} f(x)$$

אינטרגרל לא מסויים

$$(6.'ב) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$(7.'ב) \quad \int \exp(ax) dx = \frac{1}{a} \exp(ax)$$

$$(8.'ב) \quad \int x \exp(ax) dx = \exp(ax) \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right]$$

$$(9.'ב) \quad \int x^2 \exp(ax) dx = \exp(ax) \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right]$$

$$(10.'ב) \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

אינטרגרל מסויים

$$(11.'ב) \quad \int_0^\infty \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$(12.'ב) \quad \int_0^\infty x^2 \exp(-a^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$$

$$(13.'ב) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$(14.'ב) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

התמרת פוריה

תכונות

$$(15.'ב) \quad \frac{d^n}{dt^n} g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi F)^n G(F)$$

$$(16.'ב) \quad g(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G^*(F)$$

$$(17.'ב) \quad g(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(F) e^{-j2\pi F t_0}$$

$$(18.'ב) \quad g(t) e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(F - F_0)$$

התמרות

$$(19.'ב) \quad u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\pi F} + \delta(F) \right)$$

$$(20.'ב) \quad \exp(-at) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j2\pi F}$$

$$(21.'ב) \quad t \exp(-at) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(a + j2\pi F)^2}$$

$$(22.'ב) \quad \exp(-a|t|) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2}$$

$$(23.'ב) \quad \exp(-at^2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\pi F)^2}{a}\right)$$

$$(24.'ב) \quad \cos(2\pi f_a t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \left[\delta(F - F_a) + \delta(F + F_a) \right]$$

$$(25.'ב) \quad \sin(2\pi f_a t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} \left[\delta(F - F_a) - \delta(F + F_a) \right]$$

$$(26.'ב) \quad u(t + a) - u(t - a) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(2\pi F a) \quad \text{פולס בזמן}$$

$$(27.'ב) \quad \text{sinc}(2\pi F a) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} u(F + a) - u(F - a)$$

זהויות טריגונומטריות

$$(28.'ב) \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha))$$

$$(29.'ב) \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha))$$

$$(30.'ב) \quad \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$$

$$(31.'ב) \quad \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$(32.'ב) \quad \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(33.'ב) \quad \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin((\alpha + \beta))]$$

התמרת Z

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

התמרות Z שימושיות ב'.3: טבלה

Signal	Z transform	ROC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n - m]$	z^{-m}	$\mathbb{C} - \{0\}$ if $m > 0$, $\mathbb{C} - \{\infty\}$ if $m < 0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a$

$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$

תכונות

Property	Discrete Signal	Z transform	ROC
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	includes $R_1 \cap R_2$
Time shift	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R
Frequency scaling	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R$
Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} if $m < 0$
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolution	$(x_1 * x_2)[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$ (or possibly more)
Frequency derivation	$nx[n]$	$-z\frac{dX}{dz}(z)$	R
Time differentiation	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \cap \{ z > 0\}$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$	$R \cap \{ z > 1\}$

התמרת DTFT

$$X(f) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega.$$

Properties	Signal	DTFT
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_1(e^{j\omega})$
Time shift	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Frequency scaling	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

נספח ג'

מילון

קיים בלבול מסויים בתרגום של מושגי היסוד לשפה העברית. להלן הטבלה המסכמת עבור מספר מושגים נפוצים.

שם בעברית	Abbreviation	English Term
משתנה אקראי משתנה מקרי	RV	Random variable
תוחלת		Expectation
ממוצע		Average
שונות		Variance
שונות משותפת		Covariance
פונקציית הצטברות פונקציית הסתברות מצטברת פונקציית התפלגות מצטברת	CDF	Cumulative distribution function
פונקציית צפיפות פונקציית צפיפות הסתברות	PDF	Probability density function
פונקציית הסתברות	PMF (PDF)	Probability mass function
פונקציית צפיפות משותפת	Joint PDF	Joint probability density function
פונקציית צפיפות שולית	Marginal PDF	Marginal probability density function
פונקציית הסתברות שולית	Marginal PMF	Marginal probability mass function
פונקציית הסתברות משותפת	Joint PMF	Joint probability mass function
מקדם מתאם		Correlation coefficient (or Pearson product-moment correlation coefficient)
בלתי מתואם		Un-correlated
תהליך אקראי		Random process

נספח ד'

נושאי המשך

להלן רשימה **חלקית** של נושאי המשך עבור חומר הקורס בתחומי ליבה של הנדסת חשמל. בד"כ, עבור כל נושא כזה יש קורס, או סדרה של קורסים, בתוארים מתקדמים.

□ תורת הגילוי (detection theory): זיהוי המצאות אות בתוך רעש ויתר הנושאים הקשורים להחלטה בין שתי אפשרויות של אותות.

□ תורת השיערוך (estimation theory): חיזוי אופטימלי של פרמטרים מתוך מדידות רועשות.

□ למידת מכונה (machine learning): סיווג ו/או חיזוי של אותות.

□ למידה עמוקה (deep learning): ניתוח, סיווג וחיזוי של אותות.

□ עיבוד תמונה וראייה ממוחשבת: ניתן להתייחס לתמונה כאות דו-ממדי, ולבצע עיבוד וניתוח של תמונה וסרטים. יתרה מזאת, ישנם יישומים הקשורים לתנאי תאורה לקויה ו/או עיוותי רעש מסיבות שונות.

□ שיערוך ספקטרום (spectrum estimation): חישוב צפיפות הספק ספקטראלית של אות אקראי בצורה "איכותית" קצת יותר מורכב מסתם פקודה fft , במגוון גישות ושיטות.

□ סינון מסתגל (adaptive filtering): תכנון מסננים משתנים בזמן, שמטרתם להיתמודד עם שינויים של מאפייני האות המסונן.

□ תורת התורים (queueing theory): מה מספר אנשי שירות לקוחות המינימלי שמבטיח מענה תוך x דקות בלפחות $y\%$ מהמקרים? מהו רוחב הפס ו/או משאבי מחשוב הנדרשים של השרת? חישובי עומסים ברשתות תקשורת.

□ תורת המידע (information theory): קודים לגילוי ו/או תיקון שגיאות, דחיסה.

□ תקשורת ספרתית: טיפול ברעש ועוד מגוון נושאים, בד"כ בשיתוף עם הנושאים לעיל.

□ עיבוד/ניתוח של אותות מולטימדיה: ניתוח ודחיסה של אותות שמע וחזי, מודלים של אותות דיבור ועוד מגוון נושאים.

□ בקרה מתקדמת: תכנון וניתוח ביצועים של מערכות בקרה שנאלצות לקבל החלטות על סמך מדידות רועשות. בנוסף, לעתים ישנה אי וודעות לגבי התגובה של מערכת המבוקרת (מערכת שבמידה מסויימת לא קבוע בזמן).

הרשימה לא כוללת נושאי המשך השייכים לתחומים:

- פיזיקה, כגון מודלים למגוון תופעות פיזיקליות.
- תעשייה וניהול, כגון אופטימיזציה של פס ייצור, אמינות מערכות, ניהול הספקה ומלאי של חלקי חילוף.
- מנהל עסקים, כגון חישוב צפי למחזור מכירות לפי עונה.
- כלכלה ושוק ההון, כגון תמחור של חוזים עתידיים.

45	דוגמה 3.14
51	דוגמה 4.1
52	דוגמה 4.2
53	דוגמה 4.3
56	דוגמה 4.4
63	דוגמה 5.1
63	דוגמה 5.2
64	דוגמה 5.3
64	דוגמה 5.4
65	דוגמה 5.5
66	דוגמה 5.6
67	דוגמה 5.7
68	דוגמה 5.8
70	דוגמה 5.9
70	דוגמה 5.10
80	דוגמה 6.1
81	דוגמה 6.2
82	דוגמה 6.3
85	דוגמה 6.4
85	דוגמה 6.5
87	דוגמה 6.6
88	דוגמה 6.7
92	דוגמה 6.8
93	דוגמה 6.9
100	דוגמה 7.1
100	דוגמה 7.2
101	דוגמה 7.3
102	דוגמה 7.4
109	דוגמה 8.1
111	דוגמה 8.2
111	דוגמה 8.3
112	דוגמה 8.4
114	דוגמה 8.5
122	דוגמה 9.1
123	דוגמה 9.2
124	דוגמה 9.3
128	דוגמה 9.4
131	דוגמה 10.1
132	דוגמה 10.2
135	דוגמה 10.3

רשימת דוגמאות

9	דוגמה 1.1
9	דוגמה 1.2
9	דוגמה 1.3
10	דוגמה 1.4
11	דוגמה 1.5
11	דוגמה 1.6
13	דוגמה 1.7
13	דוגמה 1.8
15	דוגמה 1.9
16	דוגמה 1.10
16	דוגמה 1.11
21	דוגמה 2.1
22	דוגמה 2.2
22	דוגמה 2.3
23	דוגמה 2.4
24	דוגמה 2.5
24	דוגמה 2.6
24	דוגמה 2.7
24	דוגמה 2.8
26	דוגמה 2.9
29	דוגמה 2.10
35	דוגמה 3.1
35	דוגמה 3.2
36	דוגמה 3.3
37	דוגמה 3.4
37	דוגמה 3.5
38	דוגמה 3.6
39	דוגמה 3.7
40	דוגמה 3.8
41	דוגמה 3.9
42	דוגמה 3.10
42	דוגמה 3.11
44	דוגמה 3.12
45	דוגמה 3.13

162	דוגמה 12.2	145	דוגמה 11.1
165	דוגמה 13.1	148	דוגמה 11.2
166	דוגמה 13.2	150	דוגמה 11.3
168	דוגמה 13.3	160	דוגמה 12.1

נספח ה'

סיכום הבדלי מושגים בין הספרים

ישנם 2 דברים שונים בין ספר לספר:

□ שימוש בשם מיוחד PMF עבור PDF של משתנה אקראי בדיד.

□ שוני בין הגדרה של $\tau = t_1 - t_2$ או $\tau = t_2 - t_1$ עבור אותות WSS. השוני הזה הוא ניכר יותר בגלל הבדל בין רוב ספרי לימוד לבין מימוש בקוד.

טבלה ה'1: סיכום הבדלים בין הספרים השונים.

τ	PMF/PDF	מקור
$t_1 - t_2$	PDF	[1]
$t_2 - t_1$	PDF	[2]
$t_2 - t_1$	PDF	[3]
$t_2 - t_1$	PMF	[4]
-	PMF	[5]
$t_2 - t_1$	PDF	[6]
$t_2 - t_1$	PMF	[7]
$t_2 - t_1$	PMF	[8]
$t_2 - t_1$	discrete PDF, PMF	Wikipedia
$t_1 - t_2$	PDF	Matlab
$t_1 - t_2$	PDF	scipy

ביבליוגרפיה

- [1] W. B. Davenport, Probability and random processes : an introduction for applied scientists and engineers. McGraw-Hill, .1970
- [2] P. Z. Peebles, Probability, Random Variables, And Random Signal Principles. McGraw-Hill, .2002
- [3] A. Papoulis and S. U. Pillai, Probability, random variables, and stochastic processes. McGraw-Hill, 4th ed., .2002
- [4] A. Leon-Garcia, Probability, statistics, and random processes for electrical engineering. Upper Saddle River, NJ: Pearson-Prentice Hall, 3rd ed., .2008
- [5] P. Olofsson and M. Andersson, Probability, statistics, and stochastic processes. Wiley, 2nd ed., .2012
- [6] S. Miller and D. Childers, Probability and Random Processes. San Diego: Academic Press, 2nd ed., .2012
- [7] S. M. Kay, Intuitive probability and random processes using MATLAB. Springer, 4th ed., .2012
- [8] H. P. Hsu, Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes. Schaum's outline series, McGraw-Hill, 3rd ed., .2014