

עיבוד אותות ספרתי

חוברת הקורס

תום טריגנו ודימה בחובסקי
מחלקה להנדסת חשמל ואלקטרוניקה

מכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון

תאריך העדכון:

29 באוקטובר 2023

י"ד בחשון ה'תשפ"ד

השימוש בחוברת זו הינו אך ורק לשימוש אישי. אין להכניס שינויים, להעתיק, להפיץ, לפרסם, להנפיק רישיון, ליצור עבודה נגזרת, לצלם או לשכפל חוברת זו, או קטעים ממנה בשום צורה ובשום אמצעי, לרבות באמצעות מדיה אלקטרונית. אין לעשות בחוברת זו כל שימוש מסחרי ללא אישור בכתב של המחברים ושל המכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון

גרסה העדכנית ביותר של החוברת ניתנת להורדה מהאתר:

<https://bykhov.github.io/dsp/>

תוכן העניינים

7	1 הקדמה
7	1.1 מבוא
8	1.2 אותות
9	1.3 מערכות
11	2 סיווג אותות בדידים ומערכות בדידות
11	2.1 הקדמה
11	2.2 אותות בדידים
11	2.2.1 אותות בסיסיים
13	2.2.2 הגדרת האות
13	2.2.3 פעולות על האות
14	2.2.4 סיווג אותות בדידים
15	2.3 מערכות בדידות
16	2.3.1 סיווג מערכות בדידות
17	2.4 מערכות LTI
18	2.4.1 קונבולוציה בדידה
21	2.4.2 סיבתיות ויציבות עבור מערכות LTI
24	2.4.3 FIR ו-IIR
25	3 התמרת Z
25	3.1 הקדמה
25	3.1.1 מבט בעזרת המשוואות הדיפרנציאליות
26	3.1.2 מבט בעזרת האותות העצמיים
26	3.2 הגדרה
27	3.3 תחום ההתכנסות של התמרת Z
27	3.3.1 הגדרה
29	3.3.2 תכונות כלליות
32	3.4 התמרות שימושיות
32	3.5 תכונותיה של התמרת Z
38	3.6 מערכות LTI
41	3.7 התמרת Z ההפוכה
41	3.7.1 הגדרה

41	שיטות שימושיות לחישוב	3.7.2
44	ייצוג מערכות	3.8
47	התמרת פורייה בזמן בדיד	4
47	הקדמה	4.1
49	ניסוח הגדרה	4.2
49	התמרת פוריה בזמן בדיד	4.2.1
49	קשר בין אות אנלוגי לאות דגום בזמן רציף	4.2.2
51	קשר בין אות אנלוגי לאות דגום בזמן רציף	4.2.3
52	הגדרה	4.3
55	תכונות	4.4
59	קשר בין סוג מסנן למפת האפסים והקטבים	4.5
61	תכונות המערכות	5
61	הקדמה	5.1
62	מסננים בעלי פאזה לינארית	5.2
62	השהייה	5.2.1
63	פאזה לינארית	5.2.2
66	מערכת הפיכה/הפוכה	5.3
67	מסננים מעבירי הכל (All-Pass)	5.4
69	פאזה מינימלית	5.5
71	שינוי תדר דגימה	6
71	העלת תדר דגימה	6.1
71	על-דגימה	6.1.1
72	DTFT של אות לאחר על-דגימה	6.1.2
72	אינטרפולציה	6.1.3
73	הורדת תדר דגימה	6.2
73	תת-דגימה	6.2.1
74	DTFT של אות לאחר תת-דגימה	6.2.2
76	דסימציה	6.2.3
77	שינוי תדר הדגימה	6.3
77	שינוי זמן הדגימה	6.4
79	התמרת פוריה בדידה	7
79	הקדמה	7.1
79	הגדרה	7.2
82	תכונות התמרת DFT	7.3
82	ציקליות	7.3.1
84	תכונות	7.3.2
89	מבוא לשיערוך ספקטרום	8
89	סיכום הקשר בין ההתמרות	8.1

90	ריפוד באפסים	8.2
92	חלונות	8.3
92	8.3.1 אות סופי בזמן	
94	8.3.2 השפעה	
94	8.3.3 חלון לא מלבני	
96	8.4 Short-Time Fourier Transform (STFT)	
97	8.5 סיכום	

9 מסננים 99

99	9.1 הקדמה	
100	9.2 מפרט דרישות לתכנון מסננים	
100	9.2.1 מפרט מסנני FIR	
101	9.2.2 מפרט מסנני IIR	
101	9.2.3 מאפיינים נוספים	
102	9.3 תכנון מסנני FIR בשיטת החלונות	
103	9.4 תכנון מסננים ע"י Matlab	
104	9.4.1 שיטות תכנון נפוצות	

ספרות 107

א' נספח מתמטי 109

פרק 1

הקדמה

1.1 מבוא

למה אנלוגי לא
משהו?

העולם סביבנו הוא אנלוגי, והתמודדות איתו מחייבת שימוש במעגלים אלקטרוניים אנלוגיים. עם זאת, למעגלים אנלוגיים ישנם מספר מגרעות:

□ מחיר גבוה

□ קושי בייצור רכיבים מדויקים

□ קושי בשינוי פרמטרים

□ תלות בטמפרטורה

□ רגישות לרעש

יתרונות של עיבוד
ספרתי

במקרים רבים, ניתן להשתמש במקום במערכת ספרתיות מבוססות אותות דגומים בזמן בדיד ועיבוד אות בצורה ספרתית ע"ג מעבד או חומרה ייעודית. היתרונות של מערכות בזמן בדיד הם:

□ מחיר יחסית נמוך של חומרה, עבור תדרים נמוכים

□ ביצועים מדויקים ועקביים

□ שינוי קל של פרמטרים

□ שיטות מסוימות ניתנות למימוש בצורה ספרתית בלבד

לעבודה עם אותות דגומים עדיין מספר מגבלות מובנות, בעיקר עבור אותות בתדר גבוה והספקים גבוהים.

מעבר טכנולוגיה
מאנלוגי לדיגיטלי

בעידן המודרני/דיגיטלי, במהלך עשרות השנים האחרונות, קיימת מגמה ברורה של החלפת מערכות עם חלקים מעולם הרכיבים החשמליים כגון סלילים, קבלים, נגדים וכד', למערכות מבצעות סינון ועיבוד הנתונים של אותות דגומים.

כלי מתמטיים אינם זהים

מעולם העיבוד האותות האנלוגיים, נרצה לשמר את כלים המתמטיים שמאפשרים לנתח את התוכן ספקטראלי של האותות בקלות (כגון התמרת פורייה), או לנתח מערכות במישור התדר, כמו התמרת לפס. אם זאת, המעבר מתחום אנלוגי לדיגיטלי כולל מספר אתגרים, ולכאורה שימוש אותם הכלים אינו מיידי. לשם הדוגמה, נציג להלן הבדלים מהותיים קיימים בין התמרת פורייה של אות אנלוגי תאורטי והתמרת פורייה מעשית של גרסה הספרתית.

1.2 אותות

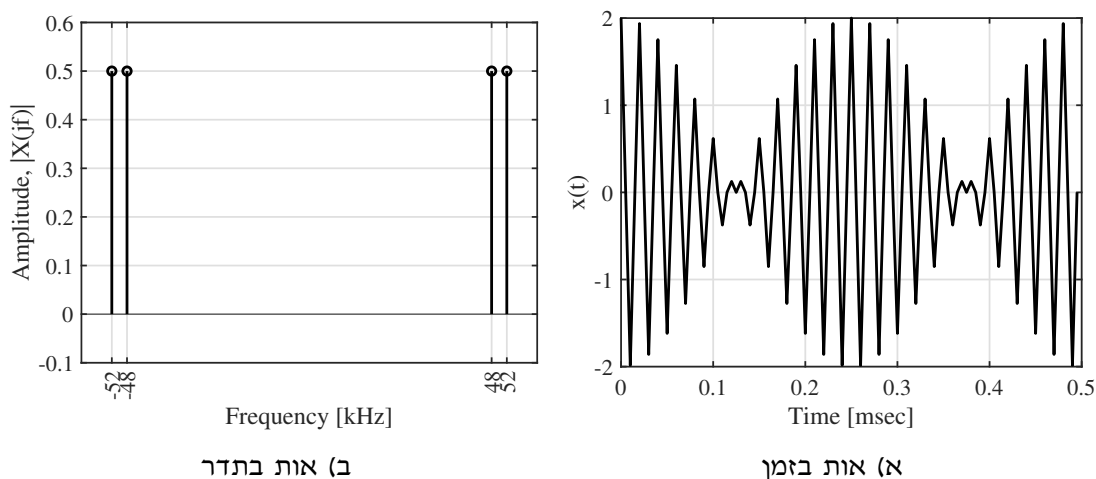
התמרת פוריה מעשית

דוגמה 1.1: נתון אות אנלוגי

$$x(t) = \cos(2\pi F_1 t) + \cos(2\pi F_2 t),$$

כאשר התדרים הם $F_1 = 48\text{kHz}$, $F_2 = 52\text{kHz}$. האות עובר דגימה בתדר דגימה של $F_s = 200\text{kHz}$. כשנרצה לשרטט התמרת פוריה של האות הדגום המתקבל, $x[n]$, נצפה לקבל את התוצאה המופיע להלן באיור 1.1ב.

ככה זה בתאוריה



איור 1.1: הצגה של האות $x(t)$ והתמרת פוריה התאורטית שלו.

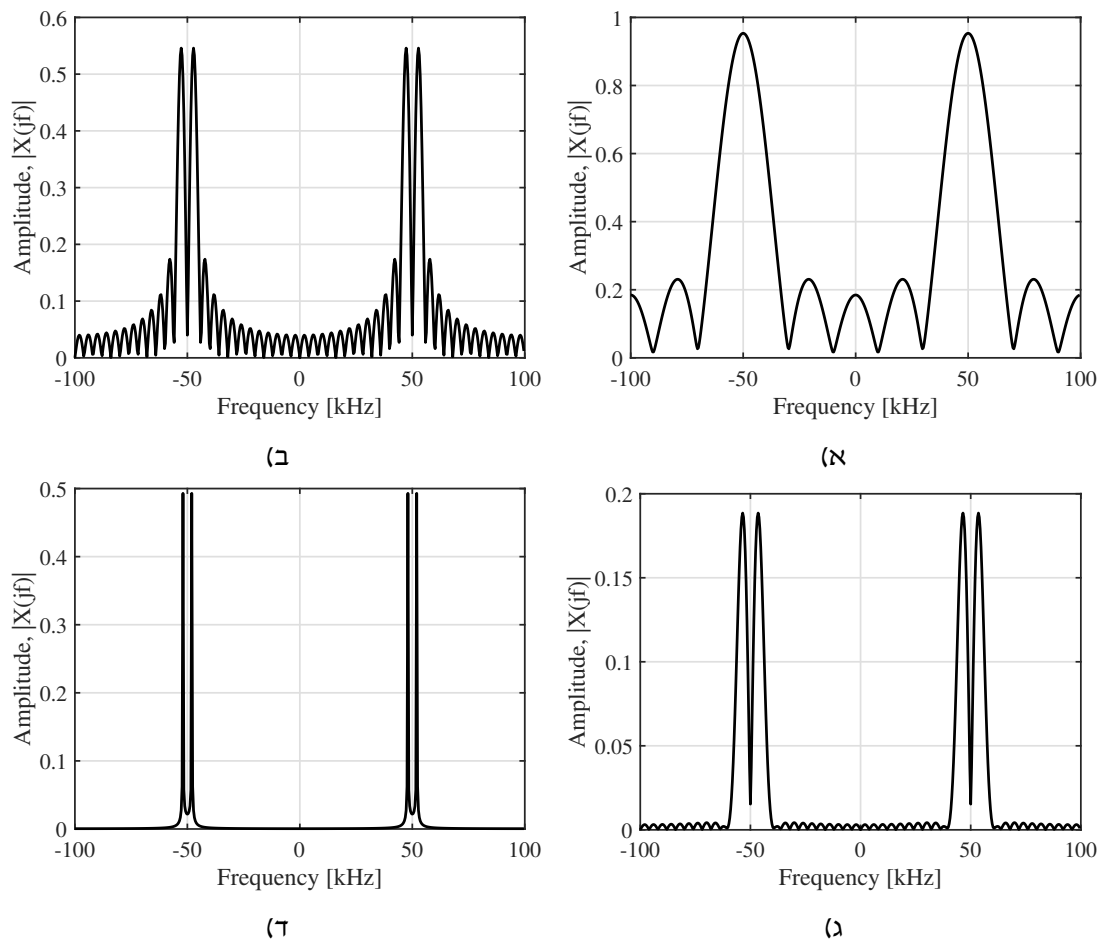
החישוב בפועל יכול להראות כמו אחת הדוגמאות שבאיור 1.2, המציג חלק מהאפשרויות של ההתמרה המתקבלת. חשוב להדגיש, שאפשרות מעשית היחידה לחישוב התמרת הפוריה של האות, היא חישוב התמרת פוריה של האות הדגום. שימוש המעשי של התמרת פוריה הוא אחד הנושאים החשובים שבספר, עליו נרחיב בפרק 8.

התמרת פוריה מעשית לפעמים יכולה להיות קצת מאתגרת

באופן מקורב, אפשר להבין את הצורות המתקבלות באופן הבא. זאת שאנו רואים במטלב חלק מהאות (במקום האות האינסופי בזמן המתואר על ידי הנוסחה) זהה מתמטית למכפלה בחלון, ובמישור התדר זהה לקונבולוציה בין ההלמים של ההתמרה הצפויה לצורת sinc . כמו כן, לדגום במישור הזמן גורם להוספת שכפולים ספקטראליים במישור התדר, כך שהגבר ההתמרה נראה מחזורי עבור אות בדיד. אך הגרפים הללו מאירים על קושי מעשי - לא תמיד

ניסיון להסביר בגדול את התוצאות

ניתן לבדיל בין תדרים סמוכים תוך צפיית הספקטרום (כאשר אין בעייה כזאת עבור אותות אנלוגיים תאורטיים).



איור 1.2: התמרת פוריה מעשית של האות $x(t)$, בהתאם לפרמטרים שונים.

1.3 מערכות

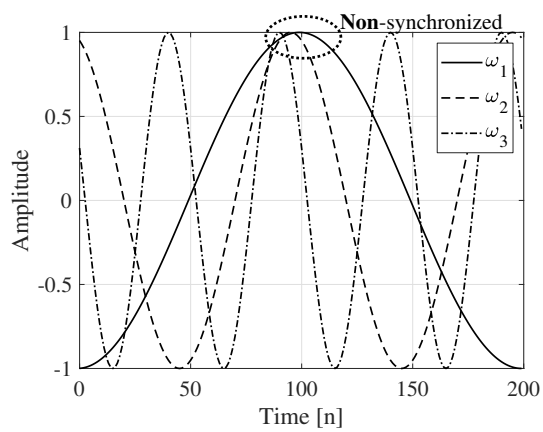
עיבוד אותות זה
מימוש נוסחאות
בתוכנה

חשוב להדגיש, שב-DSP מערכת הינה תוכנה או חומרה ספרתית ייעודית. העובדה הזאת מצד אחד יוצרת גמישות, ומאידך נותנת יותר מקום לטעויות מאשר העולם האנלוגי. להלן דוגמה למערכות הניתנות למימוש מדויק באופן ספרתי בלבד.

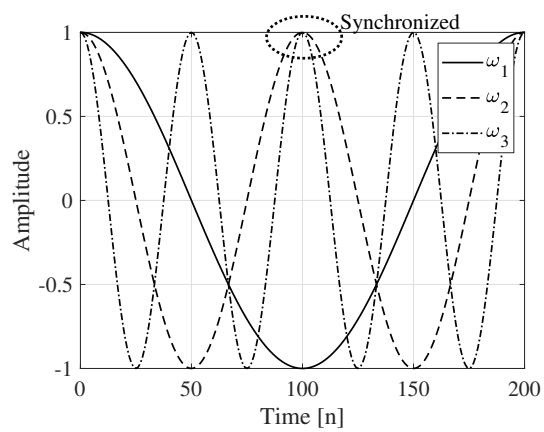
השהייה של מערכות

בעיה במערכות
הניתנות לפתרון
ספרתי בלבד

דוגמה 1.2: השהייה היא אחת הפרמרים החשובים של המערכות. בדוגמה להלן, נראה שוני בין המערכות בעלי השהייה זהה עבור כל דרכי כניסה אפשריים, מול השהייה שונה לכל תדר ותדר. במהלך הקורס, נלמד איך מתכננים מערכות מיוחדות בעלי השהייה זהה בכל התדרים (פרק 5.2).



(ב) השהייה שונה לכל תדר



(א) השהייה זהה לכל תדר

איור 1.3: המחשה של השהייה שונה עבור תדרים שונים.

פרק 2

סיווג אותות בדידים ומערכות בדידות

2.1 הקדמה

אותות מעולם האנלוגי נקראים גם אותות בזמן רציף.

צורת רישום

זמן רציף (הגדרה 2.1): אות בזמן רציף יוגדר ע"י סוגריים עגולים, $()$. לדוגמה, $x(t)$.

כשאומרים אותות ספרתיים, הכוונה בחוברת היא לאותות בזמן בדיד.

זמן בדיד (הגדרה 2.2): אות בזמן בדיד יוגדר ע"י סוגריים מרובעים, $[]$. לדוגמה, $x[n]$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$ (מספר שלם).

עכשיו נבחן קשר בין האותות.

דגימה (הגדרה 2.3): בהינתן זמן דגימה T או תדר דגימה $F_s = 1/T$, הקשר בין אות אנלוגי לספרתי הוא

$$(2.1) \quad s[n] = s(nT).$$

נושא הדגימה מוצג בהרחבה בהמשך.

2.2 אותות בדידים

2.2.1 אותות בסיסיים

נזכיר בקטע זה את הגדרותיהם של האותות היסודיים בעיבוד אותות ספרתי. האותות האלה מאוד דומים לאותות רציפים (פרט להלם, שבעצמו בדיד, ואפילו יותר נוח להגדיר כאות בדיד).

אותות החשובים

הלם בדיד (הגדרה 2.4):

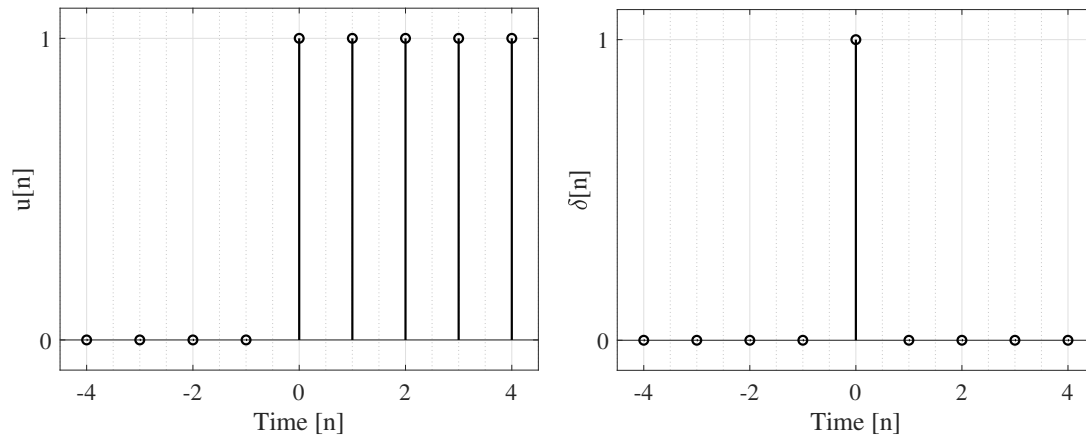
$$(2.2) \quad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

ראה גם איור 2.1א.

מדרגה בדידה (הגדרה 2.5):

$$(2.3) \quad u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

ראה גם איור 2.1ב.



(ב) מדרגה בדידה, $u[n]$

(א) הלם בדיד, $\delta[n]$

איור 2.1: אותות בסיסיים.

בדומה לקשר הלם רציף - מדרגה רציפה, ניתן למצוא בקלות את הקשר בין ההלם הבדיד והמדרגה הבדידה:

קשר בין אותות בסיסיים (תכונה 2.1): מתקיימים השוויוניים

$$(2.4) \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$(2.5) \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

דוגמה 2.1: פולס בדיד באורך N_0

$$x[n] = u[n] - u[n - N_0]$$

אות אקספוננציאלי (הגדרה 2.6): ההגדרה להלן מתארת משפחת אותות חשובה ביותר: האותות האקספוננציאליים (מעריכיים). בדומה לתחום האנלוגי, האותות הללו בעלי תכונות מתמטיות ופרקטיות חשובות.

האות $x[n]$ אקספוננציאלי, כאשר הוא בעל אחת הצורות הבאות:

$$(א2.6) \quad x[n] = z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$(ב2.6) \quad x[n] = e^{an}, \quad a \in \mathbb{C}$$

באופן ברור, המשוואות זהות לחלוטין עבור

$$z = e^a = e^{\operatorname{Re}(a)} \cos(\operatorname{Im}(a)) + j e^{\operatorname{Re}(a)} \sin(\operatorname{Im}(a)).$$

האותות האקספוננציאליים מגדירים בסיס מתאים לתיאור המערכות לינאריות וקבועות בזמן, כפי שנראה בהמשך.

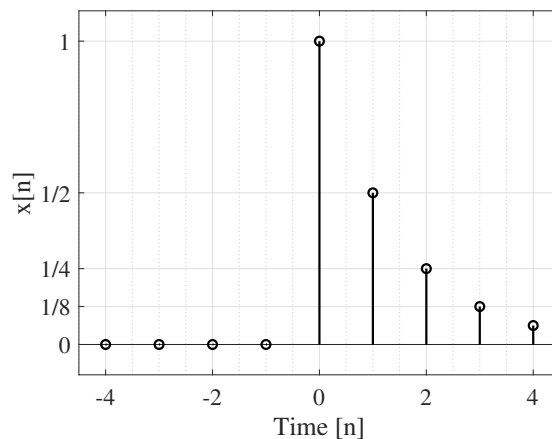
אותות הטריגונומטריים (תכונה 2.2): כלל האותות הטריגונומטריים מוגדרים כקומבינציה לינארית של אותות אקספוננציאליים, ובאופן כללי כל הפתרונות של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון או שני מתוארים בעזרת אותות אקספוננציאליים.

2.2.2 הגדרת האות

ישנם מספר דרכים להגדיר/לרשום אות בדיד, כמתואר בדוגמה להלן.

דוגמה 2.2: להלן ארבעה דרכים מקובלות:

איך רושמים
אותות?



$$\begin{aligned} x[n] &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ &= (0.5)^n u[n] \\ &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \end{aligned}$$

אותות שמתחילים בזמן שונה מאפס (הגדרה 2.7): עבור אותות שלא מתחילים בזמן 0, הדרך הנוספת לרשום אותם היא ע"י סימון $n = 0$ בעזרת חץ, לדוגמה $y[n] = \{1, 2, 4\}$.

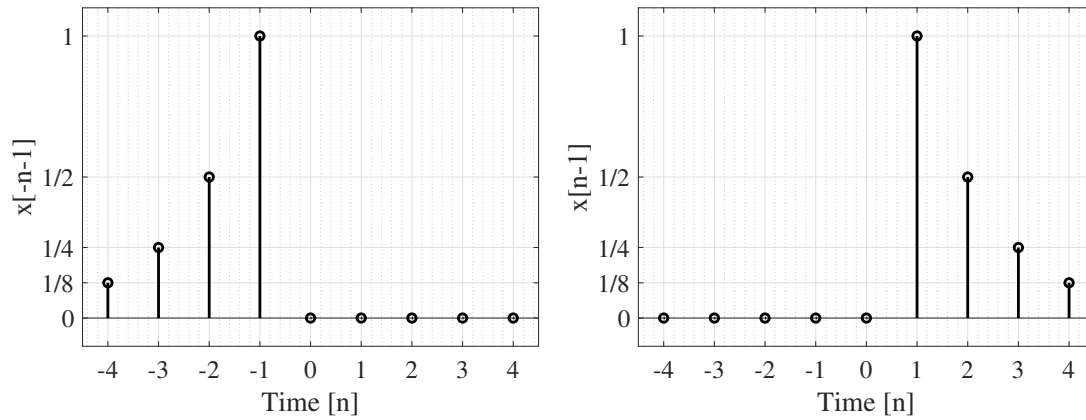
הערה 2.1! כל מה שלא נכתב באופן מפורש בייצוג $x[n] = \{\dots\}$ הוא 0.

2.2.3 פעולות על האות

יהי $x[n]$ אות בדיד נתון; ניתן ליצור אות חדש אשר מתבסס על $x[n]$, בעזרת פעולות בסיסיות על המשתנה החופשי, כלומר n . במקרה הבדיד הפעולות המותרות הינן:

שיקוף (הפיכה) בזמן (הגדרה 2.8): ניתן ליצור אות חדש $y[n]$ מוגדר על ידי הנוסחה $y[n] = x[-n]$.

הזזה בזמן (הגדרה 2.9): ניתן ליצור אות חדש $y[n]$ מוגדר על ידי הנוסחה $y[n] = x[n - n_0]$. נציין כי פרמטר ההזזה n_0 חייב להיות מספר שלם (חיובי או שלילי), על מנת שנשמר את הסקלה בזמן.

(ב) שיקוף והזזה, $x[-n-1]$ (א) הזזה, $x[n-1]$

איור 2.2: פעולות על האות $x[n] = (0.5)^n u[n]$ במישור הזמן, כאשר $n_0 = 1$.

לא נגדיר את פעולות הכיווץ והרחבה בשלב זה. ניתן לבצע אותן על ידי תת-דגימה (או דסימציה) ועל-דגימה (או אינטרפולציה), שנידונים בהמשך בפרק 6.

2.2.4 סיווג אותות בדידים

זוגי/אי זוגי (הגדרה 2.10): אות בדיד $x[n]$ הוא אות זוגי, כאשר $x[-n] = x[n]$. אות בדיד $x[n]$ הוא אות אי-זוגי, כאשר $x[-n] = -x[n]$.

סימטריה מובנת (תכונה 2.3): כל אות ניתן להציג כסכום של אות זוגי, $x_e[n]$, ואי זוגי, $x_o[n]$,

$$(2.7) \quad x[n] = x_e[n] + x_o[n],$$

כאשר

$$(2.8) \quad x_e[n] = \frac{1}{2} [x[n] + x[-n]]$$

$$(2.8) \quad x_o[n] = \frac{1}{2} [x[n] - x[-n]]$$

ההגדרה הבאה מרחיבה את המושג של זוגיות/אי זוגיות:

סימטרי / אנטיסימטרי (הגדרה 2.11): נתון $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (כפולה של חצי). אות בדיד $x[n]$ הוא אות סימטרי בייחס לציר הסימטרייה $t = \alpha$, כאשר

$$(2.9) \quad x[2\alpha - n] = x[n].$$

אות בדיד $x[n]$ הוא אות אנטי-סימטרי בייחס למרכז האנטי-סימטרייה $t = \alpha$, כאשר

$$(2.10) \quad x[2\alpha - n] = -x[n].$$

צד ימין/סיבתי (הגדרה 2.12): אות $x[n]$ הינו צד ימין כאשר קיים N_0 עבורו מתקיים $x[n] = 0$ לכל $n < N_0$. בנוסף, אם $N_0 \geq 0$, נאמר שהאות סיבתי.

צד שמאל/אנטי-סיבתי (הגדרה 2.13): אות $x[n]$ הינו צד שמאל כאשר קיים N_0 עבורו מתקיים $x[n] = 0$ לכל $n > N_0$. בנוסף, אם $N_0 \leq 0$, נאמר שהאות אנטי-סיבתי.

אות סופי בזמן (הגדרה 2.14): אות שהוא גם צד שמאל וגם צד ימין הינו אות סופי בזמן או אות חסום בזמן.

חסימה באמפליטודה (הגדרה 2.15): אות $x[n]$ הינו חסום באמפליטודה כאשר קיים $M \geq 0$ עבורו לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$|x[n]| \leq M.$$

ההגדרות הללו זהות להגדרות הקיימות עבור האותות הרציפים. לעומת זאת, הגדרתו של אות בדיד מחזורי היא משתנה.

מחזוריות (הגדרה 2.16): אות בדיד הוא מחזורי אם ורק אם קיים מספר $N \in \mathbb{Z}$ (שלם), כך שלכל $n \in \mathbb{Z}$

$$(2.11) \quad x[n + N] = x[n].$$

המספר הטבעי N_0 הקטן ביותר שמקיים את השורה לעיל נקרא המחזור של האות.

אזהרה על
מחזוריות

הערה 2.2 ! האות $x(t)$ יכול להיות מחזורי, ואילו האות הבדיד התואם $x[n]$ יכול להיות לא מחזורי. על מנת להוכיח את המחזוריות, נצטרך להתייחס להגדרה בלבד.

דוגמה 2.3: למשל, האות הבדיד $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ מחזורי, בעל זמן מחזור $N = 8$, מאחר ומתקיים

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n + 8)\right).$$

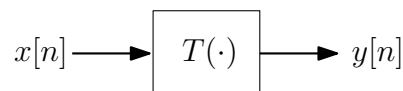
דוגמה 2.4: האות $x[n] = \cos(n)$ אינו מחזורי.

אנרגיה (הגדרה 2.17): אנרגיה של האות $x[n]$ נתונה ע"י

$$(2.12) \quad E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k]$$

2.3 מערכות בדידות

מערכות בדידות פועלות על אותות בדידים $x[n]$ (כניסה) ומחזירות אותות שונים $y[n]$ (יציאה, או מוצא).



זאת אומרת שדרך כללית כדי להגדיר מערכת היא על ידי משוואה מסוימת שעושה את הקשר כניסה-מוצא

$$y[n] = T(x[n], x[n - 1], y[n - 1], \dots)$$

דוגמה 2.5: כמות הכסף אשר נמצאת בתוכנית החיסכון בחודש מספר n , מתוארת על ידי הנוסחה

$$y[n] = 1.0046y[n-1] + x[n]$$

כאשר $y[n]$ הוא הסכום בחודש n ו- $x[n]$ היא הפקדה בחודש n .

2.3.1 סיווג מערכות בדידות

במידה והקשר כניסה-מוצא של מערכת בדידה ידוע, אנו יכולים לאפיין את המערכת זו לפי תכונותיה, בדומה למה שעשינו עבור מערכות בזמן רציף. בקטע זה מוזכרות התכונות הקלאסיות עבור המקרה הבדיד. מומלץ להוכיח את התכונות המופיעות בדוגמאות הקטע.

עם/בלי זכרון (הגדרה 2.18): מערכת בדידה היא רגעית (חסרת זכרון) כאשר נצטרך את הכניסה בהווה בלבד במטרה לחשב את ערך המוצא באותו זמן. מערכת בדידה היא בעלת זכרון כאשר אינה רגעית.

דוגמה 2.6: למשל, המערכת המוגדרת על ידי הנוסחה $y[n] = x[n]^2$ היא רגעית, והמשוואה $y[n] = x[n] + x[n+1]$ מאפיינת מערכת בעלת זכרון.

לינאריות (הגדרה 2.19): מערכת בדידה מוגדרת על ידי הקשר כניסה-מוצא T היא לינארית כאשר

$$(2.13) \quad T(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1T(x_1[n]) + a_2T(x_2[n])$$

משמעות הדברים היא: אם ידוע שעבור הכניסה $x_1[n]$ מתקבל המוצא $y_1[n]$ ואם ידוע שעבור הכניסה $x_2[n]$ מתקבל המוצא $y_2[n]$, אז עבור הכניסה $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ יתקבל $a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$. באופן כללי, אם מכניסים כניסה מסובכת לתוך מערכת לינארית, ניתן לפרק את הכניסה הזו כסכום של פונקציות פשוטות יותר (עיקרון סופרפוזיציה).

דוגמה 2.7: למשל, המערכת $y[n] = x[n] - x[n-1]$ לינארית, אך $y[n] = x[n] + 3$ אינה לינארית.

הערה 2.3 ! עבור מערכת לינארית קיימת התכונה המעניינת: "Zero input, zero output", כלומר אם מכניסים 0, אנו אמורים לקבל 0. לכן, אם מכניסים 0 תוך מערכת ומקבלים מוצא שונה מ-0, אנחנו יכולים להיות בטוחים שהמערכת אינה לינארית!

קביעות בזמן (הגדרה 2.20): מערכת בדידה מוגדרת על ידי הקשר כניסה מוצא $y[n] = T(x[n])$ היא קבועה בזמן, כאשר אם מכניסים את אותה כניסה מוזזת $x[n - n_0]$ יתקבל אותו מוצא מוזז $y[n - n_0]$ (באותו פרמטר n_0 !).

משמעות הדברים היא: המערכת תגיב באותו אופן לאותה כניסה, וזה לא תלוי בזמן התחלת הכניסה. במילים אחרות, המערכת אינה "מזדקנת" או משתנת בשימוש.

דוגמה 2.8: למשל, המערכת $y[n] = x[n] - x[n-1]$ קבועה בזמן, אך $y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]$ אינה קבועה בזמן.

דוגמה 2.9: בדוק האם מערכת $y[n] = x^2[n]$ היא לינארית ו/או קבוע בזמן.

פתרון: המערכת היא קבועה בזמן, כי מתקיים

$$\begin{aligned}x_1[n] &= x[n - n_0] \\ y_1[n] &= T(x_1[n]) = x^2[n - n_0] = y[n - n_0].\end{aligned}$$

המערכת היא לא לינארית, כי מתקיים

$$\begin{aligned}y_1[n] &= T(x_1[n]) = x_1^2[n] \\ y_2[n] &= T(x_2[n]) = x_2^2[n] \\ T(x_1[n] + x_2[n]) &= (x_1[n] + x_2[n])^2 \neq y_1[n] + y_2[n]\end{aligned}$$

סיבתיות (הגדרה 2.21): המערכת סיבתית כאשר מוצא בזמן N כלשהו תלוי בעבר $n < N$ או בהווה $n = N$ בלבד.

דוגמה 2.10: למשל, המערכת $y[n] = x[n - 1]$ סיבתית, אך המערכת $y[n] = x[n + 1]$ אינה סיבתית.

משמעות הדברים היא: לא ייתכן מצב שבו מערכת סיבתית תגיב ללא כניסה קודמת. כלומר עבור מערכת סיבתית כל מוצא מתקבל עקב כניסה בעבר או בהווה.

יציבות (הגדרה 2.22): מערכת בדידה היא יציבה כאשר עבור כל כניסה חסומה מתקבל מוצא חסום, הנקראת גם יציבות Bounded input, bounded output (BIBO).

דוגמה 2.11: למשל המערכת $y[n] = x[n] - x[n - 1]$ יציבה, אבל המערכת $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ אינה יציבה.

במציאות נתעניין במיוחד במסננים סיבתיים (כדי שנשלוט במסנן) ויציבים (כדי שהמסנן לא יתפוצץ כשמכניסים כניסה מדי גדולה).

הופכיות (הגדרה 2.23): מערכת בדידה היא הופכית כאשר עבור כל מוצא קיימת כניסה אחת בלבד בהתאם למוצא זה.

מה זאת אומרת? בד"כ, מתעניינים במסנן הופכי על מנת שנשחזר את האות המקורי. הנושא נידון בהרחבה בהמשך (פרק 5.3).

2.4 מערכות LTI

מערכות LTI (לינאריות וקבועות בזמן) הן מקרה פרטי של מערכות. כאשר מדובר על מערכת LTI, ישנה אופציה על מנת לאפיין אותה באופן שלם ע"י התגובה להלם.

תגובה להלם (הגדרה 2.24): נקרא לתגובה להלם של מערכת LTI כלשהי את המוצא המתקבל, כאשר הכניסה היא הלם בדיד. התגובה להלם בד"כ מסומנת ב- $h[n]$.

הצגה ע"י סכום אותות הלם (תכונה 2.4): כל אות ספרתי ניתן להציג ע"י סכום אותות הלם

מוזזים. בהינתן אות $x[n]$, ניתן לרשום

$$(2.14) \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

דוגמה 2.12: רשום אות $x[n] = \{a_0, a_1, a_2\}$ ע"י סכום אותות הלם מוזזים.

פתרון:

$$x[n] = a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] = \sum_{k=0}^2 a_k\delta[n-k]$$

2.4.1 קונבולוציה בדידה

הגדרת קונבולוציה **משפט.** נתונה מערכת LTI מוגדרת על ידי תגובתה להלם $h[n]$. עבור כניסה כלשהיא $x[n]$ המוצא המתקבל זהו הקונבולוציה הבדידה בין התגובה להלם ובין הכניסה, כלומר:

$$(2.15) \quad y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

הוכחה. נתבונן בטבלה להלן:

הסבר	מוצא	כניסה
תגובה להלם	$h[n]$	$\delta[n]$
לינארית	$a_0h[n]$	$a_0\delta[n]$
לינארית וקביעות בזמן	$a_1h[n-1]$	$a_1\delta[n-1]$
לינארית וקביעות בזמן	$a_kh[n-k]$	$a_k\delta[n-k]$
לינאריות	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_kh[n-k]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta[n-k]$
$a_k = x[k]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

תכונות הקונבולוציה הבדידה בעלת תכונות דומות לקונבולוציה רציפה.

אורך תגובה לאות סופי בזמן (תכונה 2.5): עבור אות כניסה באורך N_x ואורך תגובה להלם N_h , אורך התגובה המתקבלת

$$(2.16) \quad N_y = N_h + N_x - 1$$

נזכיר כעת את התכונות החשובות של הקונבולוציה הבדידה:

רצף שתי מערכות

קומוטטיביות (תכונה 2.6): אנו צופים בשני אותות / תגובות להלם של מערכות LTI בזמן בדיד אשר נקראים $h_1[n]$ ו- $h_2[n]$. עבורם מתקיים $h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$.

הוכחה.

$$(2.17) \quad \begin{aligned} h_1[n] * h_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] h_2[n-k] \\ &\stackrel{k'=n-k}{=} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[n-k'] h_2[k'] \\ &= h_2[n] * h_1[n] \end{aligned}$$

בפועל, קומוטטיביות הינה תכונה חשובה מאוד, מכיוון שהיא מאפשרת להחליף את סדר הבלוקים בחיבור, כמתואר באיור 2.3.



איור 2.3: סדר חישוב מערכות LTI אינו משנה (קומוטטיביות).

רצף שלוש מערכות

אסוציאטיביות (תכונה 2.7): אנו צופים בשלושה אותות בזמן בדיד אשר נקראים $h_1[n]$, $h_2[n]$ ו- $h_3[n]$. עבורם מתקיים

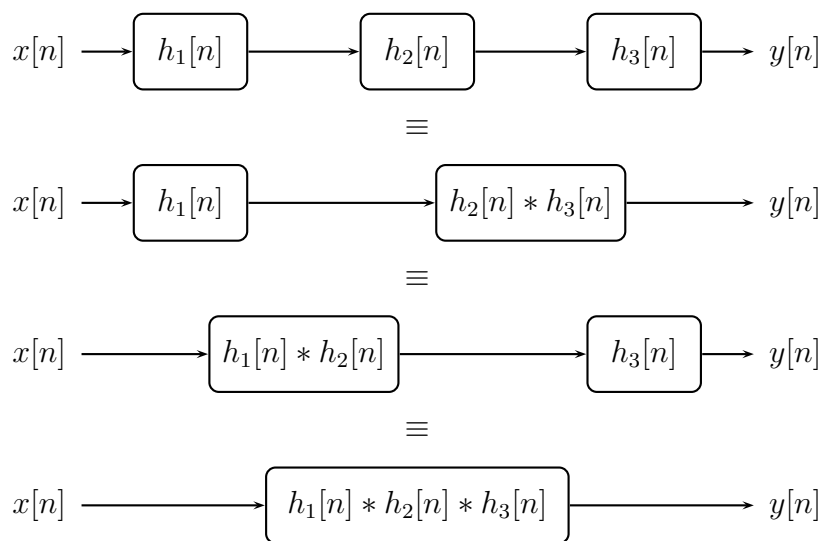
$$(2.18) \quad (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_3[n]) = h_1[n] * h_2[n] * h_3[n].$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h_1 * h_2)[k] h_3[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[k'] h_2[k-k'] \right) h_3[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[k'] h_2[k-k'] h_3[n-k] \\ &= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[k'] \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k-k'] h_3[n-k] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[k'] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_2[m] h_3[n-m-k'] \right) \\
&= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h_1[k'] (h_2 * h_3)[n-k'] \\
&= h_1[n] * (h_2[n] * h_3[n])
\end{aligned}$$

בפועל, האסימטיות מאפשרת לנתח חיבור טורי של מערכות LTI מאיזה שהיא נקודה התחלתית, כך שניתן לפתח את התגובה להלם הכוללת מנקודה פלונית בשרשרת, כמתואר באיור 2.4.



איור 2.4: סדר חישוב מערכות LTI אינו משנה (אסוציאטיביות).

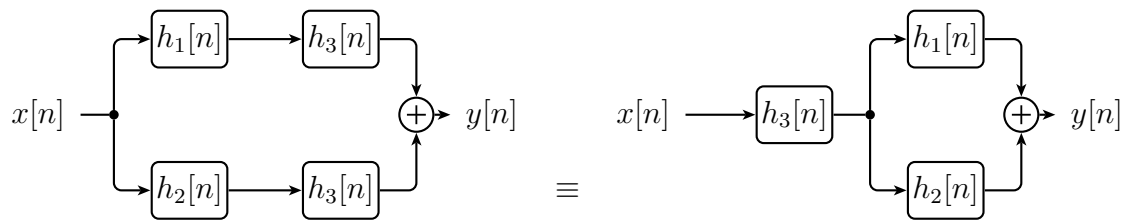
פילוג (תכונה 2.8): עבור שלוש מערכות מתקיים

$$(2.19) \quad (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] = h_1[n] * h_3[n] + h_2[n] * h_3[n].$$

הוכחה. מידית לפי הגדרת הקונבולוציה.

בעזרת תכונת הפילוג, ניתן לטעון ששני סכימות הבלוקים המופיעים באיור 2.5 זהים לחלוטין.

**חיבור מערכות
במקביל**



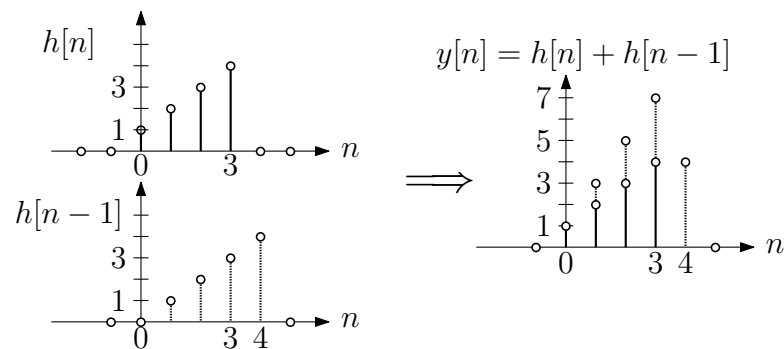
איור 2.5: פילוג

בפועל, ניתן להשתמש בתכונות הללו כדי לקבל מבנה מסנן עבורו סכימת המלבנים כולל מספר קטן יותר של פעולות. הדבר גורם לפחות חישובים, ולכן לעיבוד זריז יותר של הנתונים הספרתיים.

דוגמה 2.13: נתונה מערכת בעלת תגובה להלם $h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$. חשב תגובה לכניסה $x[n] = \{1, 1\}$

פתרון:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= (\delta[n] + \delta[n-1]) * h[n] \\ &= h[n] + h[n-1] = \{1, 2+1, 3+2, 4+3, 4\} = \{1, 3, 5, 7, 4\}. \end{aligned}$$



איור 2.6: דוגמה לחישוב גרפי של התגובה לאות הנתון.

2.4.2 סיבתיות ויציבות עבור מערכות LTI

במערכות LTI
הדברים יותר
פשוטים

כאשר מערכת היא LTI, נוכל לסווג את הסיבתיות והיציבות שלה בעזרת תכונות נוספות. חשוב לזכור כי התכונות האלה מתקיימות רק במקרה של מערכת LTI!

סיבתיות (תכונה 2.9): נתונה מערכת LTI מוגדרת על ידי תגובתה להלם $h[n]$. המערכת סיבתית אם ורק אם $h[n] = 0$ עבור $n < 0$.

הוכחה. נדרש להוכיח את שני הכיוונים:

1. נניח כי $h[n] = 0$ עבור $n < 0$; ניתן לכתוב כי

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k], \end{aligned} \quad (2.20)$$

כלומר המוצא בזמן n תלוי בעבר או בהווה בלבד, לכן המערכת סיבתית.

2. נניח כעת כי המערכת סיבתית. בהנחה שקיים $M < 0$, כך ש- $h[M] \neq 0$, מתקבל

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] + x[M]h[n-M] \end{aligned} \quad (2.21)$$

כלומר המוצא תלוי בעתיד. מכיוון שהשוויון זה סותר את הנחת הסיבתיות שעשינו, זאת אומרת ש- $h[n] = 0$ עבור כל מספר $n < 0$.

יציבות (תכונה 2.10): נתונה מערכת LTI מוגדרת על ידי תגובתה להלם $h[n]$. המערכת יציבה אם ורק אם

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.22)$$

הוכחה. 1. נניח כי $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. עבור כל כניסה חסומה $|x[n]| \leq M$ מתקבל

$$|y[n]| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.23)$$

לכן המערכת יציבה.

2. כעת מניחים שהמערכת יציבה. עבור מספר n , בוחרים את הכניסה $x[k] = \text{sign}(h[n-k])$, ומקבלים:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \text{sign}(h[k]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (2.24)$$

עקב הנחת היציבות, ניתן לומר כי הטור האחרון מתכנס לגבול סופי.

אותות עצמיים של מערכות LTI (תכונה 2.11): האותות האקספוננציאליים הם האותות העצמיים של המערכות LTI. ז"א, כל אות מוצא הוא קומבינציה לינארית של אותות האקספוננציאליים.

הוכחה. נסמן ב- $h[n]$ את התגובה להלם של המערכת LTI הנבחנת. מזינים בתוכה כניסה $x[n] = z^n$. במוצא מתקבל

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \right) z^n \\ &:= H(z)z^n \end{aligned}$$

לכן $x[n]$ הוא אות עצמי.

בין היתר, אנחנו מסיקים מהתכונה הקודמת כי להזנת התדר $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, מתקבל $H(e^{j\omega})x[n]$; במקרה הזה $H(e^{j\omega})$ משפיע על ההגבר ועל תוספת פאזה, אך אינו משנה את התדר ω_0 . בקיצור, מערכת LTI מאזן את התדרים הקיימים בתוך אות כניסה, אך אינו יוצר תוכן ספקטראלי חדש.

דוגמה 2.14: מצא פתרון של משוואת הפרשים

$$x[n] = 5x[n-1] - 6x[n-2]$$

עם תנאי התחלה $x[0], x[1]$.

פתרון: נניח פתרון מהצורה $x[n] = z^n$. מתקבל,

$$\begin{aligned} z^n &= 5z^{n-1} - 6z^{n-2} \\ z^2 - 5z + 6 &= 0 \\ z_1 = 2, z_2 &= 3 \\ \Rightarrow x[n] &= c_1 2^n + c_2 3^n \\ \left. \begin{aligned} x[0] &= c_1 + c_2 \\ x[1] &= 2c_1 + 3c_2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow c_1, c_2 \end{aligned}$$

2.4.3 IIR-ו FIR

ההגדרה הבאה ייחודית למסננים דיגיטליים:

מסנן FIR/IIR (הגדרה 2.25): בהינתן מערכת LTI בעלת תגובה להלם $h[n]$, נגיד שהמערכת **FIR** (Finite Impulse Response), בעלת תגובה להלם סופית) כאשר $h[n]$ בעל תמך סופי (קיים N , עבורו $h[n] = 0$ לכל $|n| > N$). מערכת LTI שאינה FIR הינה מערכת IIR (Infinite Impulse Response), בעלת תגובה להלם אינסופית).

קבוצות החשובות
של מסננים

למעשה, המסננים מסוג FIR קלים לתכנון, אך אינם מדויקים בהגבר. ניתן לקבל מסננים IIR הרבה יותר מדויקים בתדר, אבל המחיר לשלם הינו קושי בתכנון ופאזה לא לינארית. הנושאים האלה ידונו בהמשך.

פרק 3

התמרת Z

3.1 הקדמה

אנו מציגים כאן שתי הצדקות להגדרת התמרת z , אחת מבוססת על האותות העצמיים של המערכות הלינאריות והקבועות בזמן, השנייה על מישור הזמן.

3.1.1 מבט בעזרת המשוואות הדיפרנציאליות

התמרת לפס
הייתה חשובה

התבונן בדוגמה של מערכת LTI בזמן רציף, מיוצגת ע"י משוואה דיפרנציאלית המקשרת בין כניסה $x(t)$ ליציאה $y(t)$, מהצורה

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t),$$

ותנאי התחלה המתבקשים. ניתן לקבל תגובה להלם $h(t)$ של המערכת ואות יציאה עבור כניסה נתונה, תוך שימוש בהתמרת לפס (Laplace), מתוך הקשר מהצורה

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad s > |\sigma_0|$$

עבור מערכת LTI במישור זמן בדיד משוואת הפרשים (באנגלית גם נקראת difference equation) המקבילה היא

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

המטרה של הפרק

המטרה של ההתמרה המתבקשת בזמן בדיד היא לקשר בין:

(1) תגובה להלם $h[n]$

(2) קשר קונבולוציה $y[n] = h[n] * x[n]$

(3) פתרון המשוואה דיפרנציאלית

בד"כ, משוואת הפרשים תהיה פשוטה בהרבה מקשר הקונבולוציה.

דוגמה 3.1: מערכת בעלת תגובה להלם $h[n] = a^n u[n]$ ניתו לייצג גם כקונבולוציה $y[n] = h[n] * x[n]$ עם תגובה להלם אינסופית בזמן, וגם כמשוואת הפרשים $y[n] = ay[n-1] + x[n]$, שהיא פשוטה בהרבה.

3.1.2 מבט בעזרת האותות העצמיים

כפי שהוצג בפרק הקודם (תכונה 2.11), האותות העצמיים מאפשרים לנו לאפיין איך מערכת LTI מגיבה לתדר נתון, וראינו שמערכת LTI משנה את עוצמתו של אות הכניסה ומוסיף קידום / השהייה, אך אינה משנה את תדר אות הכניסה. באופן מתמטי, כאשר מוזן בכניסה $x[n] = z^{-n}$, מתקבל במוצא

$$y[n] = H(z)z^{-n},$$

כאשר הביטוי $H(z)$ מהווה את שינויי הגבר ופאזה. לאור הנידון, הביטוי $H(z)$ כפונקציה של התדר z מייצג את פונקציית התמסורת של המערכת, LTI, ומגדירה את ההתמרה זמן-תדר הנדרשת לניתוח מערכות LTI במישור התדר.

3.2 הגדרה

התמרת Z (הגדרה 3.1): יהי $x[n]$ אות בדיד כלשהו. התמרת Z של האות $x[n]$, אשר מסומנת ב- $X(z)$ מוגדרת כדלהלן:

$$(3.1) \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

כאשר $z \in \mathbb{C}$ (מספר מרוכב כלשהו).

לפעמים נרשום $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ או $X(z) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} x[n]$, כדי להגיד "התמרת Z של האות הבדיד $x[n]$ ". ה- $X(z)$ גם נקראת **פונקציית התמסורת** של המערכת. התמרת Z עבור אותות בזמן בדיד, היא מקבילה של התמרת לפלס בזמן רציף.

דוגמה 3.2: נתון האות הבדיד

אינטואיציה

הגדרה

דוגמה מספרית

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\} = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

על פי הגדרתה, התמרת Z של אות הינה:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^3 z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \\ &= \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

סכום סדרה הנדסית

ההתמרה המתקבלת היא סכום של טור סופי, ובעלת ערך סופי עבור כל ערכי $\{z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$.

הערה 3.1! יש לשים לב, כי $X(z=1) = 4$. ניתן להראות זאת ע"י כלל לופיטל (L'Hospital's Rule), או כאשר שמים לב לריבוי שורשים מהצורה

$$X(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3(z-1)} = \frac{(z-1)(z+1)(z+j)(z-j)}{z^3(z-1)} = \frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3}.$$

3.3 תחום ההתכנסות של התמרת Z

3.3.1 הגדרה

הצורך להגדיר ערכי z , עבורם הסכום הינו סופי, דומה לצורך להגדיר תחום התכנסות, כפי שעושים עם התמרת לפלס. נמחיש את הצורך ע"י דוגמה להלן.

דוגמה 3.3: נתעניין באות $x[n] = a^n u[n]$. לאחר חישוב מתקבלת התמרה

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ (3.2) \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a z^{-1} \right)^k \quad |a z^{-1}| < 1 \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad ROC_X = |z| > |a| \end{aligned}$$

מאידך, עבור אות $y[n] = -a^n u[-n-1]$ מתקבל

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k z^{-k} \\ &\stackrel{m=-k}{=} - \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^m \\ (3.3) \quad &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} z \right)^m \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z \right)^m \\ &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} \quad |a^{-1} z| < 1 \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad ROC_Y = |z| < |a| \end{aligned}$$

תמיד חייבים תחום ההתכנסות!

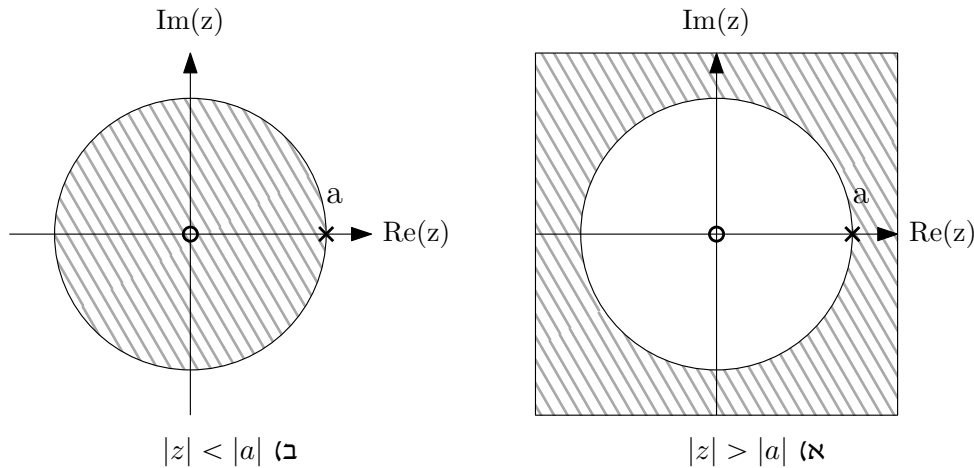
אע"פ שהאותות המקוריים שונים לגמרי, רואים כי הביטויים $X(z), Y(z)$ זהים, למעט ההבדל

בין התנאים לסכום סדרה הנדסית אינסופית, שהם:

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

$$|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

התנאים אלה נקראים תחום ההתכנסות של התמרות Z. תחומי ההתכנסות של האותות האלה מוצגים באיור מס' 3.1.



איור 3.1: תחומי ההתכנסות של הדוגמה

תחום ההתכנסות (הגדרה 3.2): נתון אות בדיד $x[n]$ בעל התמרת $X(z)$. תחום ההתכנסות¹ של $X(z)$ הוא קבוצת המספרים המרוכבים z , כך שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ מתכנס לגבול סופי. נכתוב באופן מתמטי:

$$(3.4) \quad ROC_x = \left\{ z \in \mathbb{C}; \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} < \infty \right\}$$

כלומר, תחום ההתכנסות המתאים להתמרת Z הוא חלק המישור המרוכב, וניתן לצייר אותו. כמו כן, ניתן להגדיר את מפת האפסים והקטבים.

אפסים (הגדרה 3.3): נקודה z_0 , כך ש- $X(z_0) = 0$ נקראת **אפס** (zero), ומסומנת במישור Z המרוכב ב- $\circ$.

קטבים (הגדרה 3.4): נקודה z_0 , כך ש- $\lim_{z \rightarrow z_0} X(z) = \infty$ נקראת **קוטב** (pole), ומסומנת במישור Z המרוכב ב- $\times$.

בדומה להתמרת לפלס, ניתן לשרטט את מפת האפסים והקטבים בהתאם לפונקצית תמסורת מסוימת $X(z)$.

¹תחום ההתכנסות, ROC=Region of Convergence

הערה 3.2 ! אין להתבלבל בין z ו- z^{-1} תוך כדי חישוב תחום ההתכנסות! המשתנה החופשי הוא z , אע"פ שהביטוי z^{-1} מופיע באופן טבעי בחישובינו.

הערה 3.3 ! חשוב לפרט את תחום ההתכנסות בכל מקרה. כדי לאפיין אות בדיד בעזרת התמרות Z, חייב לתת גם את הביטוי הסגור של ההתמרה וגם תחום ההתכנסות שלו.

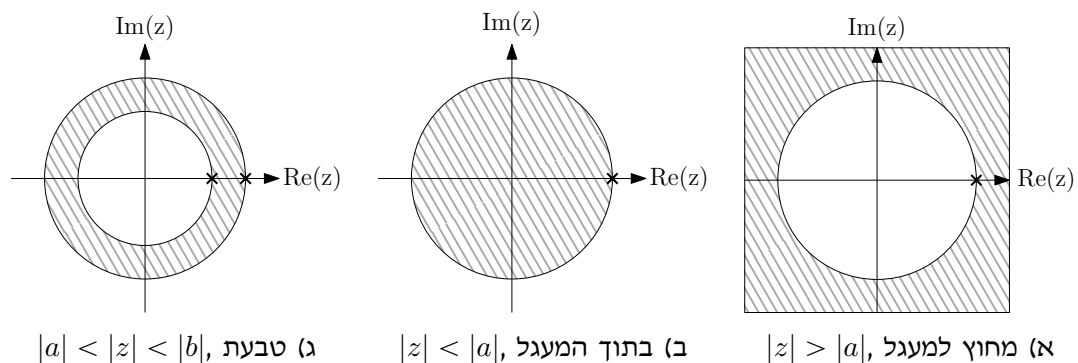
דוגמה 3.4: עבור $|z| > |a|$, $\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$, $x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}$, האפס הוא ב- $z_0 = 0$ וקוטב ב- $z_p = a$ (איור 3.1).

3.3.2 תכונות כלליות

התכונה הבאה עונה על השאלה הטבעית: "מהי הצורה של תחום ההתכנסות?".

סוגים אפשריים

צורת תחום ההתכנסות (תכונה 3.1): תחום ההתכנסות הוא קבוצה בעלת סימטריה מרכזית בייחס לנקודה $z = 0$. כמו כן, רק הצורות הבאות בלבד מתאימות כתחומי התכנסות:



איור 3.2: תחומי ההתכנסות אפשריים

הוכחה. ניתן לבדוק את התכונה באופן טבעי, אם מתייחסים להגדרתו של תחום ההתכנסות. למעשה, אם נניח כי איזושהי נקודה z שייכת לתחום ההתכנסות, אז כל נקודה מסוג $z_1 = |z|e^{j\omega}$, גם שייכת לתחום ההתכנסות, לכן תחומי ההתכנסות סימטריים בקשר למרכז המישור. בכדי להוכיח כי תחום ההתכנסות תמיד רציף, יש להשתמש בתוצאה הבאה: אם $z_1 = \rho_1 e^{j\theta} \in ROC$ ו- $z_2 = \rho_2 e^{j\theta} \in ROC$ עבור כל $0 \leq \lambda \leq 1$ מתקיים $\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 \in ROC$. עקב כך הצורות המותרות לתחומי ההתכנסות הן משלושת הסוגים באיור 3.2 בלבד.

הערה 3.4 ! כתוצאה מידיית של התכונה לעיל, ניתן לטעון כי תחום ההתכנסות אינו תלוי במשתנה החופשי z . זאת גם דרך לבדוק את הטעויות: אם מקבלים תחום שעדיין תלוי במשתנה החופשי, קיימת טעות חישוב.

קטבים בתוך תחום ההתכנסות (תכונה 3.2): תחום ההתכנסות אינו מכיל קטבים.

הוכחה. בעזרת הגדרתו של תחום ההתכנסות.

תחום ההתכנסות של אות סיבתי (תכונה 3.3): עבור אות צד ימין בעל התמרה $X(z)$ רציונלית (פולינום חלקי פולינום),

$$(3.5) \quad ROC_x = \{|z| > |r_0|\},$$

כאשר $|r_0|$ הוא ההקטב הגדול ביותר.

הסבר בהרחבה: נתון אות סיבתי (צד-ימין), כלומר, אות מסוים כך ש- $x[n] = 0, n < N$. נניח, שקיים מספר ממשי חיובי r_0 , ששייך ל-ROC, כך ש- $\{|z| = r_0\} \subset ROC_x$. ניתן לטעון כי: $\{|z| \geq r_0\} \subset ROC_x$.

הוכחה. נניח $\{|z| = r_0\} \subset ROC_x$. עבור $r_1 > r_0$, מתקיים $|r_1^{-n}| < |r_0^{-n}|$. לכן המעגל $\{|z| = r_1\} \in ROC_x$, ומתקיים $\{|z| \geq r_0\} \subset ROC_x$.

לסיכום, כאשר פונקצית התמסורת היא פונקציה רציונלית והאות הוא סיבתי, תחום ההתכנסות הינו "מחוץ למעגל", ומוגבל על ידי קוטב. עבור $|r_0|$ שווה לקוטב הגדול ביותר, וניתן לכתוב כי $ROC_x = \{|z| > |r_0|\}$.

תחום ההתכנסות של אות אנטי-סיבתי (תכונה 3.4): בור אות צד שמאל בעל פונקצית התמרה $X(z)$ רציונלית (פולינום חלקי פולינום),

$$ROC_x = \{|z| < |r_0|\},$$

כאשר $|r_0|$ הוא ההקטב הקטן ביותר.

הסבר בהרחבה: נתון אות אנטי-סיבתי (צד-שמאל), כלומר, אות מסוים כך ש- $x[n] = 0, n < -N$. נניח, שקיים מספר ממשי חיובי r_0 , ששייך ל-ROC, כך ש- $\{|z| = r_0\} \subset ROC_x$. ניתן לטעון כי: $\{|z| \leq r_0\} \subset ROC_x$.

הוכחת התכונה לעיל זהה להוכחה של תכונה הקודמת.

ניתן לתת בסיכום את התכונה הבאה:

צורת תחום ההתכנסות (תכונה 3.5): עבור אות $x[n]$ כלשהו, מוגדר עבור $n \in (N_1, N_2)$ (ייתכן כי N_1, N_2 אינסופיים):

1. אם $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$ (אות סיבתי), תחום ההתכנסות הוא בצורת "מחוץ למעגל".

2. אם $N_1 < 0, N_2 < 0$ (אות אנטי-סיבתי), תחום ההתכנסות הוא בצורת "בתוך המעגל".

3. אם $N_1 < 0, N_2 > 0$ (אות לא סיבתי), תחום ההתכנסות הוא "טבעת".

הוכחה. במקרה הראשון, האות הוא סיבתי, על כן תחום ההתכנסות מסוג "מחוץ למעגל". במקרה השני, האות אנטי-סיבתי, על כן תחום ההתכנסות הינו מסוג "בתוך המעגל". במקרה האחרון, לא סיבתי, פונקצית התמסורת היא בצורה:

$$(3.6) \quad X(z) = \sum_{k=N_1 < 0}^{N_2 > 0} a_k z^{-k} = \sum_{k=N_1}^{-1} a_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{N_2} a_k z^{-k},$$

על כן תחום ההתכנסות הוא בהתאם.

למשל, אם מדובר על **אות סופי בזמן**, תחום ההתכנסות הינו המישור המרוכב המלא, פרט ל-0 אם האות כולל חלק סיבתי, ולאינסוף אם האות כולל חלק אנטי-סיבתי.

דוגמה 3.5: חשב התמרת Z של האות

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

פתרון:

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{|z| > \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}}_{|z| > |\frac{1}{3}|} = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12}\right)}{\underbrace{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)}_{|z| > \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})}}$$

מפת קטבים ואפסים ותחום ההתכנסות עבור הדוגמה מופיעים באיור 3.3.

דוגמה 3.6: נתון אות

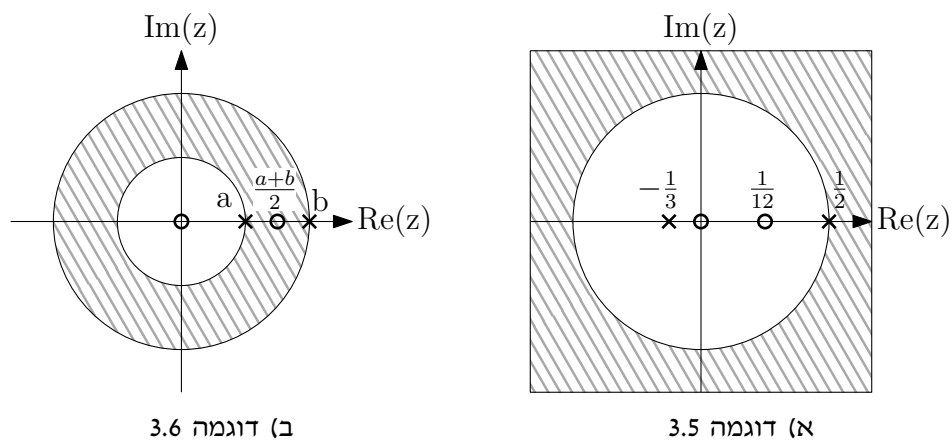
$$x[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases} = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$$

חשב התמרת Z של האות, לרבות תחום ההתכנסות.

פתרון:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - b} \\ &= \frac{2z \left(z - \frac{a+b}{2}\right)}{(z - a)(z - b)} \quad ROC = |z| > |a| \cap \{|z| < b\} \end{aligned}$$

מפת קטבים ואפסים ותחום ההתכנסות עבור הדוגמה מופיעים באיור 3.3.



איור 3.3: דוגמה לתחומי ההתכנסות.

3.4 התמרות שימושיות

הטבלה להלן מסכמת את התמרות Z המקובלות ביותר ותחומי ההתכנסות שלהן.

התמרות Z שימושיות 3.1: טבלה

Signal	Z transform	ROC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n - m]$	z^{-m}	$\mathbb{C} - \{0\}$ if $m > 0$, $\mathbb{C} - \{\infty\}$ if $m < 0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a$
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

3.5 תכונותיה של התמרת Z

להלן רשימה של תכונות שימושיות של התמרת Z.

לינאריות (תכונה 3.6): נתונים האותות $x_1[n], x_2[n]$ בעלי התמרות $X_1(z), X_2(z)$ ותחומי התכנסות R_1, R_2 . התמרת Z של קומבינציה לינארית כלשהיא הינה:

$$(3.7) \quad \mathcal{Z} \{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(z) + bX_2(z).$$

במידה והתמרת Z היא פונקציה רציונלית ואין צמצום בין קטבים ואפסים של $X_1(z), X_2(z)$, ניתן לומר כי $ROC_{ax_1+bx_2} = R_1 \cap R_2$.

הוכחה. על פי הגדרתה של התמרת Z.

הזזה במישור הזמן (תכונה 3.7): נתון האות $x[n]$ בעל התמרה $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R . התמרת Z של האות המוזז ב- m הינה:

$$(3.8) \quad \mathcal{Z}\{x[n-m]\} = z^{-m}X(z), \quad ROC = R \pm \{0, \infty\},$$

הוכחה.

$$(3.9) \quad z^{-m}X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k-m} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'-m]z^{-k'} = \mathcal{Z}\{x[n-m]\}$$

כיווץ במישור התדר (תכונה 3.8): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R . התמרת Z של האות המאופנן הינה:

$$(3.10) \quad \mathcal{Z}\{(z_0^n x[n])\} = X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0|R,$$

התכונה זו נקראת גם תכונת האפנון.

הוכחה.

$$(3.11) \quad X\left(\frac{z}{z_0}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z_0^k x[k])z^{-k} = \mathcal{Z}\{(z_0^n x[n])\},$$

ואם z נמצא בתוך R , גם $|z_0|z$ יימצא בתוך תחום ההתכנסות של האות המאופנן.

שיקוף בזמן (תכונה 3.9): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R . התמרת Z של האות המשוקף הינה:

$$(3.12) \quad \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad ROC = \frac{1}{R}$$

הוכחה.

$$(3.13) \quad X\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]z^{-k} = \mathcal{Z}\{x[-n]\}$$

לכל z אשר נמצא בתוך R , $\frac{1}{z}$ יימצא בתוך תחום ההתכנסות של $\mathcal{Z}\{x[-n]\}$.

התמרת Z של האות הצמוד (תכונה 3.10): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R . התמרת Z של האות המשווק הינה:

$$(3.14) \quad \mathcal{Z}\{x^*[n]\} = X^*(z^*), \quad ROC = R$$

הוכחה.

$$(3.15) \quad \begin{aligned} X^*(z^*) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-k} \right]^* \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^{-k} \right)^* \right]^* \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-k} = \mathcal{Z}\{x^*[n]\} \end{aligned}$$

נגזרת התמרת Z (הגדרה 3.5): נתון האות $x[n]$ בעל התמרת $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ותחום התכנסות R . מתקבל:

$$(3.16) \quad \mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{dX}{dz}(z), \quad ROC = R \pm \{0\}$$

הוכחה. מתקבל לאחר חישוב:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}\{nx[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k]z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]kz^{-k} \\ &= -z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{d}{dz} z^{-k} \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = -z \frac{dX}{dz}(z) \end{aligned}$$

דוגמה 3.7: חשב התמרה של $x[n] = na^n u[n]$

פתרון:

$$\begin{aligned} x[n] &= n \underbrace{a^n u[n]}_{\substack{\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|}} \\ \Rightarrow X(z) &= -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right) \\ &= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

קונבולוציה (תכונה 3.11): תכונת הקונבולוציה זוהי התכונה החשובה ביותר לגבי התמרת Z בקשר למערכות לינאריות וקבועות בזמן.

נתונים האותות $x_1[n], x_2[n]$ בעלי התמרות $X_1(z), X_2(z)$ ותחומי ההתכנסות R_1, R_2 . מתקבל:

$$(3.18) \quad \mathcal{Z} \{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z), \quad ROC \supset R_1 \cap R_2$$

הוכחה. מתקבל לאחר חישוב:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right) z^{-n+k} z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n+k} \right) \\ &= X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

תחום ההתכנסות מכיל את החיתוך בין תחומי ההתכנסות.

הערה 3.5! יש לציין כי ברוב המקרים תחום ההתכנסות שווה לחיתוך בין תחומי ההתכנסות, פרט למקרים כאשר כמה קטבים מצטמצמים - ראו את הדוגמה להלן.

דוגמה 3.8: נתונים האותות

זהירות
בכפל/חלוקה של
פוליומים

$$\begin{aligned} x_1[n] &= (0.5)^n u[n] \\ x_2[n] &= \delta[n] - 0.5\delta[n-1] \end{aligned}$$

חשב $x_1[n] * x_2[n]$.

פתרון: התמרות הן

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 0.5 \\ X_2(z) &= 1 - 0.5z^{-1}, \quad ROC = \mathbb{C} - \{0\} \\ X_1(z)X_2(z) &= 1 \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \delta[n] \end{aligned}$$

תחום ההתכנסות המתקבל הינו המישור המרוכב השלם, וגדול יותר מאשר החיתוך בין תחומי ההתכנסות של X ו-Y. בנוסף, ניתן לראות שמדובר ברצף של מערכת וההופכית שלה, כמו שיבואר בהרחבה בפרק 5.3.

דוגמה 3.9: נתונים האותות

$$x_1[n] = u[n]$$

$$x_2[n] = a^n u[n]$$

חשב $x_1[n] * x_2[n]$.

פתרון: התמרות הן

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

$$\begin{aligned} X_1(z)X_2(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - a} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - a \frac{1}{1 - az^{-1}} \right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1[n] * x_2[n] &= \frac{1}{1 - a} \left[u[n] - a (a^n u[n]) \right] \\ &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n] \end{aligned}$$

משפט הערך ההתחלתי ומשפט הערך הסופי המשפטים להלן מתקיימים עבור אותות סיבתיות (צדי-ימין) בלבד, ונותנים מידע על התנהגותה של התמרת Z או על התנהגותו של האות הבדיד בסביבת אינסוף.

משפט הערך ההתחלתי (הגדרה 3.6): אם $x[n]$ הוא אות צד ימין, מתקיים

$$(3.19) \quad x[0] = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$$

הוכחת המשפט טריוויאלית, על פי הגדרתה של התמרת Z.

משפט הערך הסופי (הגדרה 3.7): עבור אות יציב $x[n]$ בעל התמרת $X(z)$, כך שקטביה יהיו במעגל היחידה:

$$(3.20) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z) + x[0]$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 (z-1)X(z) &= \mathcal{Z}\{x[n+1] - x[n]\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (x[k+1] - x[k])z^{-k} \\
 (3.21) \quad &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (x[k+1] - x[k])z^{-k} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -x[0] + x[n+1] + \sum_{k=1}^n x[k](z^{-k-1} - z^{-k})
 \end{aligned}$$

כאשר משאיפים את $z \rightarrow 1$ (ומכיוון שקטבי $X(z)$ בתוך מעגל היחידה, מותר לנו להפוך את הגבולות ב- z וב- n), מתקבל:

$$(3.22) \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x[n] - x[0]$$

טבלה 3.2: סיכום של תכונות שימושיות של התמרות Z

Property	Discrete Signal	Z transform	ROC
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	includes $R_1 \cap R_2$
Time shift	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R
Frequency scaling	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R$
Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} if $m < 0$
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolution	$(x_1 * x_2)[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$ (or possibly more)
Frequency derivation	$nx[n]$	$-z \frac{dX}{dz}(z)$	R
Time differentiation	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \cap \{ z > 0\}$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$	$R \cap \{ z > 1\}$

3.6 מערכות LTI

אם נתונה מערכת LTI, המוגדרת על ידי תגובתה להלם $h[n]$, בעלת התמרת $H(z)$ ותחום התכנסות ROC_h , ניתן לבדוק ביתר קלות האם המערכת היא סיבתית או יציבה.

מנה של פולינומים (תכונה 3.12): עבור מערכות LTI, $H(z)$ היא פונקציה רציונלית, ואנו יכולים לנמק את תחום ההתכנסות בעזרת מפת האפסים והקטבים בלבד. סננים כאלה מופיעים הרבה בעיבוד אותות סטטיסטיים, למשל בעיבוד אותות דיבור.

נניח בקטע זה שניתן לכתוב $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, כאשר $B(z)$ ו- $A(z)$ הם פולינומים מהצורה

$$(3.23) \quad B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$(3.24) \quad A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}$$

פונקציית תמסורת המתקבלת נתונה ע"י

$$(3.25) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})},$$

כאשר z_k אפסים ו- p_k קטבים. על ידי העברת אגפים, מתקבל:

$$(3.26) \quad \left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z)$$

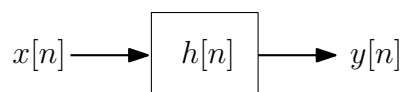
משוואת הפרשים המתקבלת היא

$$(3.27) \quad \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

או בצורתה נוספת,

$$(3.28) \quad y[n] = -a_1 y[n-1] - \dots - a_M y[n-M] + b_0 x[n] + \dots + b_N x[n-N]$$

דוגמה 3.10: נתונה מערכת בעלת תגובה להלם $h[n] = a^n u[n]$. הוכח, שניתן לממש את המערכת ע"י משוואת הפרשים $y[n] = ay[n-1] + x[n]$.



פתרון:

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)$$

$$X(z) = Y(z) - az^{-1}Y(z)$$

$$x[n] = y[n] - ay[n-1]$$

הערה 3.6 ! משוואת הפרשים היא דרך נוספת למימוש המערכת, בנוסף לקונבולוציה עם תגובה להלם $y[n] = h[n] * x[n]$

דוגמה 3.11: (חזור על דוגמה 2.13) נתונה מערכת בעלת תגובה להלם $h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$. חשב תגובה לכניסה $x[n] = \{1, 1\}$

פתרון:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}) + z^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3})$$

$$= 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 4z^{-4}$$

הערה 3.7 ! מקדמים של תוצאת הכפלה בין זוג פולינומים היא קונבולוציה של המקדמים.

תכונות תחום ההתכנסות (תכונה 3.13): עבור $H(z)$ מתקיים:

□ עבור תגובה להלם צד ימין, תחום ההתכנסות הוא מסוג "מחוץ למעגל", ורדיוס ומעגל נתון על ידי הקוטב עם ההגבר הגדול ביותר.

□ עבור תגובה להלם צד שמאל, תחום ההתכנסות הוא מסוג "בתוך המעגל", ורדיוס ומעגל נתון על ידי הקוטב עם ההגבר הקטן ביותר.

□ עבור תגובה להלם אינסופית בזמן, תחום ההתכנסות, אם בכלל קיים, הוא מסוג "טבעת", ומוגבל על ידי שני קטבים.

סיבתיות (תכונה 3.14): אם המערכת LTI סיבתית, תחום ההתכנסות של התגובה להלם הוא מסוג "מחוץ למעגל". אם פונקצית התמסורת רציונלית ותחום ההתכנסות מסוג "מחוץ למעגל", המערכת סיבתית.

הוכחה. אם המערכת סיבתית, $n < 0, h[n] = 0$, תחום ההתכנסות בהתאם לתגובה להלם הוא מסוג "מחוץ למעגל". כעת נניח כי תחום ההתכנסות הוא מסוג "מחוץ למעגל" ופונקצית התמסורת רציונלית מהצורה:

$$(3.29) \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

הטור הראשון קשור לאות צד שמאל ותחום ההתכנסות מסוג "בתוך המעגל", אבל הנחנו כי תחום ההתכנסות מסוג "מחוץ למעגל", לכן $h[k] = 0$ כאשר $k < 0$. על כן ניתן לטעון

שהמערכת זו סיבתית (מכיוון שהמערכת LTI).

יציבות (תכונה 3.15): המערכת יציבה אם ורק אם תחום ההתכנסות מכיל את מעגל היחידה, $|z| = 1$

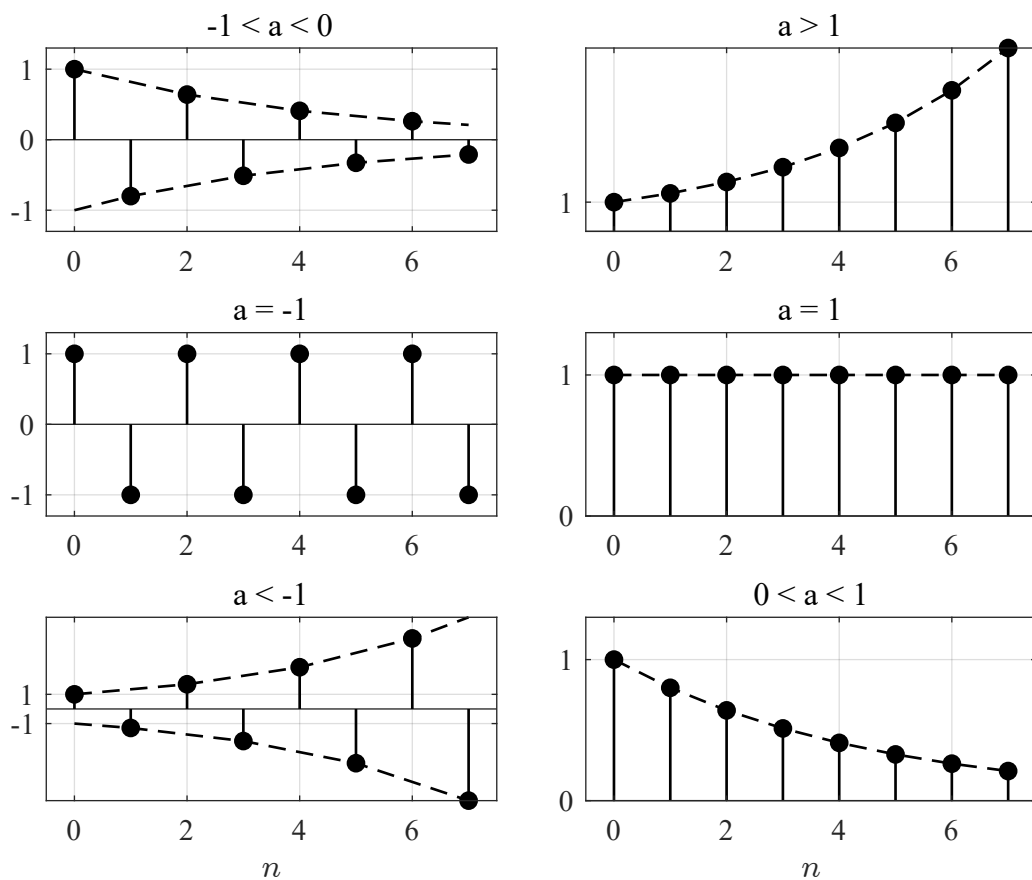
$$(3.30) \quad \{|z| = 1\} \in ROC_h.$$

הוכחה. אם המערכת יציבה ו-LTI, מתקיים $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$, על כן תחום ההתכנסות מכיל את מעגל היחידה. הכיוון ההפוך מתקבל על פי אותו רעיון.

דוגמה 3.12: מערכת בעלת תגובה להלם

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

להמחשה עבור ערכים שונים של a ראה איור 3.4.



איור 3.4: המחשה של התנהגות של האות $a^n u[n]$ עבור תחומים שונים של a .

3.7 התמרת Z ההפוכה

3.7.1 הגדרה

נכתוב בהגדרת ההתמרה הישירה

$$(3.31) \quad X(z = re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$$

על פי הגדרתו של טור פורייה מתקבל :

$$(3.32) \quad x[n] = \frac{1}{2\pi r^{-n}} \int_0^{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega$$

מכיוון ש $z = re^{j\omega}$, כאשר קובעים את הרדיוס מתקבל $d\omega = \frac{dz}{jz}$, על כן מתקבלת הגדרתה של התמרת Z ההפוכה.

ההתמרה ההפוכה (הגדרה 3.8): מוגדרת כדלקמן:

$$(3.33) \quad x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

כאשר מסלול האינטגרציה כלשהו מוכל בתחום ההתכנסות.

3.7.2 שיטות שימושיות לחישוב

הגדרת ההתמרה ההפוכה תאורטית היא מסורבלת לחישוב, ובדרך כלל משתמשים בשיטות האחרות בכדי לחשב את התמרת Z ההפוכה. השיטות האלה מתוארות להלן.

שיטה 1 שימוש התכונות וההתמרות המוכרות, ופירוק בשברים חלקיים.

דוגמה 3.13: יש למצוא את ההתמרה ההפוכה עבור

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)},$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא:

$$(א) \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

$$(ב) \quad \frac{1}{3} < |z|$$

פתרון: פירוק בשברים חלקיים נותן

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}},$$

כאשר תחום ההתכנסות בהתאם לביטוי השמאלי הינו $|z| > \frac{1}{4}$ ותחום ההתכנסות בהתאם לביטוי הימני הינו $|z| < \frac{1}{3}$. בהתאם לטבלה 3.1,

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

באופן דומה, עבור תחום ההתכנסות $\frac{1}{3} < |z|$ מתקבל

$$x[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right) u[n]$$

השיטה זו מועילה כאשר פונקציית התמסורת רציונלית, וכאשר האפסים והקטבים מוכרים, או כאשר ניתן לחשב אותם בקלות.

שיטה 2 לכתוב את ההתמרה הישירה כטור של המשתנה החופשי, ולזהות את ביטוי האות.

דוגמה 3.14: למצוא את ההתמרה הפוכה של $X(z) = \ln(1 + az^{-1})$, $|z| > a$.

על פי התכונות הכלליות :

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a^n z^{-n}$$

בהתאם לסכום הטור ותחום ההתכנסות,

$$x[n] = -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1].$$

נשתמש בשיטה זו כאשר פונקציית התמסורת אינה רציונלית, אך פירוטה כטור ידוע.

שיטה 3 שימוש משפט השארית

משפט השארית זהו משפט חשוב גם מבחינה תאורטית ויישומית, אך שימושו אינו פשוט (בד"כ קיימת דרך פשוטה יותר). בנוסף לכך, יש לציין כי שימושו של משפט השארית מוגבל לאות צד-ימין בלבד, מפני שהמסלול הסגור חייב להימצא בתחום ההתכנסות ולכלול את כל הקטבים.

משפט. יהי מסלול סגור שכולל את כל קטבי פונקציית התמסורת $\{z_i\}_{1 \leq i \leq n}$ מסדר $\{m_i\}_{1 \leq i \leq n}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) dz &= \sum_{i=1}^n \text{Res}(F(z), z = z_i) \text{Ind}(z_i) \\ (3.34) \quad &= \sum_{i=1}^n \left(\lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} \left[(z - z_i)^{m_i} F(z) \right] \right) \text{Ind}(z_i) \end{aligned}$$

כאשר $\text{Ind}(z_i)$ הוא מספר הסיבובים שעושה המסלול מסביב הקוטב z_i .

משפט זה אינו נראה אינטואיטיבי ; למרות זאת, ניתן להבין כמה דברים פשוטים על המשפט החזק הזה. אלו דברים אינטואיטיביים ניתן להגיד ?

1. כל "משקל" האינטגרל מגיע בגלל הקטבים.
2. אם כוללים קוטב פעמיים או יותר פעמים, אנחנו צריכים להכפיל את תרומתו לאותה כמות.

3. לקוטב כפול יש יותר משקל מאשר קוטב פשוט.

לבסוף, המשפט זה יותר טבעי מאשר הנוסחה שלו.

דוגמה 3.15: נחזור לדוגמא הרציונלית שלנו:

$$X(z) = \frac{3 - 5/6 z^{-1}}{(1 - 1/4 z^{-1})(1 - 1/3 z^{-1})} = \frac{z(3z - 5/6)}{(z - 1/4)(z - 1/3)}, |z| > \frac{1}{3}$$

סדרי הקטבים הם שווים ל-1, על כן כאשר $n \geq 1$:

$$\text{Res}(X(z)z^{n-1}, z = 1/4) = \frac{3 - 10/3}{1 - 4/3} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ומצד שני:

$$\text{Res}(X(z)z^{n-1}, z = 1/3) = \frac{3 - 5/2}{1 - 3/4} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

לבסוף:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

הערה 3.8 ! ניתן לנסח את השיטה בצורה קלה יותר, תוך שילוב של שיטה 1, באופן הבא.

דוגמה 3.16: כפי שכבר צויין, ניתן להציג את הדוגמה באופן הבא:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

ניתן לחשב את המקדמים ע"י

$$A_1 = X(z) \left(1 - p_1 z^{-1}\right) \Big|_{z=p_1} = \frac{\left(3 - \frac{5}{6}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \Big|_{z=1/4} = 1$$

$$A_2 = X(z) \left(1 - p_2 z^{-1}\right) \Big|_{z=p_2} = 2,$$

כאשר $p_1 = 1/4, p_2 = 1/3$ הם הקטבים.

דרך נוספת היא ע"י זוג משוואות ב-2 נעלמים,

$$A_1 \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) + A_2 \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) = \left(3 - \frac{5}{6}z^{-1}\right)$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -\frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{4}A_2 = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

דוגמה 3.17: ניתן גם לחזור לתוצאה של הדוגמה 3.9.

ההתמרה היא

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= \left[\frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-az^{-1}} \right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1) \end{aligned}$$

$$A_1 = Y(z) (1-z^{-1}) \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-az^{-1}} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = Y(z) (1-az^{-1}) \Big|_{z=a} = \frac{1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{a-1}$$

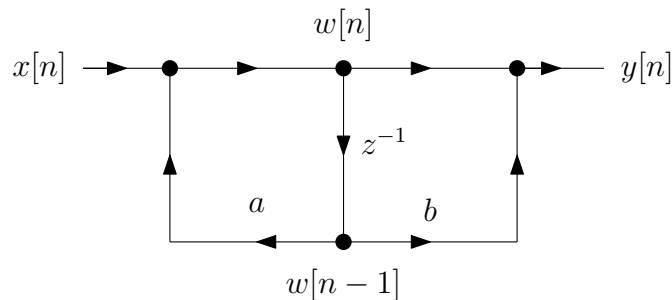
3.8 ייצוג מערכות

טבלה 3.5 מתארת שני סוגים של דיאגרמות המקובלות לייצוג מערכות.

דוגמה 3.18: נתונה המערכת, שמופיע באיור 3.6.

מצא פונקציית תמסורת, ומשוואת ההפרשים של המערכת.

שימוש "בנקודות עזר"



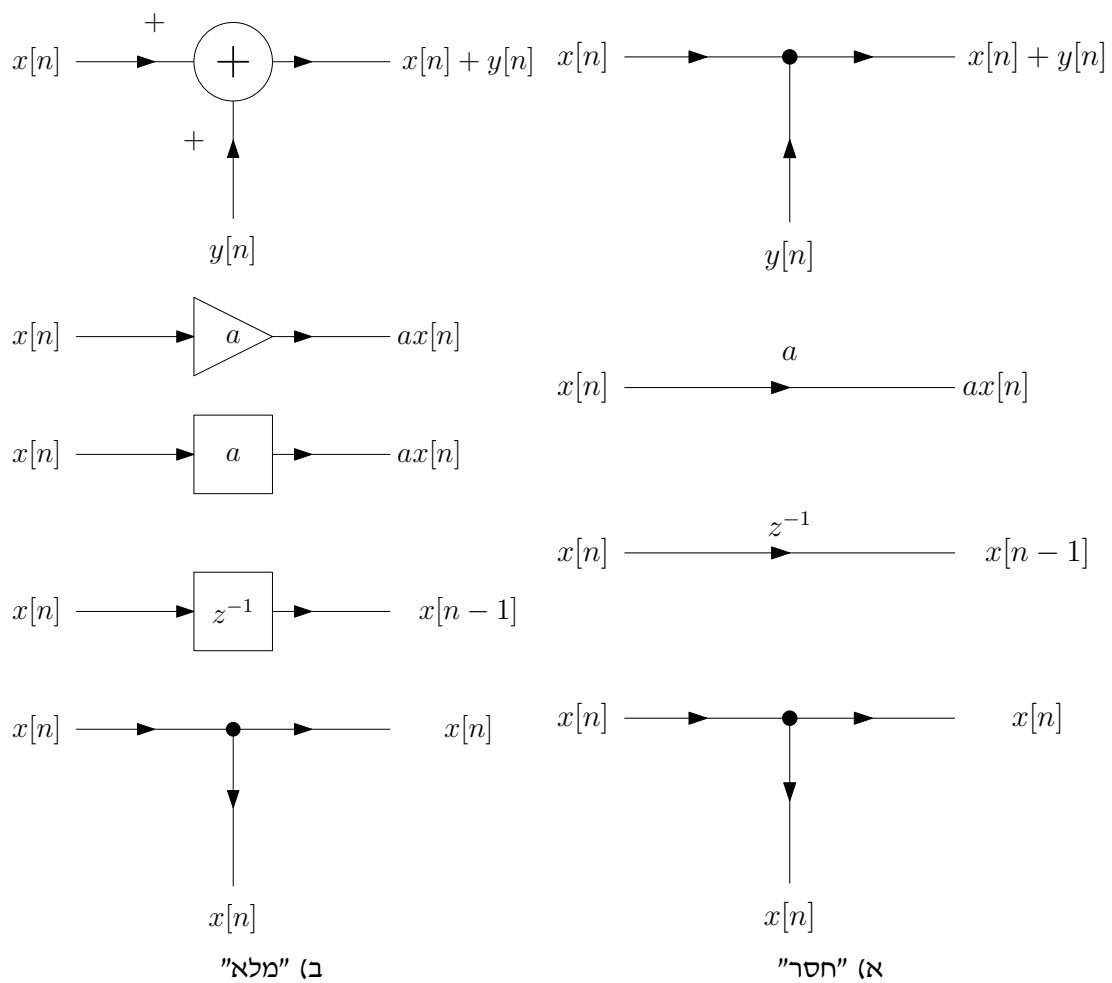
איור 3.6: דוגמה לייצוג המערכת.

פתרון: ניתן לראות, שמתוך הקשרים

$$\begin{aligned} x[n] &= w[n] - aw[n-1] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad X(z) = W(z) [1 - az^{-1}] \\ y[n] &= w[n] + bw[n-1] \quad \quad \quad Y(z) = W(z) [1 + bz^{-1}] \end{aligned}$$

מתקבל

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} y[n] - ay[n-1] = x[n] + bx[n-1]$$



איור 3.5: ייצוג מערכות בזמן בדיד.

הערה 3.9 ! פתרון של השאלות מסוג הזה בד"כ דורש:

- (א) שימוש בנקודות עזר,
- (ב) שילוב של משוואות הפרשים ופונקציות תמסורת.

פרק 4

התמרת פורייה בזמן בדיד

4.1 הקדמה

בפרק זה מטרתנו היא תיאור ההתמרה שעושה את המעבר מזמן בדיד לתדרים פיזיים ורציפים, בדומה להתמרת פורייה עבור אותות בזמן רציף. גם כן נרצה לקשור את האותות הבדידים והאותות הדגומים. בדומה למה שקורה במקרה הזמן הרציף, התמרת פורייה בזמן בדיד, שנסמן ב-DTFT, שהם ראשי תיבות Discrete Time Fourier Transform. נשתמש בהתמרה זו עבור מסננים יציבים בלבד.

המטרה היא להציג את התמרת DTFT, שהיא המקבילה של התמרת פוריה בזמן רציף של אות האנלוגי. לשם כך, ניזכר בתהליך קבלת אות בדיד מאות רציף, שמתחלק לשני שלבים (מסומכים באיורים 4.1, 4.2):

(א) דגימה, אשר ממירה את האות הרציף לאות הדגום, אך שנחשב עדיין כאות בזמן רציף. טווח הזמן בין איברים סמוכים שווה למחזור הדגימה.

(ב) נרמול, ששומר רק על האיברים ומדלג על מידע של מחזור הדגימה. כלומר, האינדקס n מהווה מקום סידורי בציר הזמן, וכתוצאה מכך ללא יחידות פיזיקליות.

$$x_c(t) \rightarrow \boxed{\text{Sampling}} \rightarrow x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \rightarrow \boxed{\text{Normalize}} \rightarrow x[n] = x_c(nT)$$

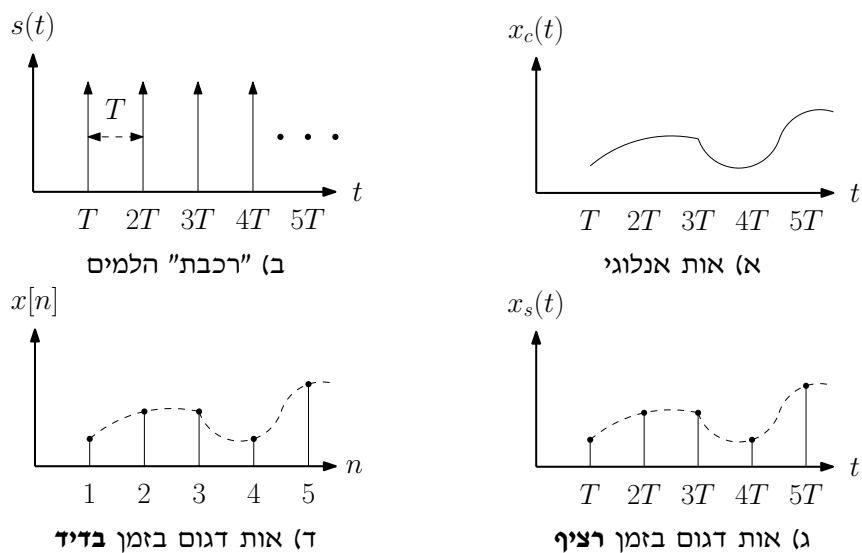
איור 4.1: תהליך המרת אות אנלוגי לאות דיגיטלי

עכשיו נבחן קשר בין התמרת פוריה עבור כל אחד מהשלבים.

(א) רענון של התמרת פוריה בזמן רציף, $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$, בסעיף 4.2.1.

(ב) קשר בין התמרת פוריה של אות בזמן רציף לבין אות אנלוגי המקורי $X_s(j\Omega) \stackrel{?}{=} X_c(j\Omega)$ בסעיף 4.2.2.

(ג) קשר בין התמרת פוריה של אות דגום בזמן רציף לבין אות דגום בזמן בדיד, $X(e^{j\omega}) \stackrel{?}{=} X_s(j\Omega) \stackrel{?}{=} X_c(j\Omega)$ בסעיף 4.2.3.



איור 4.2: קשר בין: אות אנלוגי במזמן רציף, אות דגום בזמן רציף, אות דגום בזמן בדיד.

(ד) סיכום הגדרת $X(e^{j\omega})$ בסעיף 4.3.

תדרים (תכונה 4.1): מערכת דיגיטלית "רואה" רק את התדרים בין 0 לבין $F_s/2$, כאשר

משפט Nyquist

$$(4.1) \quad F_s = \frac{1}{T}$$

מייצג את תדר הדגימה המשמש להמרה מאנלוג לדיגיטל (ראה גם הגדרה 2.3).

הערה 4.1! מנתחי האותות מסכמים את העובדה הזו במשפט הבא: מבהמשך הספר, אנחנו נניח כל התדרים של האותות העניינים נמצאים בטווח $[0, F_s/2]$, על מנת להקל על השקת המסקנות העתידיות. ניתן לאלץ את הדבר תוך סינון מעביר נמוכים ראשוני לפני הדגימה (Anti-aliasing filtering).

תופעת Aliasing

דוגמה 4.1: בהינתן שני האותות:

הדגמה של הבעיה

$$x_1(t) = \cos(0.6\pi t), \quad x_2(t) = \cos(2.6\pi t)$$

מצא אותות הדגומה עבור דגימה בתדר $F_s = 1 \text{ Hz}$.

פתרון: נקבל:

$$x_1[n] = \cos(0.6\pi n), \quad x_2[n] = \cos(2.6\pi n) = \cos(0.6\pi n + 2\pi n) = x_1[n].$$

כלומר, שני אותות אנלוגיים שונים יכולים לתת את אותו האות הבדיד.

4.2 ניסוח הגדרה

4.2.1 התמרת פוריה בזמן בדיד

תזכורת להתמרת
פוריה רגילה

התמרת פוריה (הגדרה 4.1): התמרת פוריה של אות $x(t)$ בזמן רציף נתונה ע"י

$$(4.2) \quad X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt,$$

כאשר Ω הוא תדרות זוויתית "אנלוגית" ביחידות $[rad/sec]$. סימון נוסף להתמרה הוא $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$.

4.2.2 קשר בין אות אנלוגי לאות דגום בזמן רציף

נזכיר בהתחלה את התכונות הייסודיות של פעולת דגימה.

רכבת הלמים (הגדרה 4.2): רכבת הלמים אידיאלית בעלת זמן מחזור T נתונה ע"י

$$(4.3) \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

ובעלת התמרת פוריה מהצורה

$$(4.4) \quad S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right).$$

דגימה אידיאלית (הגדרה 4.3): אנו נגדיר את פעולת דגימה האידיאלית ככפל בין אות רציף $x_c(t)$ לבין רכבת הלמים אידיאלית בעלת זמן מחזור T , כאשר אות דגום בזמן רציף, $x_s(t)$ (איור 4.2), נתון ע"י הקשר

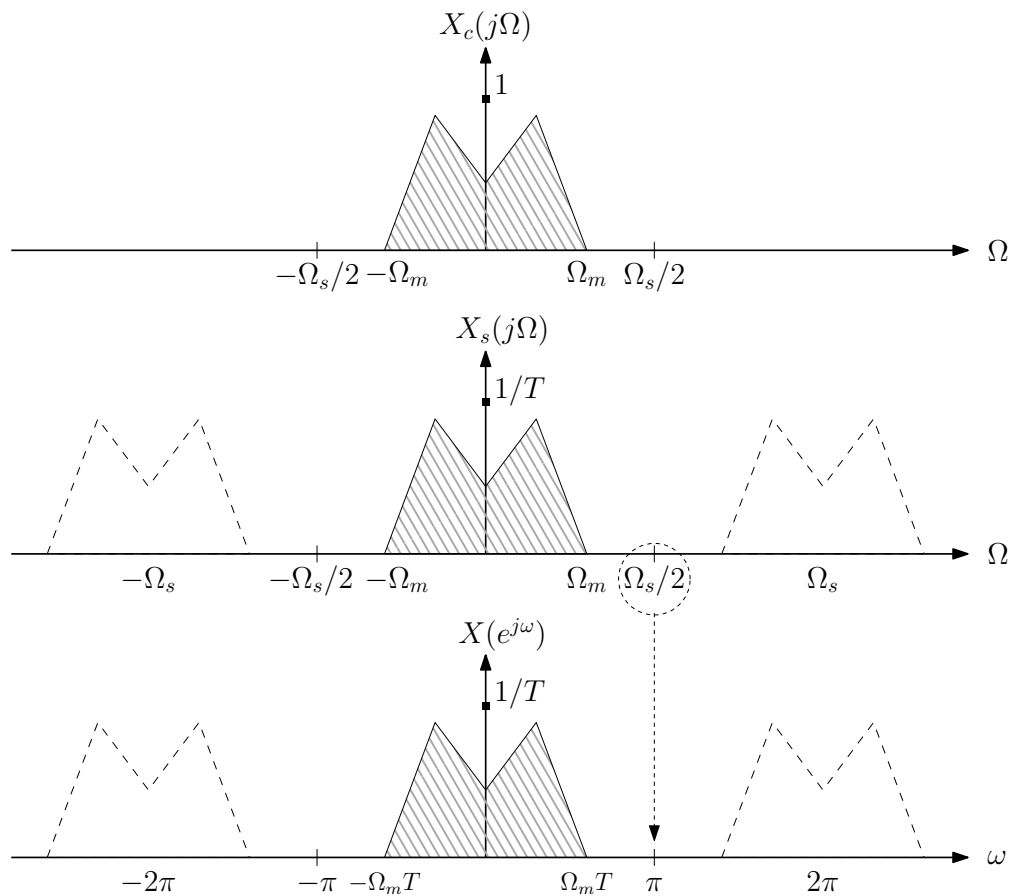
$$(4.5) \quad \begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - kT) \end{aligned}$$

השאלה היא, מהי התמרת פוריה של $x_s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_s(j\Omega)$, ומה הקשר שלה להתמרת פוריה של האות המקורי, $X_s(j\Omega) \stackrel{?}{=} X_c(j\Omega)$?

חישוב של התמרת פורייה של אות דגום בזמן רציף נגדיר את תדרות זוויתיות של הדגימה כ- $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$. בהנחה שקיימת התמרת פורייה עבור האות המקורי (שנסמן ב- $X_c(j\Omega)$); בהתאם לתכונת הקונבולוציה ומכיוון שהתמרת פורייה של רכבת הלמים היא רכבת הלמים (במחזור שונה ומנורמל בכדי שנשמר את האנרגיה), התמרת פורייה של האות הדגום הינה:

$$\begin{aligned}
 X_s(j\Omega) &= \mathcal{F} \{x_c(t)s(t)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\
 &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(j \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \right) \\
 (4.6) \quad &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) * \delta \left(j \left(\Omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))
 \end{aligned}$$

כלומר התמרת פורייה של אות דגום מתחלקת בשכפולים של המידע הספקטלי המקורי (מוזגים בתדר הדגימה), במתואר באיור 4.3.



איור 4.3: קשר בין $X_c(j\Omega)$ לבין $X_s(j\Omega)$ לבין $X(e^{j\omega})$.

4.2.3 קשר בין אות אנלוגי לאות דגום בזמן רציף

נחשב:

$$\begin{aligned}
 X_s(j\Omega) &= \mathcal{F}\{x_s(t)\} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \delta(t - kT) e^{-j\Omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega T n} \quad \leftarrow \begin{cases} \omega = \Omega T \\ x[n] = x_c(nT) \end{cases} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \\
 &= X(e^{j\omega})
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

היות וניתן לקשר את האות הדגום בזמן רציף לאות בזמן בדיד על ידי הנוסחה $x[n] = x_c(nT)$, התמרת DTFT זהה להתמרת פורייה של האות הדגום בזמן רציף, אשר מחושבת בנקודות

$$\boxed{\omega = \Omega T}.$$

עכשיו נשתמש בקשר בין ω ל- Ω , ונקבל את הקשרים

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)) \quad \leftarrow \omega = \Omega T$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left[\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right]\right).$$

האיבר $k\frac{2\pi}{T}$ הוא הגורם לתופעת aliasing הידוע בעקבות השיכפולים את המידע הספקטראלי. האם התוצאה זו טבעית? כן. במישור הזמן ביצענו נרמול כאשר עברנו מאות דגום לאות רציף, כלומר עברנו ממישור הומוגני בזמן למישור ללא יחידה. לאחר מעבר לתדרים, אנחנו מצפים לקבל גם נרמול בתדרים, כלומר מישור התמרת פורייה זהו מישור התדרים הפיזיים, ומישור ה-DTFT זהו מישור התדרים המנורמלים (ללא יחידה). בהמשך, נסמן ב- Ω (האות היוונית הגדולה ω) את התדרים הפיזיים, וב- ω את התדרים המנורמלים.

טבלה 4.1: סיכום יחידות של הפרק

סימון	יחידות	
F	$[Hz]$	תדר אנלוגי
$\Omega = 2\pi F$	$[rad/sec]$	תדירות זוויתית אנלוגית
f	--	תדר ספרתי
$\omega = 2\pi f$	$[rad]$	תדירות זוויתית ספרתית
T	$[sec]$	זמן דגימה
$F_s = 1/T$	$[Hz]$	תדר דגימה
$\Omega_s = 2\pi/T$	$[rad/sec]$	תדירות זוויתית של דגימה
$\omega = \Omega T$	$[rad]$	תדירות זוויתית ספרתית

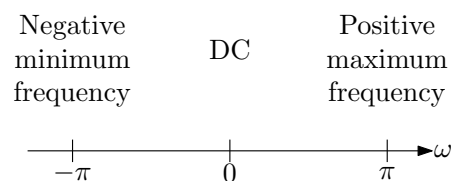
4.3 הגדרה

התמרת DTFT (הגדרה 4.4): נתון אות בדיד $x[n]$, עבורו מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$.
התמרת DTFT מוגדרת ע"י

$$(4.11) \quad X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$$

הביטוי $X(e^{j\omega})$ נקרא גם **תגובת תדר**.

התדרים המנורמלים הם (ראה גם איור 4.3)



הערה 4.2 ! קיימת הגדרה נוספת נפוצה להתמרת פוריה,

$$(4.12) \quad X(jF) = \mathcal{F} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt,$$

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$. ההגדרה המשלימה של DTFT היא

$$(4.13) \quad X(e^{jf}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi f},$$

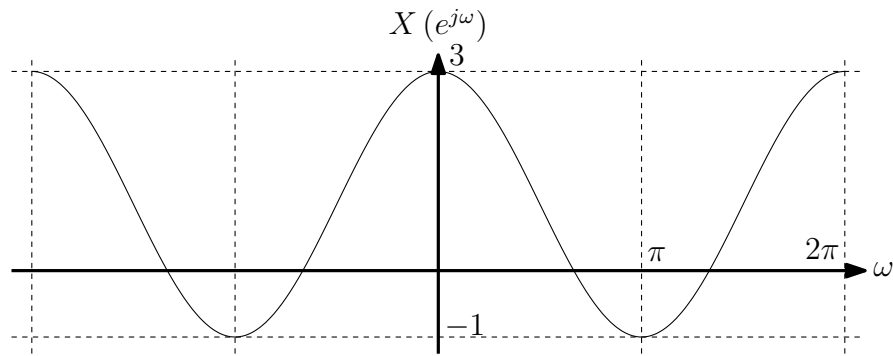
הגדרה נוספת
המופיע לפעמים
בספרות

■ כאשר f הוא תדר מנורמל.

דוגמה 4.2: מצא התמרת DTFT של האות $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$.

פתרון: בהתאם להגדרה,

$$\text{DTFT} \{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = 1 + 2\cos(\omega).$$



איור 4.4: שרטוט של $X(e^{j\omega})$.

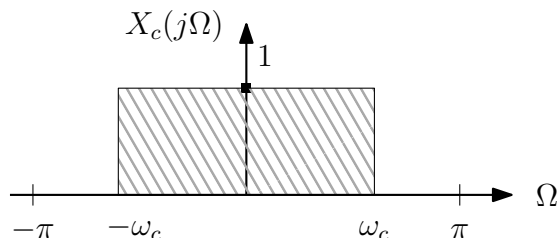
ניתן לחזור למישור הזמן הבדיד בעזרת ה-DTFT ההפוכה. מכיוון שהגדרת ה-DTFT מאוד דומה לטור פורייה (ולמעשה, היא שווה לטור פורייה!), נוכל לחבר את האות הבדיד להגדרת מקדמי פורייה.

התמרת DTFT הפוכה (הגדרה 4.5): ה-DTFT ההפוכה מוגדרת כדלקמן:

$$(4.14) \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega.$$

דוגמה 4.3: מהי התגובה להלם של המערכת בעלת תגובת תדר (איור 4.5)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \Leftrightarrow x[n] = ?$$



איור 4.5: תגובת תדר של מסנן מעביר נמוכים (LPF) אידיאלי.

פתרון: על פי הגדרתה של ה-DTFT ההפוכה:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2j\pi n} \left[e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c} \right] = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} \end{aligned}$$

רואים לפי החישוב שלא ניתן לבצע מסנן מעביר נמוכים אידאלי, כיוון שהמסנן זה אינו סיבתי או יציב. ניתן להראות קשרים הבאים: (א) סכום ערכי האות, (ב) הוא אנרגיה הנידונה בתכונה 4.8 להלן, (ג) דרישה ליציבות בהתאם לתכונה 2.10,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] &< \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 &< \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

נחזור בפרקים הבאים על מבנה מסננים פרקטיים מסוגים שונים...

רשימת ההתמרות השימושיות מופיע בטבלה 4.2.

טבלה 4.2: התמרות DTFT שימושיות.

Discrete Signal	DTFT
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - Mk]$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega Mk} = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right)$
$a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$a^n(n+1)u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$e^{-j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$

4.4 תכונות

הגדרנו את ה-DTFT כמו האנלוגיה של התמרת פורייה בזמן רציף. כמו כן, ניתן לראות את ה-DTFT כמו התמרת Z על מעגל היחידה. כתוצאה מכך, אנו מצפים אותן תכונות כמו התמרת פורייה והתמרת Z.

מחזוריות (תכונה 4.2): בניגוד להתמרת פורייה בזמן רציף, ה-DTFT תמיד תהיה מחזורית במחזור 2π :

$$(4.15) \quad X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\omega+2\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega} = X(e^{j\omega})$$

כלומר, מספיק לשרטט את ה-DTFT במרווח בגודל 2π בלבד.

ממשיות (תכונה 4.3): מתקיימים קשרים הבאים:

האות	ה-DTFT
ממשי, זוגי	ממשית, זוגית
ממשי, אי-זוגי	מדומה, אי-זוגית
מדומה, זוגי	מדומה, זוגית
מדומה, אי-זוגי	ממשית, אי-זוגית

הזזה בזמן (תכונה 4.4): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$(4.16) \quad \text{DTFT} \{x[n - n_0]\} = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

הזזה בתדר (תכונה 4.5): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$(4.17) \quad \text{DTFT} \{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

קונבולוציה (תכונה 4.6): כפי מה שראינו עבור התמרת Z, תכונת הקונבולוציה חשובה ביותר עבור מערכות LTI. אם נתונים שני אותות $h[n]$, $x[n]$, בעלי אנרגיה סופית,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty$$

$$(4.18) \quad \text{DTFT} \{h[n] * x[n]\} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

דוגמה 4.4: נתונים זוג אותות $x[n] = \{1, 1, 1\}$, $y[n] = \{-1, 1, -1\}$ חשב $x[n] * y[n]$.

פתרון: בהתבסס על הקשר להלן,

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} = 1 + 2\cos(\omega) \\
 Y(e^{j\omega}) &= -e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} = 1 - 2\cos(\omega) \\
 X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) &= 1 - 4\cos^2(\omega) = 1 - 4\frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega)) = -1 - 2\cos(2\omega) \\
 &= -e^{j2\omega} - 1 - e^{-j2\omega} \\
 \Rightarrow x[n] * y[n] &= \{-1, 0, -1, 0, -1\} \\
 &\quad \uparrow
 \end{aligned}$$

מכפלה בזמן (תכונה 4.7): התמרת DTFT של $x[n]y[n]$ היא:

$$(4.19) \quad \text{DTFT} \{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

הוכחה. ישנו

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT} \{x[n]y[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k]e^{-jk\omega} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{jk\theta}d\theta \right) y[k]e^{-jk\omega} \\
 (4.20) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]e^{-jk(\omega-\theta)} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta
 \end{aligned}$$

האינטגרל לעיל נקרא קונבולוציה ציקלית. נגיד מילולית "ה-DTFT של כפל שווה לקונבולוציה הציקלית בין התמרות".

משפט פרסבל (Parseval) (תכונה 4.8): משפט פרסבל מתאר את שימור אנרגיה (הגדרה 2.17) במישור הזמן ומישור התדר.

$$(4.21) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

הוכחה.

$$(4.22) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \text{DTFT} \{x[n]x^*[n]\}_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})X^*(e^{j\theta})d\theta,$$

לפי תכונת המכפלה, והאינטגרל האחרון שווה לאינטגרל המשפט.

סיכום תכונות השימושיות של התמרת DTFT מופיעות בטבלה 4.3.

טבלה 4.3: תכונות שימושיות של התמרות DTFT

Properties	Signal	DTFT
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
Time shift	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Frequency scaling	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Time reversal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Convolution	$(x_1 * x_2)[n]$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$
Frequency derivation	$nx[n]$	$-j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Multiplication in time	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
Energy conservation (Parseval)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

תגובת אמפליטודה/פאזה (הגדרה 4.6): נגדיר תגובת אמפליטודה ע"י ערך מוחלט של התמרה, $|H(e^{j\omega})|$, ותגובת פאזה בהתאם ע"י

$$(4.23) \quad \angle H(e^{j\omega}) = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}} \right)$$

דוגמה 4.5: נתון מסנן המוגדר על ידי התגובה להלם מהצורה $h[n] = \alpha^n u[n]$, $|\alpha| < 1$.

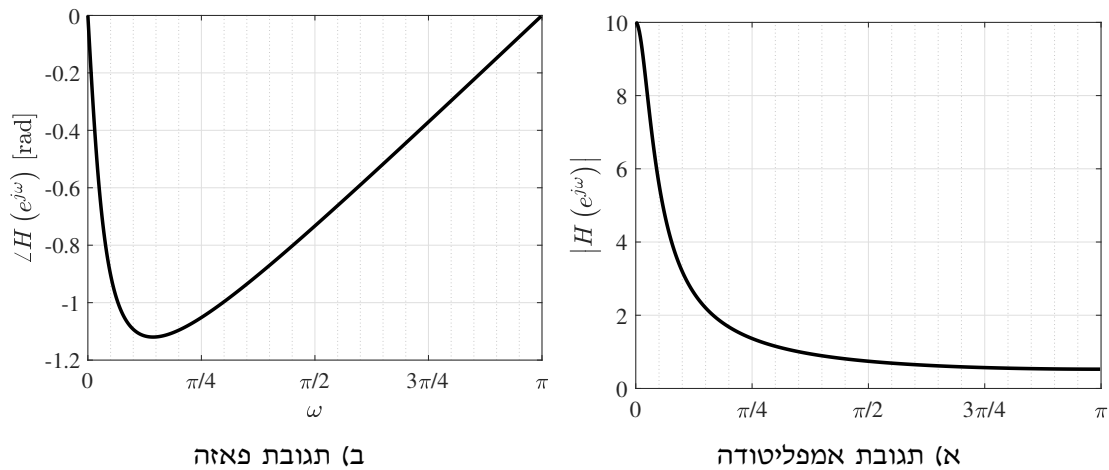
חשב: פוקציית תמסורת, תגובת תדר, תגובת אמפליטודה ותגובת פאזה.

פתרון: הקשרים המתקבלים הם

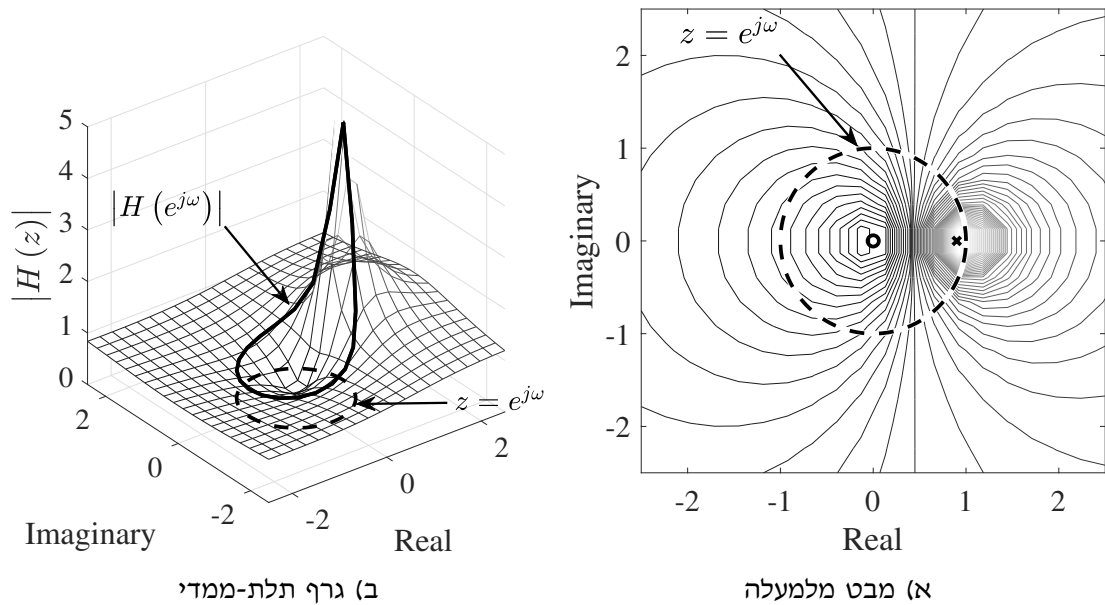
$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad |z| > |\alpha| \\
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{1 - \alpha \cos(\omega) + j\alpha \sin(\omega)} \\
 &= \frac{1}{[1 - \alpha \cos(\omega)] + j\alpha \sin(\omega)} \cdot \frac{[1 - \alpha \cos(\omega)] - j\alpha \sin(\omega)}{[1 - \alpha \cos(\omega)] - j\alpha \sin(\omega)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1 - \alpha \cos(\omega)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega)}}_{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}} + j \underbrace{\frac{-\alpha \sin(\omega)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega)}}_{\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}} \\
|H(e^{j\omega})| &= \sqrt{H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega})} = \sqrt{\left(\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{j\omega})}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega)}} \\
\angle H(e^{j\omega}) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos(\omega)}\right)
\end{aligned}$$

דוגמה מספרית עבור $\alpha = 0.9$ מוצגת באיור 4.6 והקשר בין פונקציית תמסורת תמסורת לתגובת אמפליטודה מוצגת באיור 4.7.



איור 4.6: דוגמה מספרית עבור $\alpha = 0.9$.



איור 4.7: התמרת DTFT זה חתך של התמרת Z מעל מעגל היחידה.

4.5 קשר בין סוג מסנן למפת האפסים והקטבים

להבין קצת קשר
בין קטבים/אפסים
ותגובת
אמפליטודה

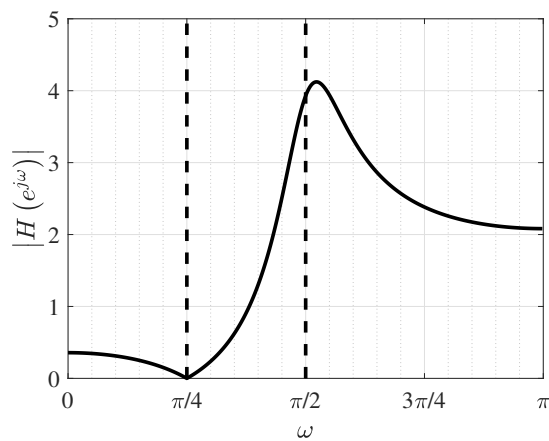
בהינתן מערכת LTI מוגדרת ע"י פונקציית התמסורת $H(z)$, המידע על אפסיה וקטביה רומז על סוג המסנן. לפי ההגדרה המתמטית, אפס הוא נקודת איפוס של $H(z)$ ובקוטב $H(z)$ שואפת לאינסוף. אם $H(z)$ היא פונקציה רציונלית (והיא כזאת גם בפועל, וגם ברוב התאוריה), רציפות הפונקציה קובעת שסביב אפס $|H(z)|$ קטן, ולהפך, הוא גדול סביב קוטב. עקב כך נוכל לזכור כי

1. הוספת אפס במפת $H(z)$ גורר את הפחתת הספקטרום בסביבתו.

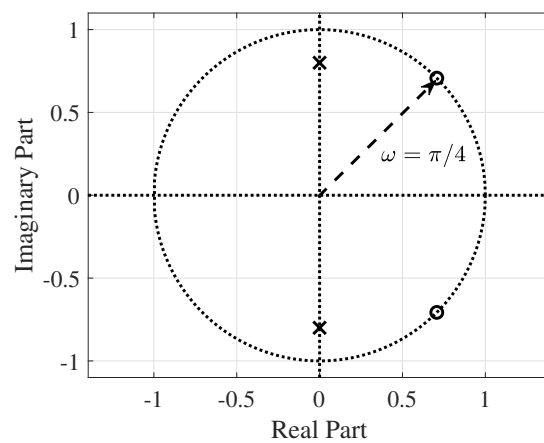
2. הוספת קוטב במפת $H(z)$ גורר את הגברת הספקטרום בסביבתו.

השפעתם של האפסים והקטבים הולכת וגדלה ככל שהם נמצאים קרובים למעגל היחידה, כיוון שהתגובה בתדר למסננים בדידים מוגדרת על הנקודות $z = e^{j\omega}$, כפי שהוסבר לעיל.

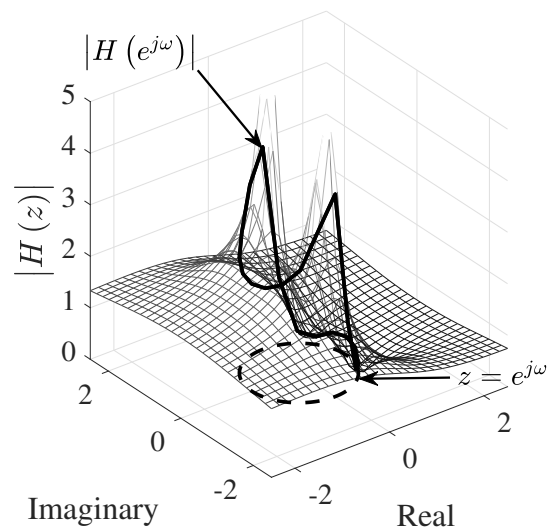
דוגמה 4.6: נניח שמפת אפסים וקטבים של $H(z)$ כוללת את האפסים $e^{j\pi/4}$, $e^{-j\pi/4}$ ואת הקטבים 0 , $0.8e^{j\pi/2}$, $0.8e^{-j\pi/2}$. הקוטב הנמצא בראשית הצירים משפיע באותו אופן על כלל נקודות מעגל היחידה, על כן איננו רומז כלל על סוג המסנן. האפסים נמצאים בדיוק על מעגל היחידה, לכן נוכל לראות בספקטרום איפוס בתדרים $\omega = \pm\pi/4$, וספקטרום נמוך באזורים. יחד עם זאת, הקטבים השונים מ-0 גורמים להגדלת הספקטרום בסביבתם, והשפעתם הכי משמעותית בתדר $\omega = \pm\pi/2$. עקב כך אנו מצפים מקסימום באזורים האלה. כמו כן, כיוון שהאפסים משפיעים גם בשאר המעגל, אנו מצפים לראות בספקטרום החלשה יותר לפני תדר התהודה מאשר אחריו. ניתן לנחש מהניתוח הזה שהמסנן הוא מעביר פס, דבר שניתוח מתמטי מצדיק (ראו גם את האיור 4.8).



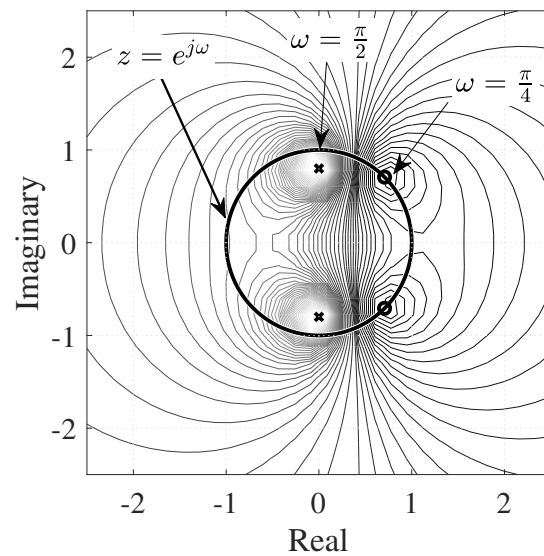
(ב) תגובת תדר



(א) מפת כתבים ואפסים



(ד) גרף תלת-ממדי



(ג) מבט מלמעלה

איור 4.8: דוגמה לשימוש מפת האפסים והקטבים כמידע על סוג מסנן

הערה 4.3 ! חשוב לזכור כי הדרך הזו רומז על סוג המסנן ואופי הספקטרום, אך איננו תחליף לחישוב אמיתי. למעשה, הגישה הזו מתאימה כאשר נקודות העניין נמצאות מספיק קרובות למעגל היחידה, אבל חשוב להיזהר כאשר הן רחוקות ממעגל היחידה.

פרק 5

תכונות המערכות

אנחנו כבר מכירים מעיבוד אותות רציפים כמה סוגי מסננים: מעביר נמוכים, מעביר גבוהים, מעביר פס וחוסס פס. המסננים האלה, תוכננו במטרה להעביר/לחסום תחום מסוים של תדרים ולעבד אותות לפני דגימה או שחזור. בפרק זה נלמד מספר תכונות נוספות של מסננים.

5.1 הקדמה

נסכם מספר מאפיינים כללים של מערכות בזמן בדיד, בהתאם לטבלה 5.1 (חלקם נגדיר בהמשך הפרק).

הערה 5.1 ! שימוש בתדירות זוויתית במקום תדירות מייצר יחידות לא נוחות עבור תגובת אמפליטודה/צפיפות הספק.

אמפליטודה וצפיפות הספק ספקטראלית (תכונה 5.1): קשר בין תגובת אמפליטודה וצפיפות הספק ספקטראלית לבין פונקציית תמסורת:

עבור מערכת בעלת פונקציית תמסורת $H(z)$ מתקיים

$$(5.1) \quad |H(e^{j\omega})|^2 = \left[H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=e^{j\omega}}$$

הוכחה.

$$(5.2) \quad |H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) = \left[H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=e^{j\omega}}$$

טבלה 5.1: סיכום מאפיינים/סימונים של מערכות.

הגדרה מילולית	זמן רציף	זמן בדיד	הגדרה
תגובה להלם	$h(t)$ [V]	$h[z]$	הגדרה 2.24
פונקציית תמסורת	$H(s)$	$H(z)$	הגדרה 3.1
תגובת תדר/אמפליטודה	$H(\Omega), H(F)$	$H(e^{j\omega}), H(e^{jf})$	הגדרה 4.4
תגובת אמפליטודה	$ H(\Omega) $	$ H(e^{j\omega}) $	הגדרה 4.6
	$ H(F) \left[\frac{V}{\sqrt{Hz}} \right]$	$ H(e^{jf}) $	
צפיפות הספק ספקטראלית	$ H(\Omega) ^2$	$ H(e^{j\omega}) ^2$	תכונה 5.1
	$ H(F) ^2 \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$	$ H(e^{jf}) ^2$	
תגובת פאזה	$\angle H(\Omega)$ [rad]	$\angle H(e^{j\omega})$	הגדרה 4.6
השהיית פאזה	$\tau_{pd}(\Omega)$ [sec]	$\tau_{pd}(\omega)$	הגדרה 5.1
השהיית חבורה	$\tau_{gd}(\Omega)$ [sec]	$\tau_{gd}(\omega)$	הגדרה 5.1

5.2 מסננים בעלי פאזה לינארית

5.2.1 השהייה

כדי להבין, מה זה פאזה לינארית, נתחיל בהסבר על הקשר בין הפאזה להשהייה. נמחיש את הנושא ע"י דוגמה.

דוגמה 5.1: נתונה מערכת

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = H(e^{j\omega})$$

נתון אות כניסה

$$x[n] = \cos(\omega_0 n)$$

רשום אות מוצא עבור $a = 0.9$ ועבור כל אחד מהערכים $\omega_0 = 0, 0.05\pi, 0.1\pi$.

פתרון:

$$y[n] = \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \cos\left(\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0})\right)$$

ניסוח מתמטי של
הבעיה בדוגמה 1.2

(א) הגבר DC.

$$\omega_0 = 0 \rightarrow H(e^{j0}) = \frac{1}{1 - 0.9e^{j0}} = 10$$

$$x[n] = 1$$

$$y[n] = 10$$

(ב)

$$\omega_0 = 0.05\pi \rightarrow H(e^{j\omega_0}) = 5.576e^{-j0.91}$$

$$y[n] = 5.576 \cos(0.05\pi n - 0.91)$$

$$= 5.576 \cos(0.05\pi [n - 5.75])$$

(ג)

$$\omega_0 = 0.1\pi \rightarrow y[n] = 3.19 \cos(0.1\pi [n - 3.48])$$

השהייה (הגדרה 5.1): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$(5.3) \quad x[n] = v[n] \cos(\omega n)$$

ואות מוצא לאחר מעבר דרך מערכת LTI בעלת תגובת תדר $H(e^{j\omega})$

$$(5.4) \quad y[n] = v[n - \tau_{gd}] \cos(\omega [n - \tau_{pd}]),$$

השהיית **פאזה** (phase delay) נתונה ע"י

$$(5.5) \quad \tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

והשהיית **חבורה** (group delay) נתונה ע"י

$$(5.6) \quad \tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega}).$$

5.2.2 פאזה לינארית

כעת נתעניין במסננים בעלי פאזה לינארית. המסננים אלה חשובים בתחומי אודיו ווידאו, מכיוון שבני-אדם רגישים לכל עיוות לא לינארי בפאזה. על מנת להבין את חשיבותה של פאזת האות, נלך לפי הדוגמא הבאה. אם מעבירים תדר מסוים מהצורה $x(t) = \cos(\omega t)$ דרך מסנן LTI מתקבל אותו תדר אם השהייה ושינוי באמפליטודה $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$; אם מדובר על אות מוזיקה, חשוב שכל התדרים יועברו עם אותה השהייה (אחרת, אין כבר מוזיקה...). למשל, רמקולים מביאים עיוות בפאזה שיכולה להיות משמעותית ומפריעה. באופן אינטואיטיבי, נצטרך כי $\Delta\varphi/\Delta\Omega$ קבוע, ואם התכונה מתקיימת עבור מסנן, זאת אומרת

שלאחר הסינון, לא שינינו הרבה את צורתו של האות במישור הזמן.

פאזה לינארית (הגדרה 5.2): נגיד כי מסנן בעל פאזה לינארית אם ורק אם ה-Group Delay שלו קבוע או קבוע בחלקים.

דוגמה 5.2: מסנן מעביר נמוכים אידאלי, שהוא בעל פאזה לינארית. למעשה:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-2j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{לכן } \tau_{pd}(\omega) = \tau_d(\omega) = \text{const}$$

מבנה מסננים בעלי פאזה לינארית באופן כללי אינו דבר פשוט, אולם במקרה שהמסננים הם FIR, ניתן להשתמש בתנאי מספיק הבא על מנת לבטח את התכונה הזו.

סימטריה (תכונה 5.2): נתון מסנן FIR ממשי מוגדר על ידי תגובתו להלם $h[n]$. אם מתקיים השוויון:

$$(5.7) \quad h[n] = \pm h[\alpha - n], \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

אז המסנן בעל פאזה לינארית.

הוכחה. נעשה את ההוכחה עבור $\alpha \in \mathbb{N}$ זוגי (תגובה להלן עם מספר אי-זוגי של איברים). ניתן לעשות אותה באותו אופן עבור 3 מקרים אחרים. עבור $h[n] = [2\alpha - n]$ מתקיים:

$$\begin{aligned} (5.8) \quad H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\alpha-1} h[n]z^{-n} + h[\alpha]z^{-\alpha} + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} h[n]z^{-n} \\ &= z^{-\alpha} \left[h[\alpha] + \sum_{n=-\infty}^{\alpha-1} h[n]z^{-n+\alpha} + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} h[n]z^{-n+\alpha} \right] \\ &= z^{-\alpha} \left[h[\alpha] + \sum_{n=-\infty}^{\alpha-1} h[n]z^{-n+\alpha} + \sum_{n=-\infty}^{\alpha-1} h[2\alpha - n]z^{n-\alpha} \right] \\ &= z^{-\alpha} \left[h[\alpha] + \sum_{n=0}^{\alpha-1} h[n] \left(z^{-n+\alpha} + z^{n-\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

כתוצאה מכך, עבור $z = e^{j\omega}$:

הוכחה פורמלית
למקרה כללי של
פאזה לינארית

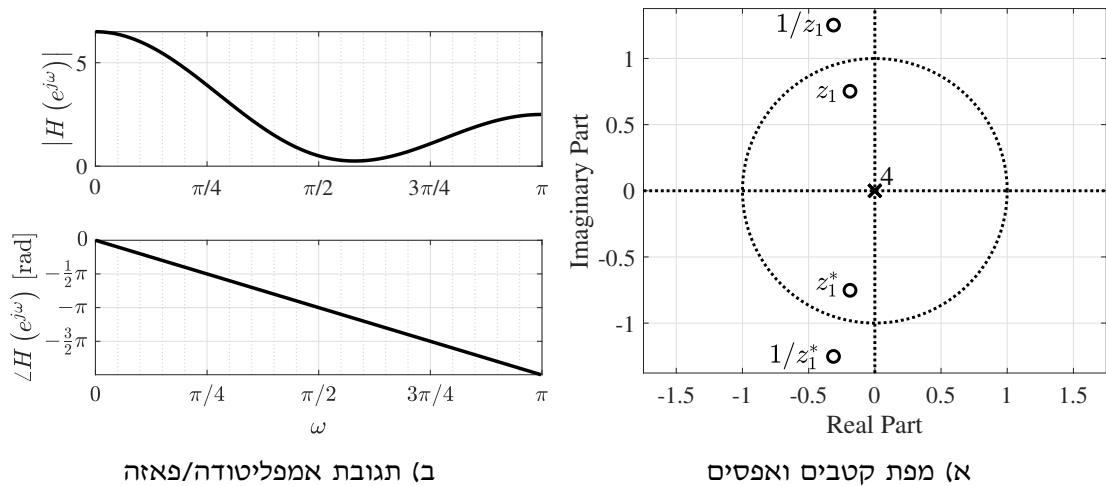
$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= e^{-j\alpha\omega} \left[h[\alpha] + \sum_{n=0}^{\alpha-1} h[n] \left(e^{j(-n+\alpha)\omega} + e^{j(n-\alpha)\omega} \right) \right] \\
 (5.9) \quad &= e^{-j\alpha\omega} \underbrace{\left[h[\alpha] + 2 \sum_{n=0}^{\alpha-1} h[n] \cos((n-\alpha)\omega) \right]}_{\in \mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

לכן ה-Group Delay קבוע ושווה ל- α .

דוגמה 5.3: עבור $\alpha = 4$ (זוגי, ז"א מספר אי זוגי של איברים) וסימטריה זוגית מהצורה $h[0] = h[4], h[1] = h[3]$ מתקיים

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^4 h[k] e^{-jk\omega} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega} \\
 &= e^{-j2\omega} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[3]e^{-j\omega} + h[4]e^{-j2\omega} \right) \\
 &= e^{-j2\omega} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[1]e^{-j\omega} + h[0]e^{-j2\omega} \right) \\
 &= e^{-j2\omega} \left(2h[0] \cos(2\omega) + 2h[1] \cos(\omega) + h[2] \right)
 \end{aligned}$$

דוגמה למסנן בעל פאזה לינארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 1, 2.5, 1, 1\}$ מפיעה באיור 5.1.



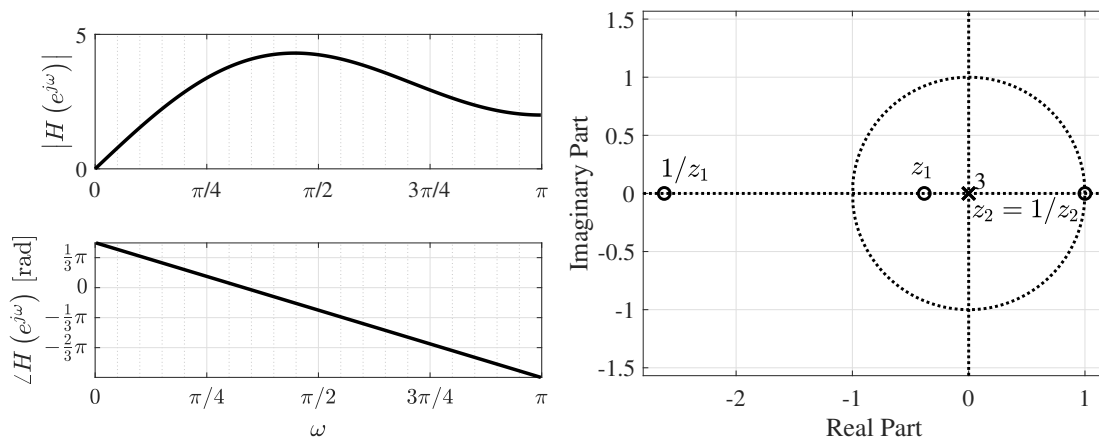
איור 5.1: דוגמה למסנן בעל פאזה לינארית

דוגמה 5.4: עבור $\alpha = 3$ (אי זוגי, ז"א מספר זוגי של איברים) וסימטריה אי זוגית מהצורה $h[0] = -h[3], h[1] = -h[2]$

מתקיים

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} \\
 &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} + h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega} \right) \\
 &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} - h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega} - h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega} \right) \\
 &= e^{-j\frac{3}{2}\omega} j \left(2h[0] \sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h[1] \sin\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right)
 \end{aligned}$$

דוגמה למסנן בעל פאזה לינארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 2, -2, -1\}$ מפיעה באיור 5.2.



(ב) תגובת אמפליטודה/פאזה

(א) מפת קטבים ואפסים

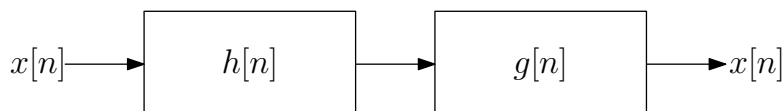
איור 5.2: דוגמה למסנן בעל פאזה לינארית

הערה 5.2! באופן כללי, אפסים של המערכות המקיימות את התנאי באים ברביעות צמודות, כמו באיור 5.1, או זוגות כמו באיור 5.2. בנוסף, אפסים יכולים גם לבוא בזוגות צמודים.

הערה 5.3! התנאי זה מספיק אך לא נדרש/הכרחי! מסנן יכול להיות בעל פאזה לינארית בלי לבדוק את התכונה לעיל.

5.3 מערכת הפיכה/הפוכה

לפי (הגדרה 2.23), מערכת היא הופכית כאשר עבור כל מוצא קיימת כניסה אחת בלבד בהתאם למוצא זה. בהינן מערכת סיבתית ויציבה, $h[n]$. עבור מערכת הפוכה מתקיים $h[n] * g[n] = \delta[n]$, כמתואר באיור 5.3.



איור 5.3: מערכת $g[n]$ היא מערכת הפוכה של $h[n]$.

השאלה המרכזית היא, האם קיימת מערכת $g[n]$, שהיא גם יציבה וסיבתית?

כדי נתח את הנושא, נשתמש בקשר

$$(5.10) \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow G(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

תכונות החשובות:

תחום ההתכנסות (תכונה 5.3): נתונה מערכת בעלת פונקציית תמסורת $H(z)$ ותחום ההתכנסות RoC_h , ומערכת הפוכה לה בעלת פונקציית תמסורת $G(z)$ ותחום ההתכנסות RoC_g . עבור המערכות צריך להתקיים

$$RoC_h \cap RoC_g \neq \emptyset$$

קטבים של $H(z)$ (תכונה 5.4): עבור מערכת $H(z)$ יציבה, כל הקטבים הם בתוך מעגל היחידה $\Leftrightarrow$ האפסים של המערכת $G(z)$ הם בתוך מעגל היחידה.

אפסים של $H(z)$ (תכונה 5.5): עבור מערכת $G(z)$ יציבה, כל הקטבים הם בתוך מעגל היחידה $\Leftrightarrow$ האפסים של המערכת $H(z)$ הם בתוך מעגל היחידה.

הערה 5.4 ! במידה ויש למערכת $H(z)$ אפסים ע"ג מעגל יחידה (יציבות גבולית), לא קיימת מערכת הפוכה, היות וישנו תדר מסוים עבורו $H(e^{j\omega}) = 0$. כמובן, גם המערכת עם קטבים ע"ג מעגל יחידה היא לא יציבה.

דוגמה 5.5: דוגמה 3.8 לעיל היא של מערכת הפיכה והפוכה.

5.4 מסננים מעבירי הכל (All-Pass)

בקטע זה התבונן במסנן מוגדר על ידי פונקציית התמסורת :

$$(5.11) \quad H(z) = \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \dots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_N z^{-N}}$$

כאשר $a_N, \dots, a_2, a_1$ הם מספרים ממשיים. נראה, כי ניתן לכתוב את פונקציית התמסורת בצורה אחרת :

$$(5.12) \quad H(z) = \frac{z^{-N} (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_N z^N)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_N z^{-N}} = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

עקב כך, מתקבלת התכונה הבאה:

קשר בין כתבים ואפסים (תכונה 5.6): אם p הוא קוטב של $H(z)$, הרי $\frac{1}{p}$ הוא אפס של $H(z)$.

מכיוון שמקדמי הפולינום $a_N, \dots, a_2, a_1$ הם מספרים ממשיים, האפסים והקטבים הם מספרים

ממשיים או מספרים מרוכבים צמודים, ולכן נוכל לכתוב את פונקציית התמסורת כדלקמן:

$$(5.13) \quad H(z) = z^{-N} \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1 - d_k z}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(1 - e_k z)(1 - e_k^* z)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

הגבר (תכונה 5.7): הגבר התגובה בתדר שווה ל-1:

$$(5.14) \quad |H(e^{j\omega})| = 1.$$

הוכחה. עבור

$$(5.15) \quad H(z) = z^{-1} \frac{1 - az}{1 - az^{-1}} = \frac{1 \cdot z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$$

$$(5.15) \quad H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \frac{1 - ae^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}}$$

מתקיים (ראה גם תכונה 5.1)

$$(5.16) \quad |H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \frac{1 - ae^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot e^{j\omega} \frac{1 - ae^{-j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = 1 = |H(e^{j\omega})|$$

באופן כללי, מתקיים:

$$(5.17) \quad |H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \prod_{k=1}^{M_r} \frac{(1 - d_k e^{j\omega})(1 - d_k e^{-j\omega})}{(1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k e^{j\omega})} \cdot \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(1 - e_k e^{j\omega})(1 - e_k^* e^{j\omega})(1 - e_k^* e^{-j\omega})(1 - e_k e^{-j\omega})}{(1 - e_k e^{-j\omega})(1 - e_k^* e^{-j\omega})(1 - e_k^* e^{j\omega})(1 - e_k e^{j\omega})} = 1$$

כלומר כל התדרים מועברים ללא עיוות או שינוי !

מדוע משתמשים במסנן זה? ישנן שתי סיבות עיקריות:

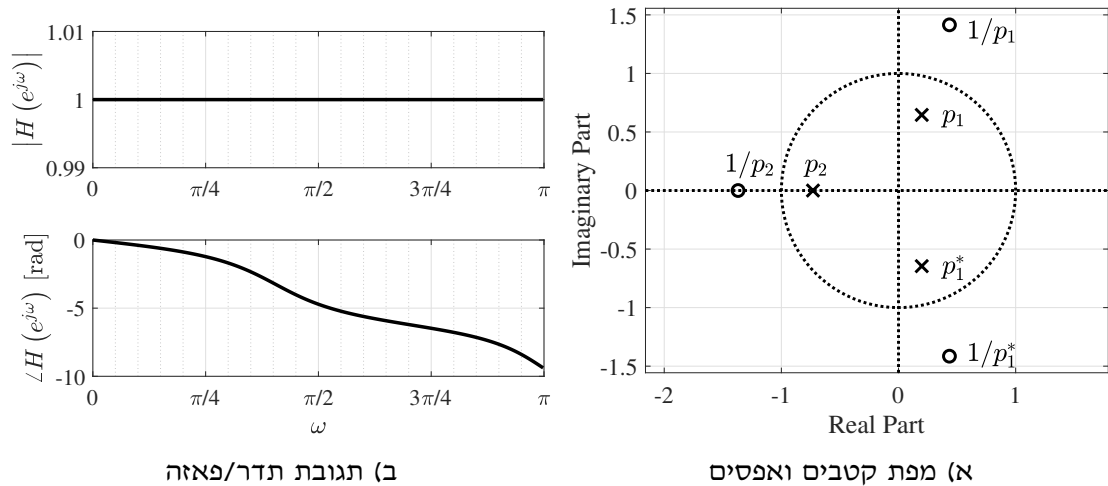
□ חישוב טורי של מסנן all-pass יכול להפוך מערכת לא יציבה למערכת יציבה, בעלי תכונות תדר זהות, ע"י צמצום קטבים של מערכת ע"י אפסי מסנן all-pass.

□ אוזנינו ועינינו רגישות לפאזה לא לינארית, והמסננים IIR השימושיים יעילים להעברת תדרים מסוימים, אך מביאים עיוות לא לינארי ומפריע בפאזה. יישום מידי של מסנן All-Pass הינו לתקן בקירוב את עיוות המובאת בפאזה, בכדי לשאוף לפאזה לינארית או כמעט לינארית.

דוגמה 5.6: דוגמא מספרית של מסנן All-Pass יציב בעל פונקציית תמסורת

$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-3} \frac{3 + z + \frac{1}{2}z^2 + z^3}{3 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3}}{3 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}} \end{aligned}$$

מוצגת באיור 5.4; רואים את הקשר בין הקטבים לאפסים, וכי הגבר המסנן שווה ל-1 עבור כל התדרים.



איור 5.4: דוגמה למסנן מעביר כל

5.5 פאזה מינימלית

נקדים את הדברים ע"י דוגמה.

דוגמה 5.7: נתונות זוג מערכות, כאשר נשווה תגובת אמפליטודה והשהיית חבורה שלהם:

$$\begin{aligned}
 h_1[n] &= \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] & h_2[n] &= \frac{1}{2}\delta[n] + \delta[n-1] \\
 H_1(z) &= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z} & H_2(z) &= \frac{1}{2} + z^{-1} = \frac{\frac{1}{2}z + 1}{z} \\
 H_1(e^{j\omega}) &= 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} & H_2(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} + e^{-j\omega} \\
 |H_1(e^{j\omega})| &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\omega)\right)^2} & |H_2(e^{j\omega})| &= |H_1(e^{j\omega})| \\
 \angle H_1(e^{j\omega}) &= \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)}\right) & \angle H_2(e^{j\omega}) &= \arctan\left(\frac{-\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}\right) \\
 \tau_{gd}(\omega) &= \frac{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}{2\frac{1}{2} + 2\cos(\omega)} & \tau_{gd}(\omega) &= \frac{2 + \cos(\omega)}{2\frac{1}{2} + 2\cos(\omega)}
 \end{aligned}$$

לסיכום:

□ תגובות אמפליטודה של שתי המערכות זהות,

$$(5.18) \quad |H_2(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\omega)}$$

□ האפסים של מערכות $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = -2$ משמרים יחס של $z_1 = 1/z_2$.

$$\square \text{ מתקיים } \tau_2(\omega) > \tau_1(\omega) \quad \forall \omega$$

פאזה מינימלית (הגדרה 5.3): מערכת עם השהיית חבורה מינימלית מבין כל המערכות עם אותה תגובת אמפליטודה נקראת מערכת בעלת פאזה מינימלית.

תנאי לפאזה מינימלית (תכונה 5.8): עבור מערכת סיבתית בעלת פאזה מינימלית היא מערכת בעלת:

$\square$ כל הקטבים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה. מדובר בתנאי ליציבות (ראה תכונה 3.15).

$\square$ כל האפסים שלה נמצאים בתוך מעגל היחידה. התנאי מבטיח בין היתר, כי מערכת הפוכה תהיה יציבה, עם קטבים בתוך מעגל יחידה.

הפיכות (תכונה 5.9): מערכת סיבתית בעלת פאזה מינימלית היא הפיכה, בעלת מערכת הפוכה יציבה וסיבתית.

קשר בין פאזה מינימלית לבין מעביר-כל (תכונה 5.10): כל מערכת ניתן להציג כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass,

$$(5.19) \quad H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$$

■ **הערה 5.5** ! הוספת מערכת בתור (מערכת all-pass במקרה זה) יכולה רק להוסיף השהייה.

דוגמה 5.8: נניח שלמערכת $H(z)$ ישנו אפס מחוץ למעגל יחידה ב- $z = 1/a, |a| < 1$. ניתן להציג את המערכת ע"י

$$(5.20) \quad H(z) = H_1(z)(z^{-1} - a),$$

כאשר $H_1(z)$ היא מערכת בעלת פאזה מינימלית. ניתן לשים לב, שבגלל מיקום האפס, למערכת $H(z)$ אין מערכת הפוכה יציבה.

יש להציג את המערכת כרצף של מערכת עם פאזה מינימלית ומערכת all-pass.

פתרון:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(z^{-1} - a) \\ &= H_1(z)(z^{-1} - a) \underbrace{\frac{1 - az^{-1}}{1 - az^{-1}}}_{=1} \\ (5.21) \quad &= \underbrace{H_1(z)(1 - az^{-1})}_{\text{minimum phase}} \underbrace{\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}}_{\text{all-pass}} \end{aligned}$$

לסיכום, בנינו מערכת "תחליפית" למערכת $H(z)$ המקורית מהצורה $H_1(z)(1 - az^{-1})$, בעלת תגובת אמפליטודה זהה למערכת המקורית, ובעל מערכת הפוכה יציבה וסיבתית.

פרק 6

שינוי תדר דגימה

המטרה היא שינוי תדר דגימה של האות שכבר נדגם לפני כן.

6.1 העלת תדר דגימה

נגדיר בקטע זה את פעולות על-דגימה ואינטרפולציה.

6.1.1 על-דגימה

על דגימה (הגדרה 6.1): נתון אות בדיד $x[n]$ ומספר $L \in \mathbb{N}$ (טבעי, שלם גדול מ-1). אנו נגדיר את התת-דגימה בפקטור L את המרת $x[n]$ לאות החדש שלהלן

$$(6.1) \quad y[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = kL \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]$$

ברם, אנו מכניסים בין שתי דגימות $L - 1$ אפסים. ניתן לומר שפעולת תת-דגימה דומה למתיחה במישור של אותות בזמן רציף, מפני שהאיבר ב-1 מועבר ל- L , 2 מועבר ל- $2L$ וכו'. לעומת התת דגימה, הפעולה הזו חד-חד ערכית, ואין איבוד מידע.

דוגמה 6.1: לדוגמה, עבור $L = 2$,

$$(6.2) \quad x[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$y[n] = \{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0\}$$

6.1.2 DTFT של אות לאחר על-דגימה

כפי שהובהר, העל-דגימה מבצע מתיחה במישור הזמן. לפי תכונותיה היסודיות של התמרות פורייה, אנו מצפים לראות כיווץ במישור התדר. אמנם מתגלה שאכן קיימת כיווץ, אך בנוסף מתווספים תוכן ספקטראלי לא רצוי.

התמרת DTFT (תכונה 6.1): בהינתן אות בדיד $x[n]$ בעל DTFT $X(e^{j\omega})$ ומספר טבעי L , ה-DTFT של

מה קורה בתדר?

$$(6.3) \quad y[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = kL \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

שווה ל-

$$(6.4) \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}).$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL]e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - kL]e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jkL\omega} \\ &= X(e^{j\omega L}) \end{aligned}$$

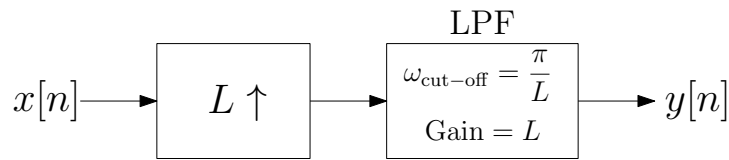
הערה 6.1 ! ההוכחה הזו גם מספקת את התמרת Z של האות לאחר פעולת על דגימה,

$$(6.5) \quad Y(z) = X(z^M).$$

6.1.3 אינטרפולציה

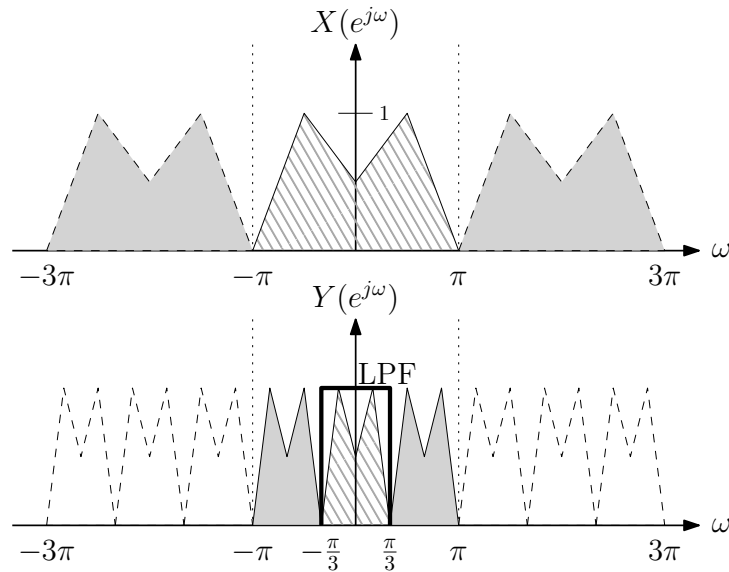
להלן דוגמא המראה מדוע ניתן לקשור את העל דגימה לכיווץ במישור התדר, והצורך במסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון $\frac{\pi}{L}$ לאחר על דגימה בפרמטר L , כך שיתבטלו חלקי הספקטרום הבלתי רצויים ולישמור ככל הניתן בתכונות האות המקורי. שילוב שתי הפעולות לעיל, כמסוכם באיור 6.1, נקראית אינטרפולציה בפקטור L .

איך משתמים בפועל?



איור 6.1: פעולת אינטרפולציה.

דוגמה 6.2: אינטרפולציה עבור $L = 3$ מופיע באיור 6.2. תשימו לב, שמה שמופיע כהרחבה מחזורית של האות $X(e^{j\omega})$ נהיה חלק מהאות $Y(e^{j\omega})$. ניתן גם לראות, כי העל דגימה גורמת כיווץ במישור התדר על כל הסקלה ספקטרלית תוך יצירת חלקים לא רצויים.

איור 6.2: דוגמה של על-דגימה ואינטרפולציה עבור $L = 3$.

6.2 הורדת תדר דגימה

נגדיר בקטע זה את פעולות תת-דגימה ודסימציה. נתחיל עם התת-דגימה, משום שהפעלות הללו קשורות זה לזה.

6.2.1 תת-דגימה

תת-דגימה (הגדרה 6.2): נתון אות בדיד $x[n]$ ומספר $M \in \mathbb{N}$ (טבעי, שלם גדול מ-1). אנו נגדיר את התת-דגימה בפקטור M את המרת $x[n]$ לאות החדש שלהלן

$$(6.6) \quad y[n] = x[Mn].$$

זאת אומרת, אנו שומרים את האיברים הנמצאים בזמנים הכפולים של M . ניתן לומר, שפעולת תתדגימה דומה לכיווץ במישור של אותות בזמן רציף, מפני שהאיבר ב- M מועבר ל- $2M$, מועבר ל-2 וכו'. אך בניגוד לכיווץ הרגיל, אנו מאבדים מידע. למעשה, עבור אותות בזמן

רצף, הכיווץ הינה פעולה הופכית. לעומת זאת, כאן כל האיברים הנמצאים בין $(k-1)M$ לבין kM (לא כולל) הולכים לאיבוד.

דוגמה 6.3: לדוגמה, עבור $M=2$,

$$(6.7) \quad \begin{aligned} x[n] &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ y[n] &= \{1, 3, 5\} \end{aligned}$$

6.2.2 DTFT של אות לאחר תת-דגימה

כפי שהובהר, התת-דגימה מבצע כיווץ במישור הזמן. לפי תכונותיה היסודיות של התמרות פורייה, אנו מצפים לראות מתיחה במישור התדר. אמנם מתגלה שאכן קיימת מתיחה, אך בנוסף מתווספת תופעת Aliasing עקב מחזוריות ה-DTFT.

תת-דגימה במישור התדר (הגדרה 6.3): בהינתן אות בדיד $x[n]$ בעל DTFT $X(e^{j\omega})$ ומספר טבעי M , ה-DTFT של $y[n] = x[Mn]$ שווה ל-

איך זה משפיע?

$$(6.8) \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{1}{M}(\omega-2\pi m)}).$$

הוכחה.

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \text{DTFT}\{y[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[Mk]e^{-jk\omega} \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=kM}}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega/M} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n \bmod M]e^{-jn\omega/M} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2j\pi nk/M} e^{-jn\omega/M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn(\omega-2\pi k)/M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j\frac{1}{M}(\omega-2\pi k)}) \end{aligned}$$

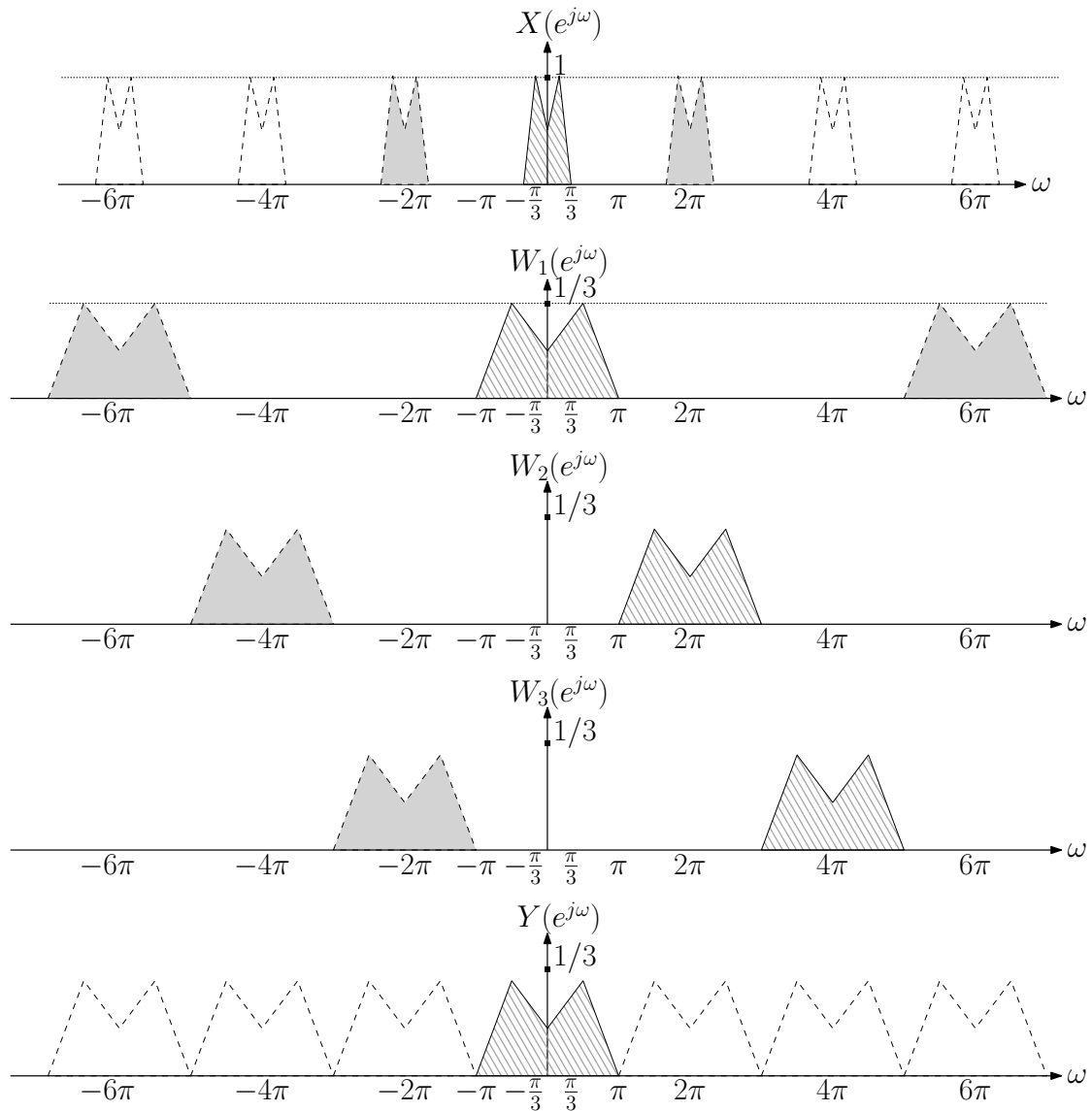
הערה 6.2 ! ההוכחה הזו גם מספקת את התמרת Z של האות לאחר פעולת תת דגימה.

$$(6.10) \quad Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M})$$

דוגמה 6.4: עבור $M=3$ נקבל

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{3} \sum_{m=0}^2 X(e^{j\frac{1}{3}(\omega-2\pi m)}) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{3} X(e^{j\omega/3})}_{W_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\frac{1}{3} X(e^{j\frac{1}{3}(\omega-2\pi)})}_{W_2(e^{j\omega})} + \underbrace{\frac{1}{3} X(e^{j\frac{1}{3}(\omega-4\pi)})}_{W_3(e^{j\omega})}
 \end{aligned}$$

את ההשפעה של כל אחד מאיברי הסכום להלן ניתן לראות באיור 6.3.

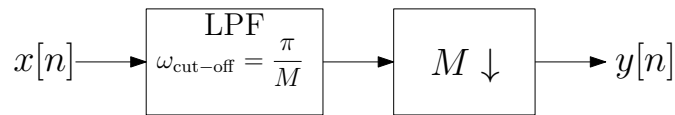


איור 6.3: דוגמה של תת-דגימה עבור $M = 3$.

6.2.3 דסימציה

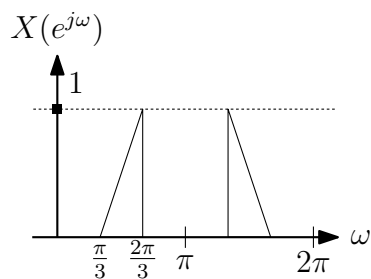
על מנת למנוע תופעת Aliasing, נהוג לבצע סינון ע"י מסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון לפני תת דגימה בפרמטר M , כך שלאחר ההתרחבות הצפויה לא יהיה Aliasing כלל או שיהיה ניתן להזניח אותו. שילוב שתי הפעולות לעיל, כמסוכם באיור 6.4, נקראית דסימציה בפקטור M .

איך בכל זאת משתמשים?



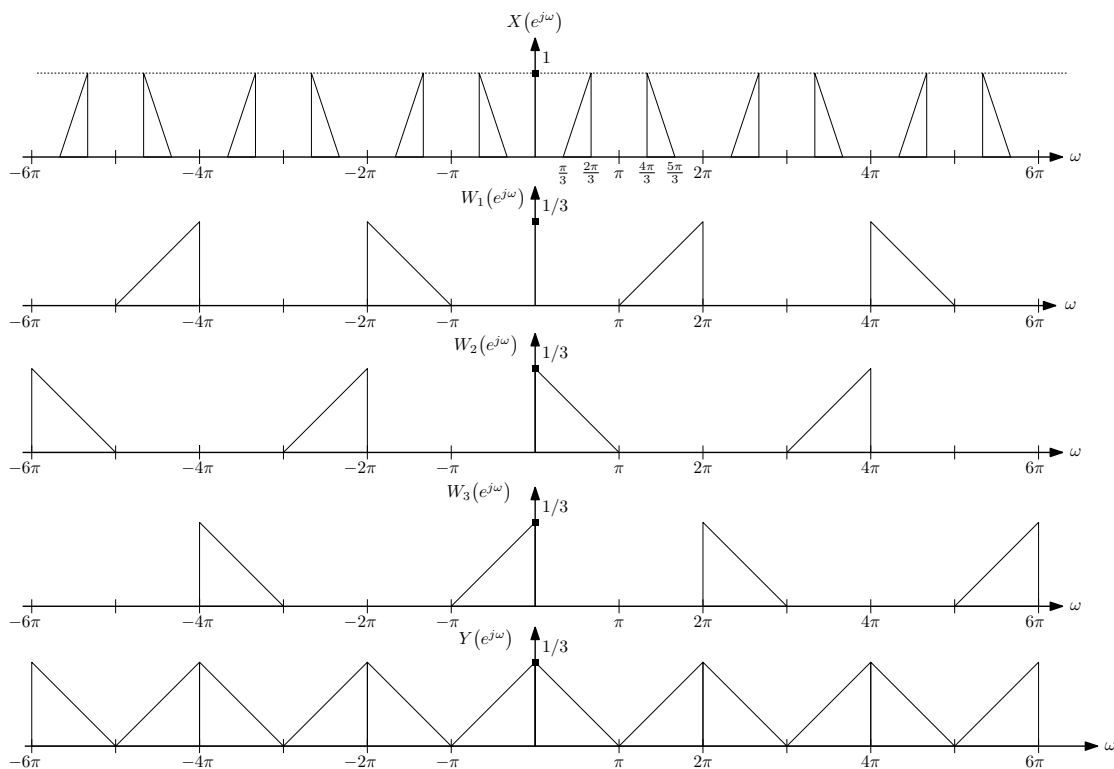
איור 6.4: פעולת דסימציה בפקטור M .

דוגמה 6.5: נתון אות מהצורה



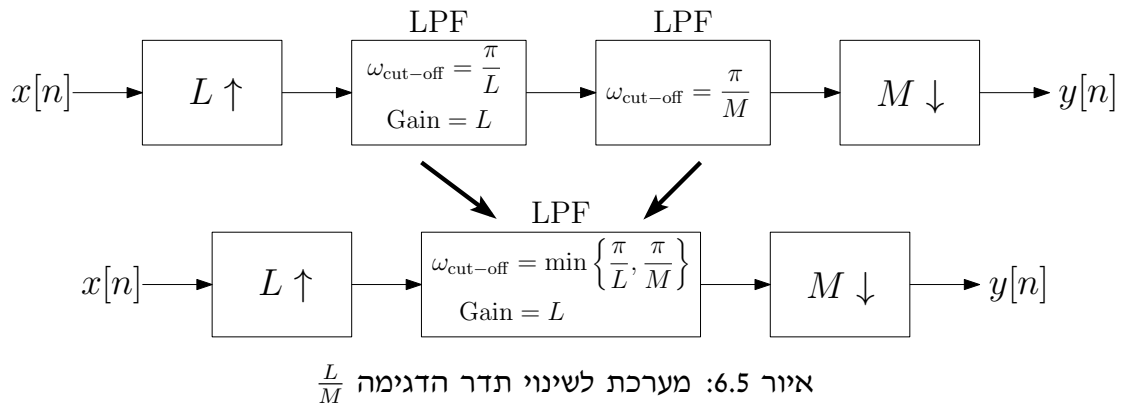
חשב אות תגובת אמפליטודה של האות המתקבל אחרי תת-דגימה עם $M = 3$.

פתרון: פתרון גרפי,



6.3 שינוי תדר הדגימה

שינוי תדר דגימה במספר רציאונלי (הניתן להצגה כמנה של מספרים שלמים), מוצג באיור 6.5.



חלוקת תדרי הדגימה למספרים הראשוניים מאפשרת לנו למצוא את הערכים של L ו- M באופן כללי, וניתנת לבצוע במטל"ב בעזרת הפקודה `ifactor`.

דוגמה 6.6: בכמה יישומי אודיו או וידאו מופיע הצורך לשנות את תדר הדגימה. למשל, נניח כי אנו רוצים להמיר סרט שהוקלט ב-CD (תדר דגימה רגיל $44.1kHz$) ל-Bluray, עבורו תדר הדגימה שווה ל- $192kHz$ (שימו לב כי המספרים הללו אינם פרופורציונליים!). מובן, שאיננו רוצים לחזור לאות הרציף (יגרום לעיוותים לא רצויים, והפעולה יקרה).

פתרון: נשים לב, שמתקיים

$$\begin{aligned} 44100 &= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \\ 192000 &= 2^9 \times 3 \times 5^3 \\ \Rightarrow 192000 &= \frac{2^7 \times 5}{3 \times 7^2} \times 44100 = \frac{640}{147} \times 44100 \end{aligned}$$

על כן נבחר $L = 2^7 \times 5 = 640$, $M = 3 \times 7^2 = 147$.

6.4 שינוי זמן הדגימה

בהמשך לניתוח במישור התדר, נציג ניתוח במישור הזמן, כאשר נקודות הדגימה נמצאות במרווחים לא אחידים.

Linear Interpolation (הגדרה 6.4): בהינתן זוג דגימות: דגימה x_1 בזמן t_1 ודגימה x_2 בזמן t_2 , ניתן למדל ערך x של האות במרווח $t \in [t_1, t_2]$ ע"י קו ישר. הקשר בין הערכים נתון ע"י משוואת קו ישר,

$$(6.11) \quad x = at + b$$

כאשר ההצבה

$$(6.12) \quad \begin{aligned} x_1 &= at_1 + b \\ x_2 &= at_2 + b \end{aligned}$$

מאפשרת לקבל ערכי a, b מהצורה

$$(6.13) \quad x = x_1 + (t - t_1) \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

הערה 6.3 ! השיטה להלן ניתנת למימוש גם עבור שינוי תדר דגימה, אבל עם ביצועים פחותים לעומת השיטות במישור התדר, בגלל תופעת aliasing.

הערה 6.4 ! מדובר בשיטה בסיסית עם הרחבות מורכבת בהרבה, לדוגמה מבוססות על פולינומים מחזקה גבוהה יותר.

הערה 6.5 ! השיטה לא מתאימה לדגימות של אות בתוספת רעש משמעותי.

שלבי המימוש:

1. עבור זמן העניין t_0 , יש לזהות זוג מתאים של זמנים t_1, t_2 .

2. יש לבצע חישוב

$$x_0 = x_1 + (t_0 - t_1) \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

3. יש להוסיף דגימה התקבלת (t_0, x_0) לאות החדש ולחזור לסעיף 1 כל עוד יש נקודת עניין נוספת.

פרק 7

התמרת פוריה בדידה

7.1 הקדמה

התמרה המעשית
שמשתמשים בפועל

בפרקים הקודמים הסתכלנו על התמרת Z והתמרת פורייה בזמן בדיד (DTFT), כלומר על התמרות שמבצעות מעבר ממישור זמן בדיד למישור תדר רציף. אף על פי שהן מאפשרות לנו לממש רוב המסננים המקובלים, אנחנו גם מעוניינים לבצע פעולות במישור תדר בדיד, בכדי לתכנן אותן ללא קירוב על ידי Matlab. למעשה, כאשר מתכננים מסנן LTI דיגיטלי במציאות, איננו יכולים להבטיח שנקבל בדיוק איזושהי תגובה בתדר, אלא קירוב שיהיה יותר טוב ככל שמספר הנקודות בתגובה להלם גדל. השאלה המתעוררת היא: האם נוכל לשלוט בתגובה בתדר עבור כמה נקודות (כלומר, לקבל ערך מטרתי נתון) ?

באור השאלות האלה מופיע הצורך להגדיר התמרה חדשה, שפועלת על אותות בדידים וסופיים בזמן (כיוון שבעצם הם האותות היחידים שנפגשים במציאות) ומבצעת את המעבר ממישור הזמן הבדיד למישור תדרים בדידים : ההתמרה זו נקראת התמרת פורייה הבדידה (DFT - Discrete Fourier Transform).

7.2 הגדרה

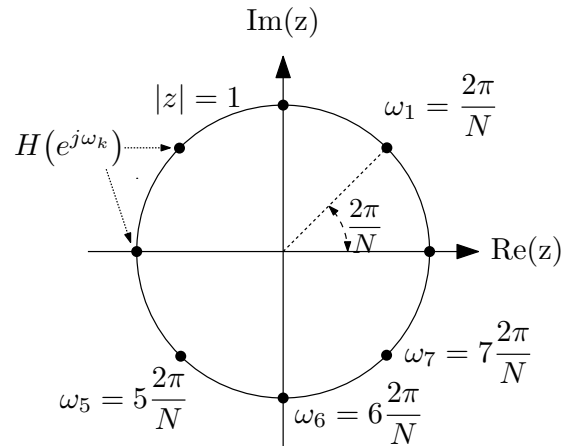
התמרת פוריה בדידה (הגדרה 7.1): נתון האות הסופי בזמן $x[n]$ באורך N , בעל התמרה $H(e^{j\omega})$. נדגום את מעגל היחידה לפי N נקודות דגימה אשר מתפלגות באופן אחיד על גבי מעגל היחידה בתדרים $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0 \dots N-1$. סדרת דגימות המתקבלת היא

$$(7.1) \quad X[k] = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi}{N}k} = X(z) \Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

ניתן להגדיר את ההתמרה ואת ההתמרה הפוכה באופן הבא:

$$(7.2) \quad X[k] = \text{DFT} \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} kn \right\} \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$(7.3) \quad x[n] = \text{IDFT} \{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp \left\{ j \frac{2\pi}{N} kn \right\} \quad n = 0, \dots, N-1$$



איור 7.1: N נקודות דגימה של $H(e^{j\omega})$ ע"ג המעגל היחידה בתדירים $\omega_k = 2\pi k/N, \quad k = 0 \dots N-1$

W_N (הגדרה 7.2): מקובל להשתמש בסימון $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

רישום מטריצינוני (הגדרה 7.3): ניתן לרשום את ההתמרה

$$(7.4) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

בצורה ווקטורית

$$(7.5) \quad \mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

כאשר

$$(7.6) \quad \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

דוגמה 7.1: נתון אות

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$$

(א) חשב התמרת DTFT של האות.

(ב) חשב התמרת DFT של האות.

פתרון: מתוך דוגמה 3.2 אנחנו יודעים, ש-

$$X(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}, \quad z \neq 0.$$

(א) בהתאם להגדרה, מתקבל

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X(z = e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{3}{2}\omega} \end{aligned}$$

כצפוי, מדובר במערכת בעלת פאזה לינארית.

(ב) ניתן לקבל את התוצאה בכמה דרכים:

□ בהתאם להגדרה, ע"י הצבה של $\omega = \omega_k$ בתוך $X(e^{j\omega})$ מתקבל

$$\begin{aligned} X[k] &= X(e^{j\omega_k}), \quad \omega_k = \left\{ 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\} \\ &= [4, 0, 0, 0] \end{aligned}$$

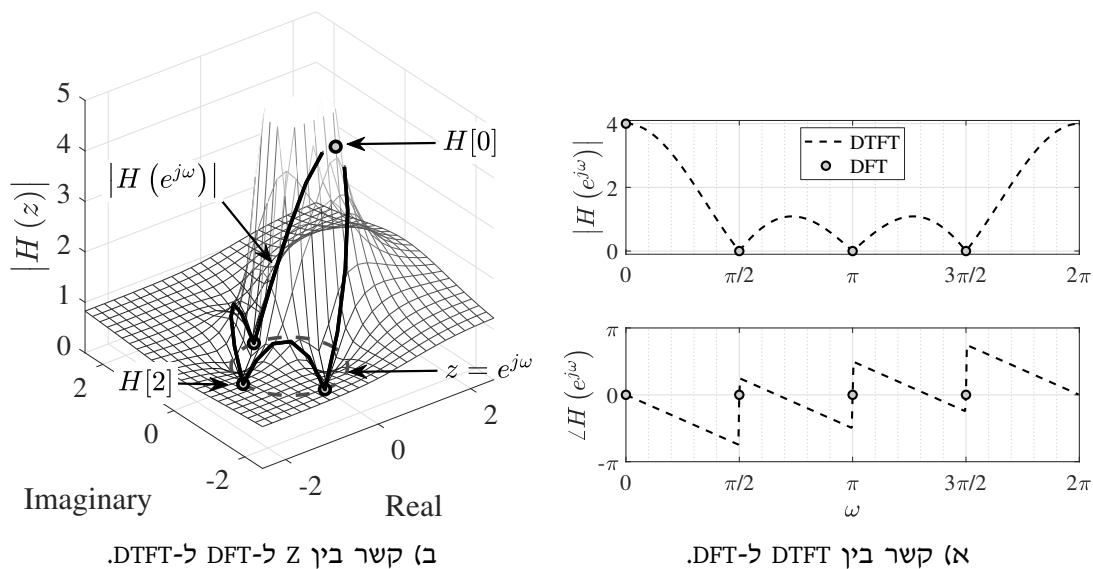
□ דרך נוספת היא חישוב ע"פ הגדרה. לדוגמה,

$$\begin{aligned} X[0] &= \sum_{n=0}^3 x[n] W_4^{n \cdot 0} = 4 \\ X[1] &= \sum_{n=0}^3 x[n] W_4^{n \cdot 1} = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}n \cdot 1} \\ &= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{4}} + e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j\frac{2\pi}{4}3} \\ &= 1 + e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{j\pi} + e^{j\frac{3\pi}{2}} \\ &= 1 - j - 1 + j = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

□ דרך נוספת היא חישוב ווקטורי

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

את הקשר בין ההגדרות ניתן לראות באיור 7.2.



איור 7.2: קשר בין ההתמרות.

7.3 תכונות התמרת DFT

7.3.1 ציקליות

mod (הגדרה 7.4): פעולה $a \bmod b$ היא שארית חיובית של החלוקה של מספר a במספר b .

דוגמה 7.2: דוגמה מספרית

$$\begin{array}{ll}
 5 \bmod 3 = 2 & 1 \bmod 3 = 1 \\
 4 \bmod 3 = 1 & 0 \bmod 3 = 0 \\
 3 \bmod 3 = 0 & -1 \bmod 3 = 2 \\
 2 \bmod 3 = 2 & -2 \bmod 3 = 1
 \end{array}$$

מחזוריות (תכונה 7.1): נתון אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$; ה-DFT היא פונקציה מחזורית במחזור N , כלומר $X[k] = X[k + N]$. דרך המקובלת לרשום את המחזוריות היא ע"י

$$(7.7) \quad X[k] = X[k \bmod N].$$

הוכחה. מידית לפי הגדרתה של ה-DFT.

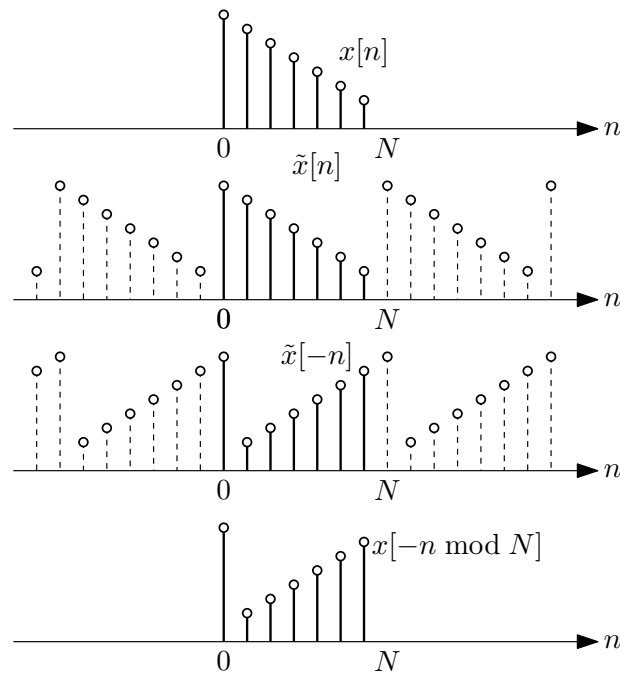
שיקוף (הפיכה) ציקלית (הגדרה 7.5): ניתן להגדיר שיקוף ציקלי בזמן בדומה לשיקוף רגיל (הגדרה 2.8)

$$(7.8) \quad y[n] = x[-n \bmod N].$$

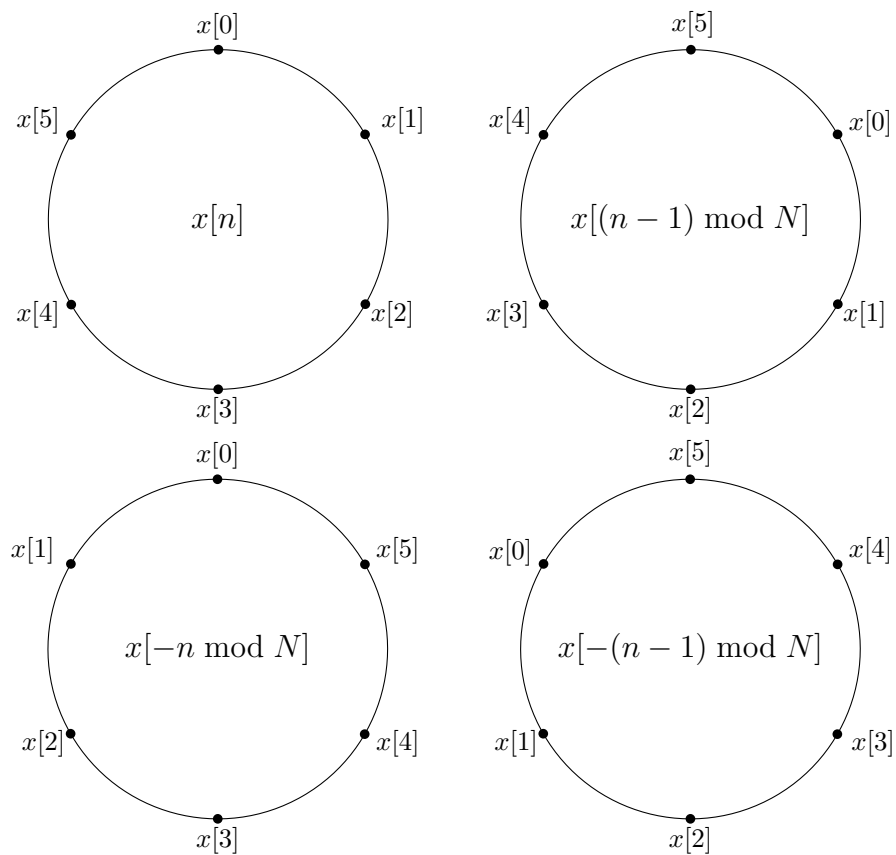
הזזה ציקלית (הגדרה 7.6): ניתן להגדיר הזזה ציקלית בזמן בדומה להזזה רגילה (הגדרה 2.9)

$$(7.9) \quad y[n] = x[(n - m) \bmod N].$$

דוגמה 7.3: ניתן לראות דוגמה לשיקוף והזזה ציקליים בזמן, מיוצגים ע"י הרחבה מחזורית בזמן באיור וע"י הצגה ציקלית באיור 7.4.



איור 7.3: היפוך הזמן ציקלי -- ייצוג ע"י הרחבה מחזורית.



איור 7.4: פעולות ציקליות בזמן.

7.3.2 תכונות

לינאריות (תכונה 7.2): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$, $x_2[n]$ ובעלי התמרות $X_1[k] = \text{DFT}\{x_1[n]\}$, $X_2[k] = \text{DFT}\{x_2[n]\}$

$$(7.10) \quad \text{DFT}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]$$

הוכחה. מידית לפי הגדרתה של ה-DFT.

הערה 7.1 ! האם התכונה נשמרת עבור שני אותות בגודל שונה? תשובה היא כן, אם מסתכלים על האותות המרופדים עם אפסים בכדי לקבל גודל זהה.

הזזה בזמן (תכונה 7.3): עבור אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$

$$(7.11) \quad \text{DFT}\{x[(n-m) \bmod N]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k] = W_N^{km} X[k]$$

הזזה בתדר (תכונה 7.4): עבור אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$

$$(7.12) \quad \text{DFT}\{W_N^{-mn} x[n]\} = \text{DFT}\{e^{j\frac{2\pi}{N}km} x[n]\} = X[(k-m) \bmod N]$$

דואליות (תכונה 7.5): עבור אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$

$$\text{DFT}\{X[n]\} = Nx[(-k) \bmod N]$$

הוכחה. מתקבל לאחר חישוב:

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \text{DFT}\{X[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{nk} = N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-n(-k \bmod N)} \\ &= Nx[(-k) \bmod N] \end{aligned}$$

התכונה כמעט ולא נמצאת בשימוש מעשי, וחשיבותה היא בעיקר תאורטית.

צימוד (תכונה 7.6): עבור אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$

$$(7.14) \quad \text{DFT}\{x^*[n]\} = X^*[(-k) \bmod N] = X^*[(N-k) \bmod N]$$

$$(7.15) \quad \text{DFT}\{x^*[(-n) \bmod N]\} = X^*[k]$$

הוכחה. מתקבל לאחר חישוב:

$$\text{DFT}\{x^*[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(-k \bmod N)} \right)^* \\
&= X^*[-k \bmod N] \\
&= X^*[(N-k) \bmod N]
\end{aligned}$$

השוויון השני מתקבל באותו אופן.

קונבולוציה ציקלית (הגדרה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו- $x_2[n]$ באורך N_2 , כאשר $N \geq \max(N_1, N_2)$, ניתן להגדיר

$$(7.16) \quad x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m) \bmod N]$$

הוכחה.

מכפלה בתדר (תכונה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו- $x_2[n]$ באורך N_2 , כאשר $N \geq \max(N_1, N_2)$, מתקבל:

$$(7.17) \quad \text{DFT} \left\{ x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] \right\} = X_1[k] X_2[k]$$

הוכחה. לפי הגדרת ה-DFT, מתקבל לפי התכונות הרגילות של השארית.

$$\begin{aligned}
\text{DFT} \left\{ x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] \right\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m) \bmod N] W_N^{mk} W_N^{(n-m)k} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] W_N^{mk} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[(n-m) \bmod N] W_N^{((n-m) \bmod N)k} \\
&= \text{DFT} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m) \bmod N] \right\} \\
&= X_1[k] X_2[k]
\end{aligned}$$

(7.18)

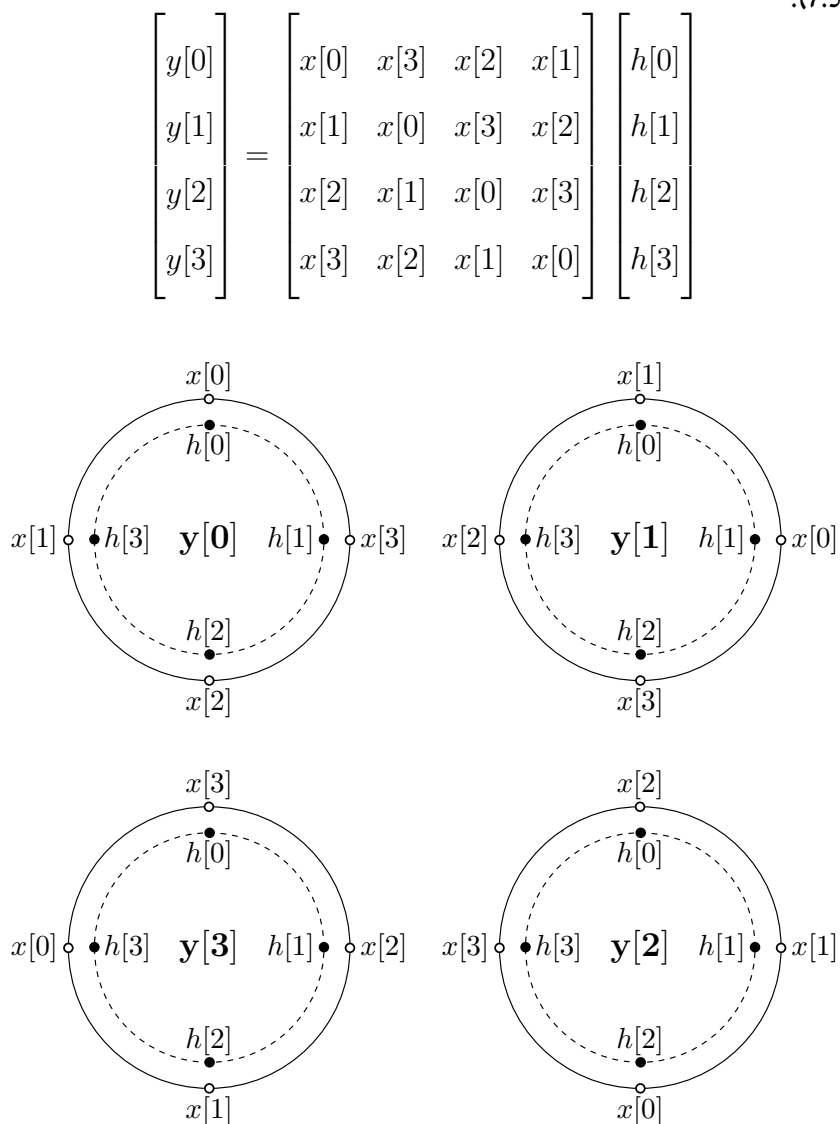
הערה 7.2 ! עבור קונבולוציה לינארית מתקיים הקשר

$$y[n] = \sum_m h[m] x[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

כאשר התכונות הציקליות נובעות ישירות מתכונות מחזוריות של $Y(e^{j\omega})$.

דוגמה 7.4: חישוב קונבולוציה ציקלית של סדרות באורך 4 בייצוג של כפל מטריצות ובייצוג

גרפי (איור 7.5).



איור 7.5: קונבולוציה ציקלית.

כפל (תכונה 7.8): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו- $x_2[n]$ באורך N_2 , כאשר $N \geq \max(N_1, N_2)$. מתקבל:

$$(7.19) \quad \text{DFT} \{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\circledast} X_2[k]$$

הוכחה. לפי הגדרת ה-DFT, מתקבל לפי התכונות הרגילות של השארית.

$$\begin{aligned}
 \text{DFT} \{x_1[n]x_2[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2[n]W_N^{nk} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} X[l]W_N^{(k-l)n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2[l] \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]W_N^{((k-l) \bmod N)n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2[l]X_1[(k-l) \bmod N] = \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\circledast} X_2[k]
 \end{aligned}
 \tag{7.20}$$

משפט פרסבל (תכונה 7.9): נתון אות בדיד $x[n]$ סופי בזמן, באורך N , ובעל התמרה $X[k]$. המשפט מתאר שימור אנרגיה (הגדרה 2.17) מהצורה

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2
 \tag{7.21}$$

ההוכחה דומה להוכחת משפט פרסבל עבור ה-DTFT (תכונה 4.8).

תכונות של התמרת DFT מסוכמות בטבלה 7.1.

טבלה 7.1: תכונות שימושיות של התמרות DFT

Properties	Signal	DTF
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Time shift	$x[(n-m) \bmod N]$	$W_N^{km} X[k]$
Frequency scaling	$W_N^{-mn} x[n]$	$X[(k-m) \bmod N]$
Time reversal	$x[-n \bmod N]$	$X^*[k] = X[-k \bmod N]$
Conjugation	$x^*[n]$	$X[-k \bmod N]$
Convolution	$x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Multiplication in time	$x_1[n]x_2[n]$	$X_1[k] \overset{N}{\circledast} X_2[k]$

הערה 7.3! על מנת לחשב את ה-DFT באופן ישיר, אנו צריכים N מכפלות ו- N סכומים מרוכבים עבור כל ערך של k , כאשר כל מכפלה מרוכבת היא 4 מכפלות ממשיים, וכל סכום מרוכב הוא 2 סכומים ממשיים. מקובל לציין, שסיבוכיות החישוב היא מסדר גודל של $O(N^2)$.

חשוב להדגיש, שיש אלגוריתמים יעילים בהרבה, שהסיבוכיות לשלהן היא $O(N \log_2 N)$, הנקראים Fast Fourier Transform או בקיצור FFT, בהם נעשה שימוש כשנדרש לחבר התמרת DFT בפועל.

פרק 8

מבוא לשיערוך ספקטרום

השימוש המרכזי של התמרת DFT הוא לקבל קירוב לתגובת תדר/אמפליטה "האמיתיים" של האות ספרתי ו/או אנלוגי מקורי. כאשר האות מייצג תגובה להלם של מערכת מסויימת, מדובר בקירוב לתגובת תדר של המערכת. להלן, נדון בהבטים שונים של שימוש מעשי בהתמרת DFT.

8.1 סיכום הקשר בין ההתמרות

□ התדר של התמרת DFT הוא תדר בדיד, k , כאשר $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

□ המרווח בין דגימות התדר של DTFT הוא $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$, כאשר ישנן N דגימות, בתדרים

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

□ המרווח בין דגימות התדר של התמרת פוריה בזמן רציף (FT) הוא

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{T} = \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{N}F_s$$

בהתאם לקשר $\Omega T = \omega$.

□ הקשר בין מספר דגימה לתדר אנלוגי

$$(8.1) \quad \omega_k \rightarrow \Omega_k = \frac{\omega_k}{T} = 2\pi \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \frac{k}{N}F_s$$

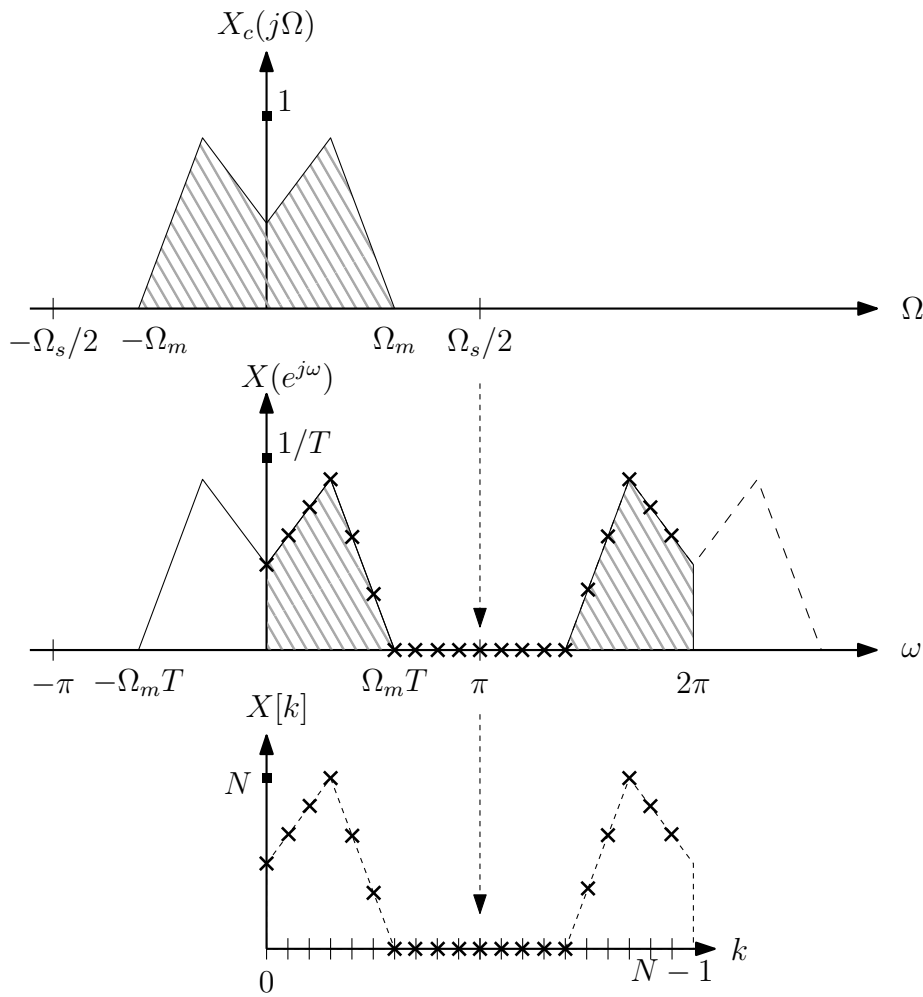
$$(8.2) \quad F_k = \frac{\Omega_k}{2\pi} \rightarrow \boxed{F_k = \frac{k}{N} \frac{1}{T} = \frac{k}{N}F_s}$$

□ תדרי ω הקשורים להתמרת DFT הם בתחום $[0, 2\pi)$,

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- התדרים $(\pi, 2\pi)$ המתייחסים לתחום תדרים שליליים של $\left(-\frac{\Omega_s}{2}, 0\right)$.

- ב-Matlab, החזרת התדרים "למקומם" נעשת ע"י פקודה `fftshift`.



איור 8.1: קשר בין FT, DTFT ו-DFT.

8.2 ריפוד באפסים

תכונת ריפוד באפסים היא תכונה חשובה, כדי לקבל בקלות קירוב מדויק יותר של ספקטרום בדיד, או של אות בדיד.

מה קשר בין כמה דגימות של $H[k]$ למשהו אמיתי?

ריפוד באפסים במישור הזמן (תכונה 8.1): נתון אות בדיד $x[n]$ סופי בזמן, באורך N ובעל התמרה $X[k]$; יוצרים אות מרופד באפסים באורך M ע"י

$$(8.3) \quad y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

ה-DFT באורך M נקודות בקשר של $y[n]$

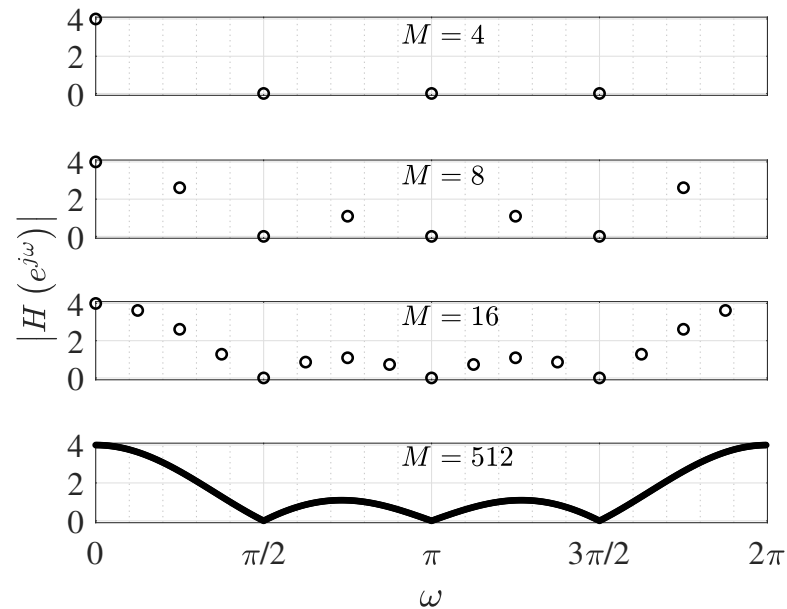
$$(8.4) \quad \text{DFT}_M \{y[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_M^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk \frac{N}{M}} = \text{DFT} \{x[n]\} \left(e^{-j2\pi k \frac{N}{M}} \right)$$

דוגמה 8.1: אני מתעניינים באות

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$= \{1, 1, 1, 1\}$$

שאנו מרפדים עם אפסים. אנחנו כבר יודעים שה-DTFT היא מהצורה של sinc . ניתן לראות התמרת DFT של האות מרופד עם מספר שונה של אפסים באיור 8.2.



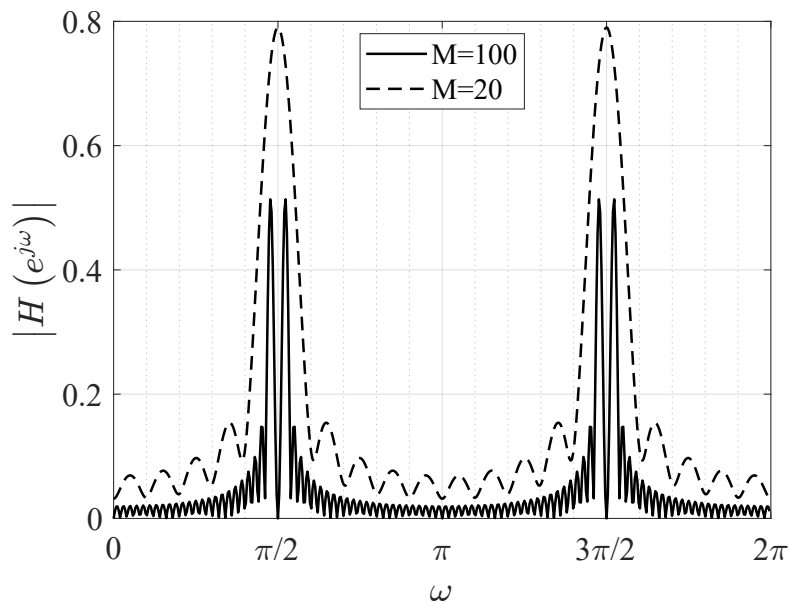
איור 8.2: ריפוד באפסים - התמרה באורך שונה של אותו אות

הספקטרום של האות המרופד דומה יותר ל-DTFT של האות המקורי.

האם עוזר תמיד?
הלואי...

הערה 8.1! ריפוד באפסים לא מוסיף מידע חדש על האות.

דוגמה 8.2: נבחן אות $x[n] = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$, $n = 0, \dots, M-1$ עבור $M = 20, 100$. התוצאה מוצגת באיור 8.3.



איור 8.3: ריפוד באפסים לא מוסיף מידע חדש על האות.

8.3 חלונות

בדוגמאות קודמות (דוגמאות 1.1, 8.2) ניתן היה לשים לב, שצורת האות קוסינוס בתדר היא לא בדיוק זוג פונקציות דלתא, שהיינו מצפים לקבל. בחלק הזה נעמוד על מקור התופעה.

בעייה מספר אחד של DFT

8.3.1 אות סופי בזמן

כל אות ספרתי הוא מיסוד יהיה סופי בזמן. כדי להמחיש, למה יש לכך השפעה, נתבונן בדוגמה עבור אות בזמן רציף.

דוגמה 8.3: נתון אות אנלוגי,

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A \cos(\Omega_1 t + \varphi) \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\Omega_1 t} e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} e^{j\Omega_1 t} e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

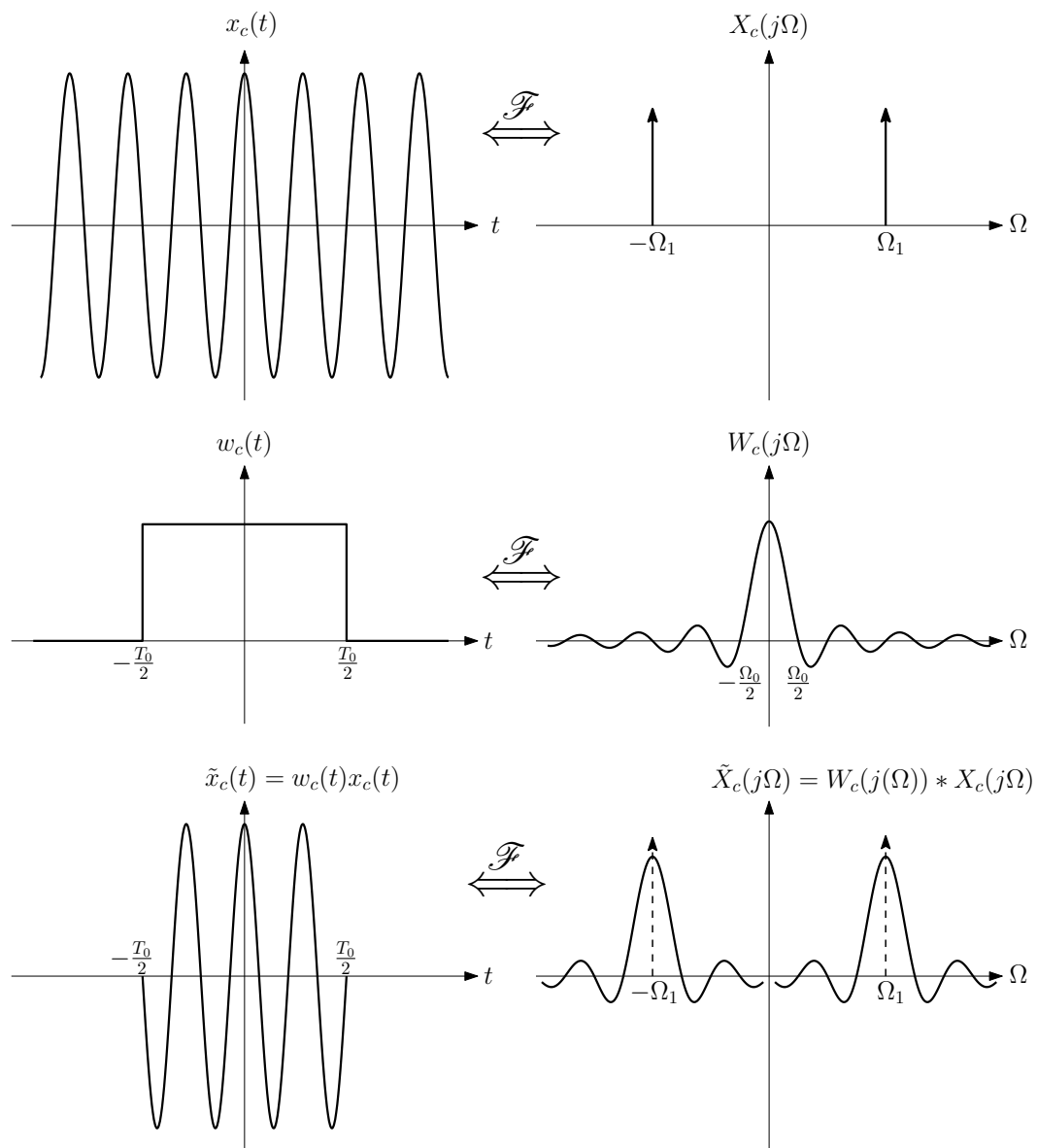
נניח, שמדובר באות סופי בזמן, באורך T_0 . בעצם מדובר בהכפלה בחלון,

$$w_c(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T_0/2, T_0/2] \\ 0 & t \notin [-T_0/2, T_0/2] \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W_c(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T_0/2)}{\Omega/2}.$$

כאשר מתקבל

$$\begin{aligned} \tilde{x}_c(t) &= w_c(t) x_c(t) = \frac{A}{2} w_c(t) e^{-j\Omega_1 t} e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} w_c(t) e^{j\Omega_1 t} e^{j\varphi} \\ &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ \tilde{X}_c(j\Omega) &= W_c(j(\Omega)) * X_c(j\Omega) = \frac{A}{2} W_c(j(\Omega + \Omega_1)) e^{-j\varphi} + \frac{A}{2} W_c(j(\Omega - \Omega_1)) e^{j\varphi} \end{aligned}$$

הייצוג גרפי של בעיית האות הסופי בזמן מוצג באיור 8.4.



איור 8.4: השפעה של אורך סופי בזמן (רציף) של האות על צורה של אופיין תדר.

סיכום:

□ אות מעשי הוא סופי בזמן $\Leftarrow$ התוצאה היא הכפלה בחלון בזמן = קונבולוצה עם sinc בתדר.

□ אות ארוך יותר בזמן $\Leftarrow$ ה-sinc בתדר הוא צר יותר.

□ מדובר במגבלה מובנת.

ההשפעה של זמן סופי על אות בזמן בדיד היא דומה, ולא תוצג פה בהרחבה ע"י פיתוח המתמטי.

8.3.2 השפעה

איך הבעיה מתבטאת?

ניתן לראות, כי התמרת פורייה הבדידה מחזירה לנו מידע חלקי על התוכן הספקטרי בלבד, בגלל אורך סופי. השינויים המתקבלים הם משתי סוגים (ראה גם איור 8.5):

א. דליפה ספקטרלית (spectral leakage) הגורמת להופעת תדרים "חדשים".

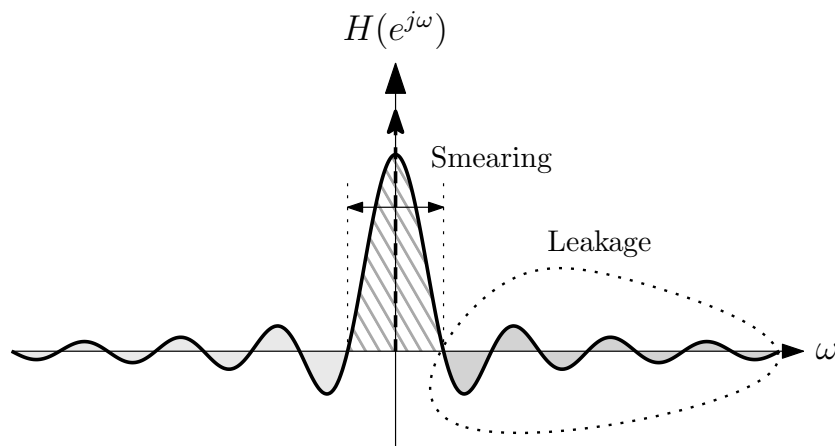
□ בתאוריה, האות אמור להיות שווה ל-0 מחוץ לפיק המרכזי.

□ בפועל ישנה גליות, דועכת או קבועה, בכל התדרים מחוץ לפיק המרכזי.

ב. התרחבות (smearing) ספקטראלית, הגורמת לפונציות דלתא להיות רחבות יותר.

□ האות התאורטי הוא פונ' דלתה.

□ בפועל מתקבל פיק ברוחב משמעותי.



איור 8.5: תופעת של דליפה ספקטרלית (Spectral Leakage) ומריחה ספקטרלית (Spectral Smearing).

8.3.3 חלון לא מלבני

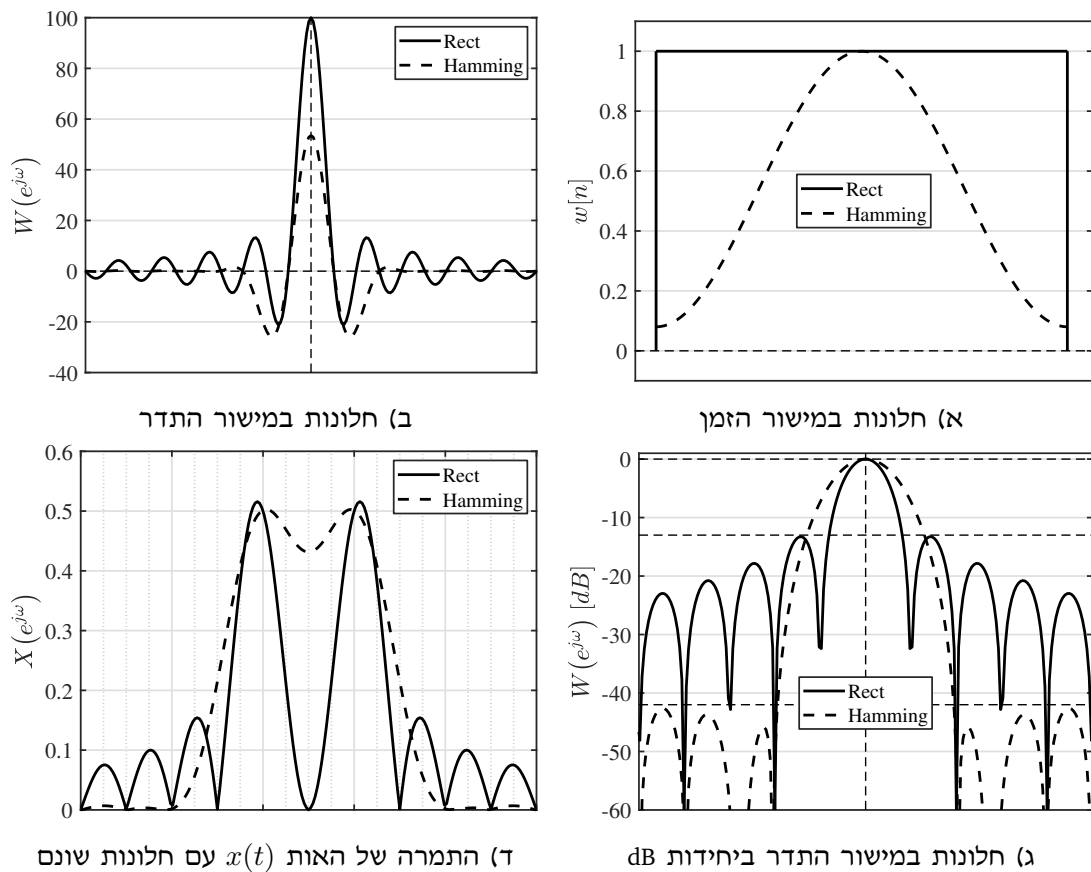
ההתמודדות עם התופעה היא ע"י שימוש בחלונות שונים חלון ריבועי עבור ניתוח במישור התדר. עיקר ההשפעה של החלונות היא **הקטנת דליפה על חשבון הגדלת מריחה**, כאשר החלון מלבני הוא בעל מריחה מינימלית האפשרית ודליפה מקסימלית.

הערה 8.2 ! חשוב להדגיש, שאמפליטודה של הדליפה אינה תלויה ברוחב החלון, אלא בסוג החלון בלבד.

דוגמה 8.4: בדוגמות 1.1 ו-8.2 הזכרנו אות מהצורה

$$x[n] = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

ההשפעה של חלון מסוג Hamming מופיע באיור 8.6. ניתן לראות הקטנה משמעותית של דליפה ספקטרלית, כאשר "המחיר" הוא קושי בלהפריד 2 הפיקים הנראים בבירור עבור חלון מלבני.



איור 8.6: דוגמה עבור חלון מלבני ועבור חלון Hamming.

דוגמה 8.5: נתון אות ספרתי

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) + 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right), \quad n = 0, \dots, N-1$$

המטרה היא לבחון אפשרות שימוש בחלון לא-מלבני עבור ערכי N שונים.

הערה 8.3: ! הגבלה של אורך האות ע"י N דגימות מהווה הכפלה של האות $\cos(0.1\pi n) + 0.1 \cos(0.125\pi n)$ בחלון מלבני באורך N .

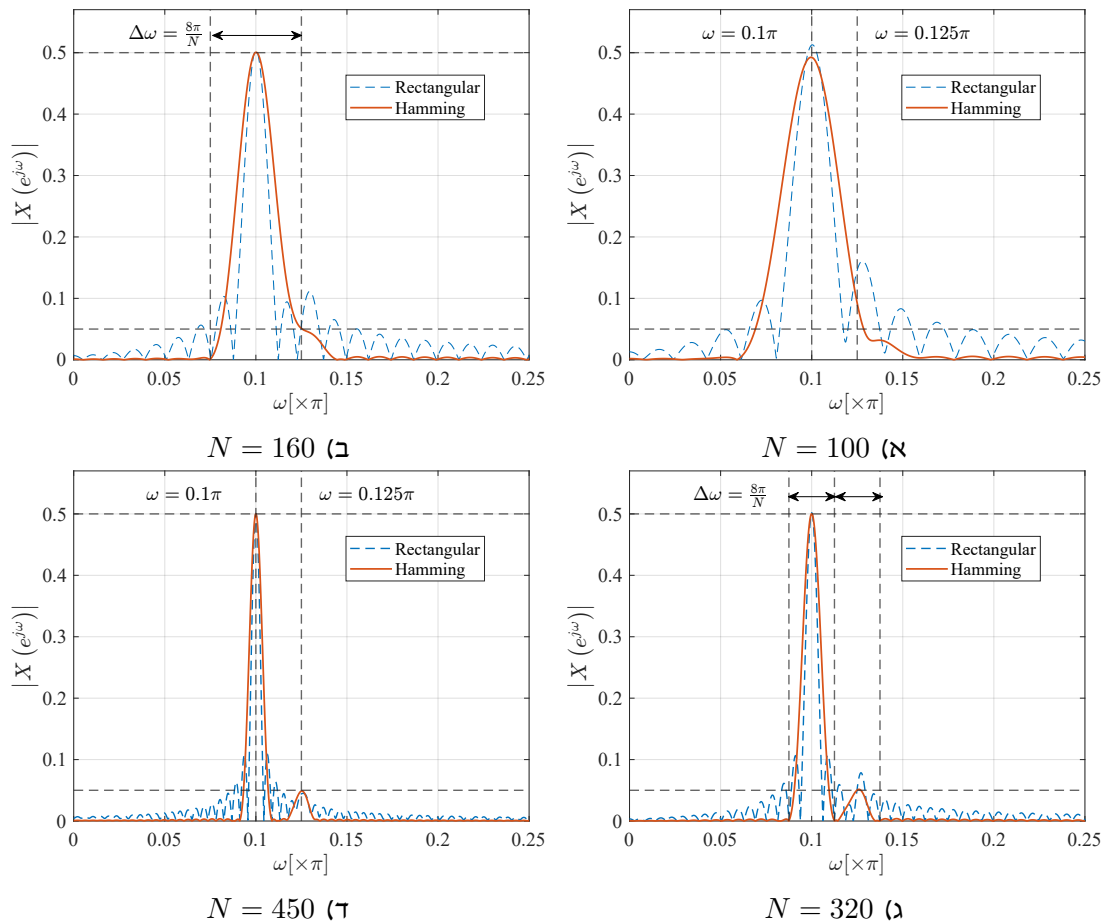
הערות לשרטוטים באיור 8.7

(א) ניתן לזהות פיק השני רק עבור מצב של חלון מלבני (אות הנתון סופי בזמן).

(ב) רוחב עונה המרכזית של חלון Hamming הינו $\frac{8\pi}{N}$. במצב זה מרחק בין האותות שווה למחצית רוחב העונה המרכזית של החלון בתדר. האות בתדר 0.1π מתרחב עד למיקום של האות בתדר 0.125π .

(ג) במצב זה מספר הדגימות הוא כפול ממצב הקודם, ולכן ניתן לזהות כל אחד מהפיקים בבירור. עדיין, ישנה השפעה מסויימת של גליות של האותות אחד על השני.

(ד) תוספת דגימות מגדילה מרחק בין הפיקים.



איור 8.7: השפעה של אורך האות על היכולת להיעזר בחלון לא מלבני.

8.4 STFT Transform Fourier Short-Time

לעתים ישנו צורך לנתח אותות יחסית ארוכים בזמן. לאותות האלה שתי אתגרים חשובים: (א) התמרה היא ארוכה מאוד, (ב) בהרבה מקרים התדרים של האות משתנים בזמן. ההתמודדות עם האתגר היא בשיטה שנקראת short-time Fourier transform או בקיצור STFT. הגרפים שמתקבלים נקראים spectrogram או, לפעמים, waterfall.

STFT (הגדרה 8.1): שיטה:

1. מחלקים את האות $x[n]$ למקטעים שונים באורך L . המקטעים אלו יכולים להיות עוקבים או חופפים (overlap) במידה מסויימת.
 2. משמעות החלוקה היא הכפלה בחלון באורך L . בנסיבות מסויימות נכפיל בפועל בחלון Hamming או חלון Hann.
 3. ביצוע התמרת פוריה לכל אחד מהחלונות בנפרד.
 4. צירוף התוצאות לגרף בזמן/תדר.
- מגבלת השיטה (עיקרון אי וודאות):
- קטעים יותר ארוכה נותנים הצגה יותר מדוייקת בתדר, אבל פחות מדוייקת בזמן.

□ קטעים יותר קצרים נותנים הצגה יותר מדויקת בזמן, אבל פחות מדויקת בתדר.

לסיכום, לא ניתן לקבל **בו-זמנית** דיוק בזמן ובתדר.

פקודות Matlab שימושיות: `stft`, `spectrogram`.

8.5 סיכום

□ אות דגום הוא תמיד באורך סופי. המשמעות של אות סופי היא הכפלה בחלון סופי בזמן, שהיא קונבולוציה בתדר. ההשלכות הן מריחה ודליפה ספקטרליות.

□ הוספת אפסים אינה מוסיפה לרוחב החלון, אלא משפרת את "נראות" ההתמרה.

□ הוספת דגימות בזמן (אורח האות) מוסיפה לרוחב החלון, ולכן מקטינה את העיוותים הנגרמים בגלל הכפלה בחלון.

□ ניתן לתעדף הקטנה של דליפה ספקראלית על חשבון התרחבות ע"י שימוש בחלונות מיוחדים.

פרק 9

מסננים

בפרקים הקודמים התעניינו בעיקר באנליזה: כלומר, בניתוח אותות ידועים בניתוח מערכות קיימות אשר מטרתן לעבד את האותות הללו. תכנון מסנן הינו בעית סינטזה, כלומר בהינתן אות ידוע ומטרה מסוימת, כיצד לתכנן את המסנן הטוב ביותר העונה על הדרישות. למשל, ניתוח אות ECG מתחיל עם הורדת רעשים החיצוניים, ושמירת פס תדרים ענייניים שנמצאים בין 50 לבין 250 הרץ. על אף, כל עיוות לא לינארי בפאזה עלול לשנות את צורת פולסי ה-ECG ולגרום לשגיאות באבחון. לכן צריך להתחשב בהיבטים מעשיים, כאשר רוצים לתכנן מסנן.

9.1 הקדמה

לפני שנדון בשיטות המעשיות לתכנון המסננים, עלינו להבין את המגבלות הפרקטיות של המסננים האידיאליים. לשם הדיון, נניח וקיבלנו אות דגום ב-100 הרץ, ושנרצה להוריד את ה-DC שלו, כלומר לסנן (למשל) את כל התדרים מתחת ל-0.5 הרץ¹. במסגרת העבודה הזו, המסנן האידיאלי המתאים למשימה הינו מוגדר על ידי התגובה בתדר

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר $\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{\pi}{100}$, ובעל תגובה להלם

$$h[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}.$$

אך המסנן המתקבל פשטני מדי: למעשה, קל לבדוק תוך בחינת תגובתו להלם שהמסנן הזה אינו סיבתי ואינו יציב, כלומר המסנן הזה אינו ניתן למימוש לניתוח הנתונים בזמן אמת. כדי להבין את מקור הבעייתיות, נציין כי אנחנו דורשים במסנן האידיאלי "יותר מדי". למעשה,

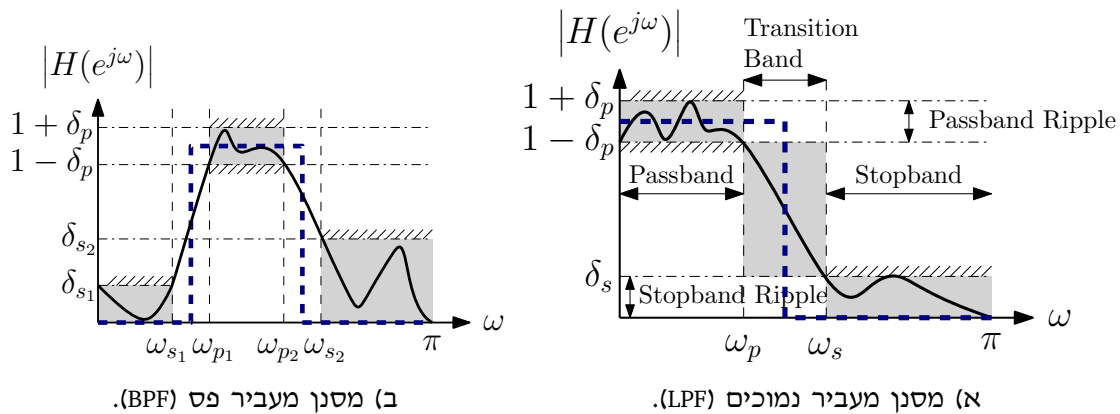
¹הבעייה הזו טיפוסית למשל מהורדת ה-DC מאותות ECG לצורך אבחון

אף מסנן מציאותי אינו יכול לבטל בהחלט פס רציף של תדרים, אלא לכל היותר להנחית אותו. בדומה לכך, מסנן מציאותי אינו יכול להעביר פס רציף של תדרים ללא עיוות כלל. לבסוף, כל המסננים המציאותיים מגיבים בתדר באופן רציף, כך שבפועל מעבר מתחום תדרים שנרצה להעביר לתחום תדרים שנרצה להנחית אינו מתבצע פתאומיות.

לאור הנידון, אנו מבינים שתיכנון מסנן פרקטי נעשה תוך שחרור כמה אילוצים. כלומר, לא נתכנן מסנן בהתאם לנוסחה אחת, אלא לפי מפרט דרישות.

9.2 מפרט דרישות לתכנון מסננים

9.2.1 מפרט מסנני FIR



איור 9.1: מפרט מסנני FIR.

מפרט מסנני LPF

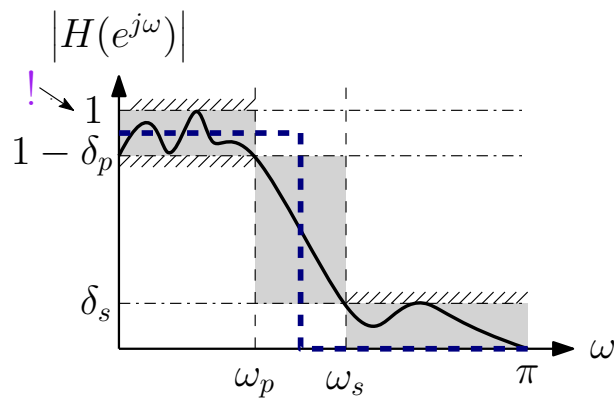
$$(9.1) \quad 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$(9.2) \quad |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

$$(9.3) \quad A_p = 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right)$$

$$(9.4) \quad A_s = -20 \log_{10} (\delta_s)$$

9.2.2 מפרט מסנני IIR



איור 9.2: מפרט מסנני IIR.

$$(9.5) \quad 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$(9.6) \quad |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

$$(9.7) \quad A_p = -20 \log_{10} (1 - \delta_p)$$

$$(9.8) \quad A_s = -20 \log_{10} (\delta_s)$$

9.2.3 מאפיינים נוספים

ייתנו מאפיינים לפי הגודלים $\omega_p, \omega_s, \delta_s, \delta_p$.

גורם הבחנה (הגדרה 9.1):

$$(9.9) \quad d = \sqrt{\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1}}$$

הגודל זה מתאר את יעילות המסנן מבחינת הגליות; ככל שגורם ההבחנה שואף ל-0, אנחנו מתקרבים לתגובה אידאלית.

גורם הסלקטיביות (הגדרה 9.2):

$$(9.10) \quad k = \frac{\omega_p}{\omega_s}$$

כאשר גורם הסלקטיביות קרוב ל-1, המעבר מתחום ההעברה לתחום הניחות כמעט מיידי.

תדר הקטעון (הגדרה 9.3):

$$\left| H(e^{j\omega_{3dB}}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

תדר הקטעון ω_{3dB} הוא התדר שבו התגובה בתדר מקיימת

9.3 תכנון מסנני FIR בשיטת החלונות

אחת השיטות לתכנון מסנני FIR היא שיטת החלונות. להלן נתאר את השיטה.

מסנן באורך סופי מתוך מסנן אידיאלי (תכונה 9.1): נדרש מסנן, שבאופן אידיאלי הינו בעל $H_d(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{h_d[n]\}$. ניתן להוכיח, שמסנן בעל אורך סופי הקרוב עליו ביותר מכיל $N = 2M + 1$ דגימות מרכזיות, מהצורה:

$$(9.11) \quad h[n]w[n] = \begin{cases} h_d[n] & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

כאשר החלון $w[n]$ הינו אחד החלונות מהטבלה 9.1. לדוגמה, חלון מלבני הוא

$$(9.12) \quad w[n] = \begin{cases} 1 & n = -M, \dots, M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

לאחר הוספת השהייה מתאימה כדי להפוך את המסנן לסיבתי, מתקבל מסנן מקורב

$$(9.13) \quad h[n] = h_d[n - M]w[n - M], \quad n = 0, \dots, N - 1$$

פאזה לינארית (תכונה 9.2): מדובר במסנן בעל סימטריה $h[n] = h[2M - n]$, ולכן בעל פאזה לינארית.

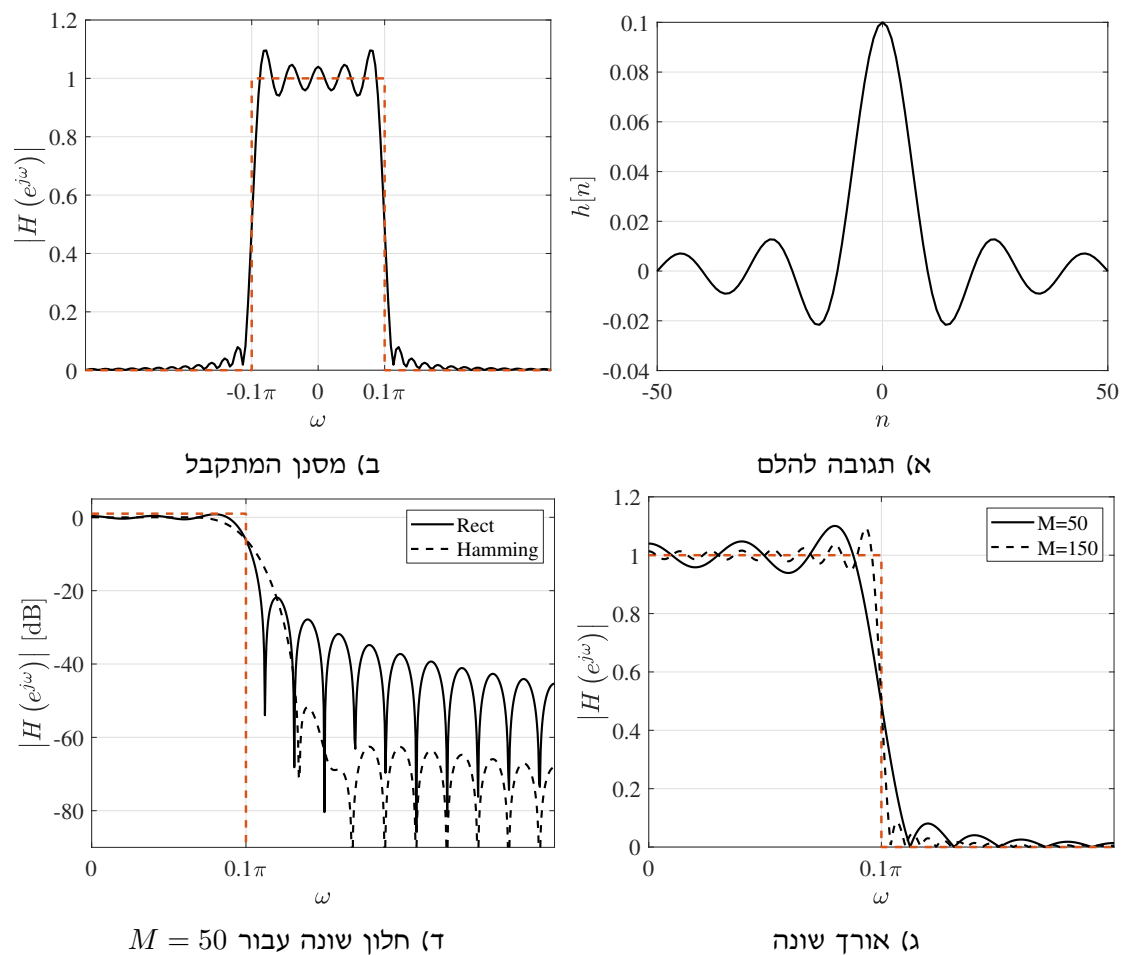
דוגמה 9.1: נקח מסנן LPF אידיאלי מהצורה:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \iff h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

מסנן המתקבל עבור חלון מלבני עם $M = 50$ הוא

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n - 50] & n = 0, \dots, 100 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הגדלת מספר דגימות משפרת את הביצועים של מסנן במישור התדר, דהיינו סלקטיביות טובה יותר (הגדרה 9.2), ובחירת חלון שונה יכולה לשפר את ההבחנה של המסנן (הגדרה 9.1). את ההמחשה של התופעות האלה עבור $\omega_c = \pi/10$ ניתן לראות באיור 9.3.



איור 9.3: מסנן המתקבל בדוגמה 9.1 עם $\omega_c = \pi/10$.

סיכום:

- תכנון מבוסס ביטוי אנליטי של תגובה להלם.
- ביצועים מושפעים מאורך וסוג החלון.
- ישנו תעדוף (trade-off) בין אורך המסנן וביצועים

9.4 תכנון מסננים ע"י Matlab

תכנון מסננים בהתאם לאחד המפרטים לעיל עבור FIR/IIR נעשת ע"י פקודה `filterDesigner`, בעזרת החלון המופיע באיור 9.4.²

לחליפין, דרך מקוצרת נוספת היא

```
dee = designfilt
```

² למידע מפורט ניתן לפנות להוראות באתר: <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/getting-started-with-filter-designer.html>

טבלה 9.1: דוגמאות לסוגי חלונות ותכונותיהן

Window name	Math. form $n = 0, \dots, N - 1$	Transition Bandwidth $(\omega_s - \omega_p)$	Mainlobe Bandwidth (ω_p)	Bandstop Attenuation (dB)
Rectangle	$w[n] = 1$	$\frac{1.84\pi}{N}$	$\frac{4\pi}{N+1}$	21
Bartlett	$w[n] = nu[n] - 2nu\left[n - \frac{N}{2}\right]$	$\frac{3.80\pi}{N}$	$\frac{8\pi}{N}$	25
Hanning	$w[n] = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) \right]$	$\frac{6.22\pi}{N}$	$\frac{8\pi}{N}$	44
Hamming	$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)$	$\frac{6.64\pi}{N}$	$\frac{8\pi}{N}$	53
Blackman	$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi k}{N-1}\right)$	$\frac{11.12\pi}{N}$	$\frac{12\pi}{N}$	74

9.4.1 שיטות תכנון נפוצות

פירוט של שיטות תכנון המופיעות ב-filterDesigner³.

שיטות תכנון מסנני FIR

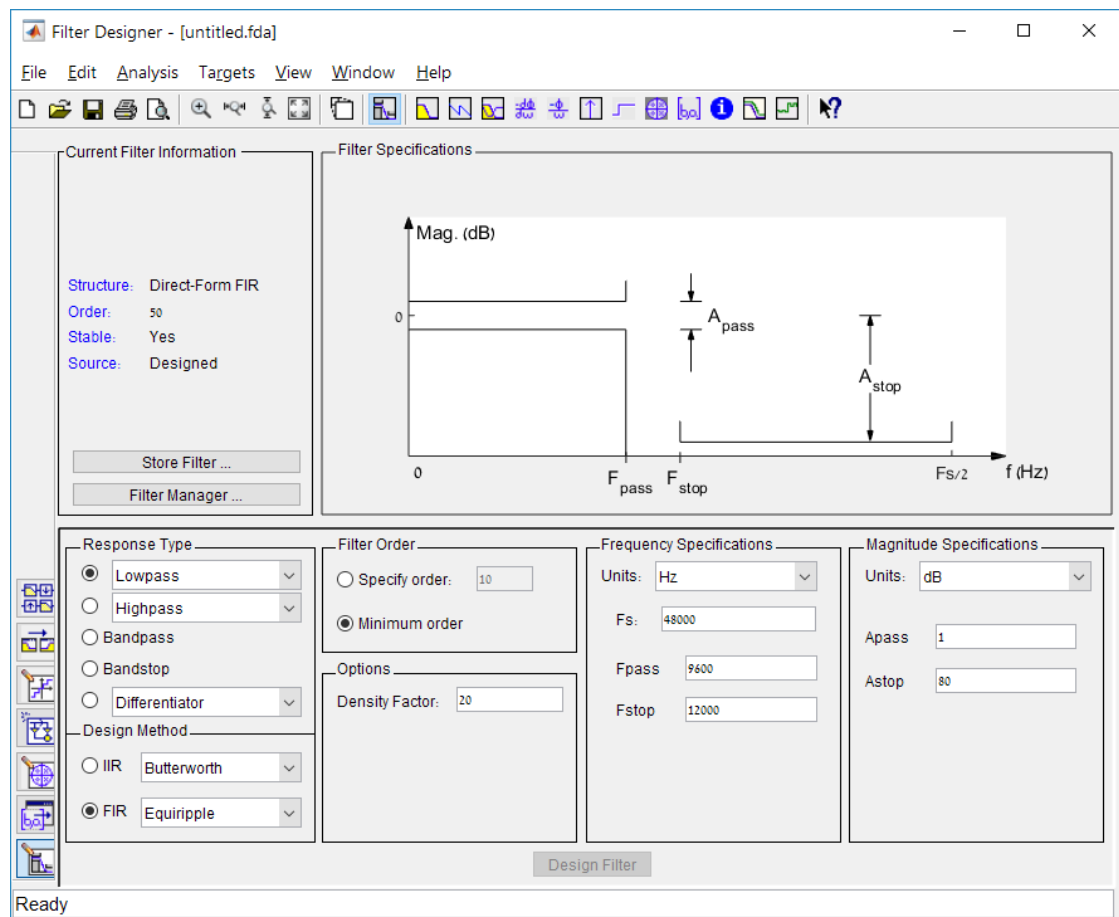
Window שיטת החלונות. החלון היחיד, שיודע להתאים את עצמו למפרט הדרישות עם אורך מינימלי זה חלון Kaiser. עבור כל יתר חלונות יש לציין את אורך המסנן הנדרש. בנוסף, עבור שיטה זאת $\delta_p = \delta_s$.

Equiripple תכנון מסנן בעל גליות אחידה בקירוב (equiripple) בכל תחומי התדרים (השיטה נקראת Parks-McClellan algorithm).

Least-squares מסנן שהוא תוצאה של אופטימיזציה נומרית של תגובה להלם של מסנן הנדרש.

Maximally flat שיטה המאפשרת מסנן חלק, ללא גליות.

³לפירוט בהרחבה ראה <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/filter-design-methods.html>.



איור 9.4: תכנון מסננים ע"י פקודה `filterDesigner`.

שיטות תכנון מסנני IIR

שיטות תכנון קלאסיות להלן מבוססות על שימוש במסנן אנלוגי כבסיס לתכנון מסנן ספרתי. **Butterworth** מסננים בשיטה זאת הן חלקות (ללא גליות) לאורך כל תחום התדרים.

I Type Chebyshev מסנן עם גליות אחידה בתחום העברה (passband). פחות סיביות ממסנן **Butterworth** ותחום עברה (passband) חלק.

II Type Chebyshev מסנן עם גליות אחידה בתחום חסימה (stopband).

Elliptic מסנן עם גליות אחידה בתחום חסימה (stopband) ובתחום העברה (passband). פחות סיביות ממסננים מסוג **Chebyshev**.

Maximally Flat, Least Pth-Norm, Constrained least P-norm שיטות מתקדמות.

ספרות

- [1] Dimitris G. Manolakis and Vinay K. Ingle, Applied Digital Signal Processing: Theory and Practice, Cambridge University Press, 2012.
- [2] M.H. Hayes, Schaums Outline of Digital Signal Processing, 2nd, McGraw-Hill, 2011.
- [3] S.K. Mitra, Digital Signal Processing, A Computer Based Approach, 4th, McGraw-Hill, 2010.
- [4] Vinay K. Ingle and John G. Proakis, Essentials of Digital Signal Processing Using MATLAB, 3rd, Cengage Learning, 2012.
- [5] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd, Pearson, 2009.
- [6] Dimitris Manolakis and John G. Proakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, 4th, Pearson, 2007, and 3th, 1996.

נספח א'

נספח מתמטי

סכום סדרה הנדסית סופית ואינסופית

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2-1} r^n = \frac{r^{N_1} - r^{N_2}}{1-r} \quad N_1 \leq N_2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1$$

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r^{N_1}} \quad |r| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2} \quad |r| < 1$$

חזקות

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^{m^n} = a^{mn}$$

$$e^{j\pi/2} = j, e^{-j\pi/2} = -j, e^{j\pi} = -1 \quad \text{מספרים מרוכבים}$$

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

שורשים מרוכבים

$$x^N = 1 = e^{j2\pi k} \rightarrow x = e^{j2\pi k/N}, k = 0, \dots, N-1$$